Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.982.274+517.538.52

ДВОЙСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ В ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. Б. Шерстюков

Аннотация. Установлен двойственный критерий для абсолютно представляющих систем в пространствах, принадлежащих достаточно широкому классу индуктивных пределов последовательностей банаховых пространств. Указанный результат формулируется без каких-либо дополнительных ограничений на исследуемую систему элементов. Рассматриваются приложения к системам простейших дробей в пространствах локально аналитических функций.

Ключевые слова: индуктивный предел, представляющая система, простейшая дробь.

Введение

В теории представляющих систем важное место уделяется получению для того или иного класса локально выпуклых пространств (ЛВП) E общих критериев того, что заданная система элементов будет (абсолютно) представляющей в E. В настоящей работе в качестве исходного пространства рассматривается канонический индуктивный предел (КИП) последовательности банаховых пространств, т. е. внутренний индуктивный предел последовательности B-пространств, каждое из которых вложено непрерывно в следующее. Ранее абсолютно представляющие системы (АПС) в индуктивных пределах изучались в [1–4]. Напомним необходимые в дальнейшем понятия и факты. Последовательность $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ элементов ЛВП E (здесь и ниже — над полем $\mathbb{C}$) называется [2] *абсолютно представляющей системой* в E, если каждый элемент $x \in E$ раскладывается (не обязательно единственным образом) в абсолютно сходящийся в E ряд $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$. Следуя [2], будем говорить, что внутренний индуктивный предел $E = \operatorname*{ind}\limits_{n\to} E_n$ *обладает свойством* (Y_0), если для любого абсолютно сходящегося в E ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ ($v_k \in E$, $k = 1, 2, \dots$) найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $v_k \in E_n$, $k = 1, 2, \dots$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится абсолютно в E_n. Это свойство было предметом исследования в ряде работ (см. кроме указанных выше [5–7]). Всюду далее символом E' обозначается топологически

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/6827) и проектов ГК Рособразование (П 268, 795, 943).

сопряженное к E пространство, т. е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на E. Пусть также $\operatorname{span} A$ обозначает линейную оболочку множества A.

Приведем общий результат Ю. Ф. Коробейника из обзорной статьи [2, гл. I, § 1, теорема 7], послуживший для нас отправной точкой. Этот результат дает описание АПС $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ в двойственных терминах в специальном классе пространств при дополнительных ограничениях на X.

Теорема А. *Пусть* $E = \operatorname*{ind}_{n\to}(E_n, \|\cdot\|_n)$ — *сильно сопряженное к рефлексивному пространству Фреше, представленное внутренним индуктивным пределом последовательности банаховых пространств и обладающее свойством* (Y_0). *Пусть, далее,*

$$x_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad k = 1, 2, \dots ; \tag{1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_k\|_{n+1}}{\|x_k\|_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Для того чтобы $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ *была* АПС *в* E, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существовали* $m = m(n) \in \mathbb{N}$ *и* $A = A(n) > 0$ *такие, что для каждого* $\varphi \in E'$

$$\|\varphi\|_n' := \sup\{|\varphi(x)| : x \in E_n, \|x\|_n \le 1\} \le A \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m}. \tag{3}$$

Позднее в [7] показано, что для КИП E последовательности нормированных пространств E_n наличие свойства (Y_0) равносильно регулярности E, т. е. [8] тому, что всякое ограниченное в E множество содержится и ограничено в некотором E_n. Поскольку каждое сильно сопряженное к рефлексивному пространству Фреше можно представить [9] в виде регулярного КИП последовательности банаховых пространств, теорема А фактически является критерием для АПС в произвольном сильно сопряженном к рефлексивному пространству Фреше. Естественный вопрос о существенности ограничений (1), (2) в условии теоремы А рассматривался в диссертации автора [4]. В ней показано, во-первых, что «необходимая» часть теоремы А справедлива и без предположения (2) (более того, в этой части теоремы можно снять также ограничение (1), если справа в неравенстве (3) написать $\sup\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_m\}$). Во-вторых, в [4] построен пример системы простейших дробей $X_\Lambda = \left(\frac{1}{z-\lambda_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $E = A(K_R)$ локально аналитических на $K_R = \{z : |z| \le R\}$, $R > 0$, функций, удовлетворяющей равномерной оценке (3) (правая часть которой подправлена указанным выше образом), но не являющейся АПС в $A(K_R) = \operatorname*{ind}_{n\to} A_c(K_{R_n})$. Здесь $E_n = A_c(K_{R_n})$ есть банахово пространство аналитических в открытом круге $\operatorname{int} K_{R_n}$ и непрерывных на K_{R_n} функций с нормой $\|y\|_n = \max_{z\in K_{R_n}} |y(z)|$ $(R_n \downarrow R,\ n \to \infty)$. Пространство $E = A(K_R)$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на него в условии теоремы А; при этом X_Λ не обладает свойством (1) и для элементов $X_\Lambda \cap A_c(K_{R_n})$ ни при каком $n \in \mathbb{N}$ не выполняется условие (2). Этот пример показывает, что поиск критерия для АПС без каких-либо ограничений на X в индуктивных пределах требует замены условия (3). Отметим, что доказательство теоремы А получено «координатным» методом, в основе которого лежит идея введения оператора представления и описание его эпиморфности через свойства сопряженного оператора, действующего из E' в соответствующее пространство последовательностей. Без дополнительных ограничений (1), (2) применение общей теории двойственности ЛВП при таком подходе затруднительно. С другой стороны, отсутствие двойственного описания АПС, не удовлетворяющих (1) и (или) (2), в индуктивных пределах крайне осложняет, к примеру, исследование аппроксимативных свойств таких важных систем, как $\left(\frac{1}{z-\lambda_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ или $\left(\frac{1}{(z-\lambda_k)^j} : j \in J,\ k = 1, 2, \dots\right)$, где $J \subset \mathbb{N}$.

В настоящей работе получена характеризация АПС в достаточно широком классе индуктивных пределов банаховых пространств, включающем в себя многие употребительные в анализе функциональные пространства. Никаких дополнительных ограничений на систему X при этом не налагается. Метод доказательства не использует ассоциированных пространств последовательностей, а существенно опирается на построение абсолютных оболочек [3] подсистем элементов из X.

§ 1. Основной результат

Для удобства чтения мы проведем перед формулировкой теоремы 1 вспомогательные рассуждения, сокращающие ее доказательство.

Пусть $(E, \xi) = \operatorname*{ind}_{n\to}(E_n, \|\cdot\|_n)$ — регулярный КИП последовательности банаховых пространств E_n; $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E$. Обозначим через $E_n(X)$ множество всех тех элементов пространства E_n, которые представляются абсолютно сходящимися в E_n рядами по системе $X \cap E_n$ (можно считать, что $X \cap E_n \neq \varnothing$ при всех $n \in \mathbb{N}$, выбросив, если необходимо, несколько первых банаховых пространств, «набирающих» E). Очевидно, $E_n(X) \neq \varnothing$ ($0 \in E_n(X)$) и является линейным подпространством пространства E_n. Введем в $E_n(X)$ норму, положив по определению

$$\|x\|_{n,X} := \inf \sum_{x_k \in E_n} |c_k| \|x_k\|_n,$$

где inf берется по всевозможным представлениям элемента $x \in E_n(X)$ в виде ряда $\sum\limits_{x_k \in E_n} c_k x_k$, абсолютно сходящегося в E_n. Согласно [3] $(E_n(X), \|\cdot\|_{n,X})$ — банаховы пространства, непрерывно вложенные в $(E_n, \|\cdot\|_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $E_n(X) \subseteq E_{n+1}(X)$, то

$$E(X) := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(X)$$

— содержащееся в E векторное пространство, которое можно наделить топологией η внутреннего индуктивного предела:

$$(E(X), \eta) = \operatorname*{ind}_{n\to}(E_n(X), \|\cdot\|_{n,X}).$$

Непрерывные вложения $(E_n(X), \|\cdot\|_{n,X}) \hookrightarrow (E_n, \|\cdot\|_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ влекут $(E(X), \eta) \hookrightarrow (E, \xi)$. Поскольку E — регулярный КИП, по теореме 5 из [7] E обладает свойством (Y_0). Поэтому, обозначив через I оператор тождественного вложения $E(X)$ в E, получим, что условие: X — АПС в E — равносильно тому, что I — эпиморфизм и, следовательно (в силу теоремы о замкнутом графике [10, с. 223]), изоморфизм $(E(X), \eta)$ на (E, ξ). Таким образом, свойство системы X быть абсолютно представляющей в E равносильно требованию: $(E, \xi) \hookrightarrow$

$(E(X),\eta)$. К рассматриваемой паре пространств применима теорема 6.5.1 из [9], согласно которой последнее условие можно заменить эквивалентным:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m = m(n) \in \mathbb{N} : (E_n, \|\cdot\|_n) \hookrightarrow (E_m(X), \|\cdot\|_{m,X}). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $(E,\xi) = \underset{n\to}{\operatorname{ind}}(E_n, \|\cdot\|_n)$ — *регулярный* КИП *последовательности банаховых пространств* E_n; $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E\setminus\{0\}$. *Для того чтобы* X *была* АПС *в* E, *достаточно, а если* E_1 *плотно в* E_n, $n = 1, 2, \dots$, *то и необходимо, чтобы выполнялись условия:*

1) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *найдется* $m = m(n) \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $x \in E_n$ *существуют* $B = B(n, x) > 0$ *и* $y \in E_m(X)$ *такие, что каждый функционал* $\varphi \in E'_m(X)$ *допускает распространение до функционала* $\psi \in E'_n$ *с равномерной по всем таким функционалам оценкой*

$$|\psi(x)| \le B \cdot |\varphi(y)|;$$

2) *система* $X \cap E_{p_n}$ *полна в* E_{p_n} *для некоторой возрастающей последовательности* $(p_n)_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется условие (4), т. е. определен и непрерывен оператор I тождественного вложения E_n в $E_m(X)$. Тогда этот оператор остается непрерывным при наделении пространств E_n и $E_m(X)$ слабыми топологиями $\sigma(E_n, E'_n)$ и $\sigma(E_m(X), E'_m(X))$ [10, гл. II, предложение 13]. По следствию из предложения 12 из [10, гл. II] определен сопряженный к I оператор сужения на E_n функционалов из $E'_m(X)$, действующий непрерывно из пространства $E'_m(X)$ с топологией $\sigma(E'_m(X), E_m(X))$ в пространство E'_n с топологией $\sigma(E'_n, E_n)$. Последнее свойство равносильно условию 1 с $\psi = \varphi|_{E_n}$. Далее, из того, что E_n плотно в E_{n+1} для всех $n \in \mathbb{N}$, и условия (4) следует, что для некоторой последовательности $(p_n)_{n=1}^{\infty} \uparrow \infty$ (очевидно, $p_n \ge n, n \in \mathbb{N}$)

$$\overline{E_n} \subset \overline{E_{p_n}(X)} \subset \overline{\operatorname{span}(X \cap E_{p_n})} \subset E_{p_n} = \overline{E}_n,$$

где замыкание берется в E_{p_n}. Поэтому линейная оболочка $\operatorname{span}(X \cap E_{p_n})$ плотна в E_{p_n} при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. справедливо утверждение 2.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1 и 2. По последовательности $(p_n)_{n=1}^{\infty} \uparrow \infty$ из условия 2 найдем $(m_n)_{n=1}^{\infty} \uparrow \infty$ так, чтобы $m_n \ge p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и каждому $x \in E_{p_n}$ отвечали $A_{n,x} > 0$, $y \in E_{m_n}(X)$ со свойством: всякий функционал $\varphi \in E'_{m_n}(X)$ допускает распространение до $\psi \in E'_{p_n}$, причем

$$|\psi(x)| \le A_{n,x}|\varphi(y)|, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Из условий 2 и $\operatorname{span}(X \cap E_{p_n}) \subset E_{p_n} \cap E_{m_n}(X)$ можно заключить, что ψ определяется по φ единственным образом. Зафиксируем произвольно $n \in \mathbb{N}$ и определим оператор

$$T : E'_{m_n}(X) \to E'_{p_n}, \quad T(\varphi) = \psi.$$

В силу условия 1 оператор T будет линейным и непрерывным в слабых топологиях $\sigma(E'_{m_n}(X), E_{m_n}(X))$ и $\sigma(E'_{p_n}, E_{p_n})$ соответственно. Согласно цитированным выше результатам из [10, гл. II] сопряженный оператор T' действует из E_{p_n} в $E_{m_n}(X)$ слабо непрерывно по правилу

$$x \in E_{p_n} \mapsto y = T'(x) \in E_{m_n}(X) : \forall \varphi \in E'_{m_n}(X) \quad \varphi(y) = \psi(x).$$

Так как $\varphi|_{\mathrm{span}(X\cap E_{p_n})} = \psi|_{\mathrm{span}(X\cap E_{p_n})}$, то

$$\forall x \in \mathrm{span}(X \cap E_{p_n}) \quad T'(x) = x. \tag{5}$$

Наша ближайшая цель — показать, что T' является оператором тождественного вложения E_{p_n} в $E_{m_n}(X)$. По условию 2

$$\forall x \in E_{p_n} \exists (y_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{span}(X \cap E_{p_n}) \quad \lim_{k\to\infty} y_k = x \text{ в } E_{p_n},$$

тем более y_k сходится к x слабо в E_{p_n}. С учетом (5) и слабой непрерывности оператора T' имеем $\lim\limits_{k\to\infty} T'(y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = T'(x)$ в топологии $\sigma(E_{m_n}(X), E'_{m_n}(X))$. Поскольку $m_n \geq p_n$, для каждого $x \in E_{p_n}$ можно подобрать последовательность $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся слабо в E_{m_n} одновременно к x и $T'(x)$. Значит, $T'(x) = x$ при всех $x \in E_{p_n}$, т. е. $E_{p_n} \subset E_{m_n}(X)$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда с очевидностью следует, что X — АПС в E. Теорема доказана.

Замечание 1. Внимательный анализ доказательства основной теоремы показывает, что при выводе необходимости условия 1 можно в рассуждениях слабые топологии заменить сильными. Именно, в условиях теоремы 1 если X — АПС в E, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m = m(n) \in \mathbb{N}$ и $B = B(n) > 0$ такие, что каждый функционал $\varphi \in E'_m(X)$ допускает распространение до функционала $\psi \in E'_n$, причем

$$\sup\{|\psi(x)| : x \in E_n,\ \|x\|_n \leq 1\} \leq B \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_m\right\}.$$

Подключая условие 2, обратную импликацию можно установить при дополнительном предположении о рефлексивности пространств $E_{m_n}(X)$ для некоторой возрастающей последовательности $(m_n)_{n=1}^{\infty}$. Мы не будем, однако, останавливаться на этом подробно, поскольку покажем ниже, что формулировка критерия для АПС допускает существенное упрощение при более обозримых, нежели условия $E''_{m_n}(X) = E_{m_n}(X)$, ограничениях на X.

Замечание 2. Условие 1 теоремы 1 нельзя назвать легко проверяемым из-за присутствия в нем пространств $E_m(X)$ и $E'_m(X)$. Представляется весьма затруднительным дать эффективное и достаточно простое описание этих пространств в общей ситуации. С другой стороны, их наличие в условии 1 отражает, как показывает приводимый ниже пример, существо дела, поскольку снятие ограничений на элементы системы X не позволяет уже эффективно обходиться функционалами из E'. Более того, нельзя в теореме 1 заменить $E'_m(X)$ даже на E'_m (см. далее). Сказанное выявляет позитивную роль теоремы 1, частично заполняющей брешь в общей теории представляющих систем, подчеркивая принципиальные трудности их двойственного описания, вызванные как топологическим устройством пространства E, так и свободой в расположении элементов системы X. Несмотря на очевидные сложности, связанные с проверкой условия 1, полученный результат может оказаться более эффективным в применении к конкретным пространствам и системам элементов в них, чем это кажется на первый взгляд. В самом деле, при условии 2 проверка того, что X — АПС в E (не является АПС в E), будет проведена, если удастся установить (опровергнуть) условие 1 для содержащего (содержащегося в) $E'_m(X)$ множества функционалов, допускающего осязаемую реализацию.

§ 2. Некоторые следствия

В связи с теоремой 1 возникает ряд естественных задач.

Задача 1. *Вывести теорему* А *методом доказательства теоремы* 1.

Задача 2. *Получить более простые по форме* (*не содержащие пространств* $E_m(X)$ *и* $E'_m(X)$) *необходимые и* (*отдельно*) *достаточные условия, при которых* X — АПС *в* E.

Задача 3. *Показать, что в общей ситуации избавиться от* $E_m(X)$ *и* $E'_m(X)$ *нельзя, т. е. найденные при решении задачи* 2 *условия «смыкаются» в критерий лишь для последовательностей* X, *удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.*

Рассмотрим первую из этих задач. Пусть E — регулярный КИП последовательности банаховых пространств E_n (в частности, сильное сопряженное к рефлексивному пространству Фреше); $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{0\}$. Если X — АПС в E, то выполняется (4). Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $B > 0$ такие, что $S_n \subseteq B \cdot S_{m,X}$, где S_n и $S_{m,X}$ — замкнутые единичные шары в E_n и $E_m(X)$ соответственно. Поэтому

$$\forall \varphi \in E'_m \quad \|\varphi\|'_n \le B\|\varphi\|'_{m,X} = B \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_m\right\}.$$

Итак, если $X \subset E \setminus \{0\}$ — АПС в регулярном КИП E последовательности B-пространств E_n, то для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $B > 0$ такие, что для любого $\varphi \in E'_m$

$$\sup\{|\varphi(x)| : x \in E_n, \|x\|_n \le 1\} \le B \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_m\right\}.$$

Таким образом, «необходимая» часть теоремы А справедлива без ограничений (1), (2) в более широком классе пространств и в усиленной форме.

Обратно, пусть E и X как и выше. Предположим, что для каждого натурального n найдутся номер m, число $B > 0$ и бесконечная подсистема $X_m \subseteq X \cap E_m$ со свойством $\lim\limits_{\substack{x_k \in X_m,\\ k \to \infty}} \frac{\|x_k\|_{m+1}}{\|x_k\|_m} = 0$, для которых равномерно по всем функционалам $\varphi \in E'_m$

$$\sup\{|\varphi(x)| : x \in E_n, \|x\|_n \le 1\} \le B \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in X_m\right\}.$$

Выбрав произвольно $x \in E$, найдем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $x \in E_n$, а далее — числа $m \in \mathbb{N}, B > 0$ и подсистему X_m, исходя из предыдущего предположения. Отсюда и из $E_m \hookrightarrow E_{m+1}$ легко следует, что

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E'_{m+1} \text{ и } |\varphi(x_k/\|x_k\|_m)| \le 1 \text{ для всех } x_k \in X_m\} < \infty.$$

Согласно замечанию 2 к теореме 2 из [11] элемент x аппроксимируется в E_{m+1} конечными линейными комбинациями вида $\sum\limits_{x_k \in X_m} c_k \frac{x_k}{\|x_k\|_m}$, $\sum |c_k| \le C_x$, где константа C_x зависит только от x. Последовательность $\left(\frac{x_k}{\|x_k\|_m}\right)_{x_k \in X_m}$ сходится к нулю в E_{m+1}, поэтому ее замкнутая (в E_{m+1}) абсолютно выпуклая оболочка компактна в E_{m+1}. Стало быть, воспользовавшись замечанием 3 к цитированному выше результату из [11], можно утверждать, что x раскладывается в ряд, абсолютно сходящийся в E_{m+1} и тем более в E. Итак, отличным от [2] методом получаем следующее обобщение теоремы А.

Теорема 2. *Пусть E — регулярный* КИП *последовательности банаховых пространств $(E_n, \|\cdot\|_n)$, $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E \setminus \{0\}$. Для того чтобы X была* АПС *в E, необходимо, чтобы*

$$\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m = m(n) \in \mathbb{N}\ \exists B = B(n) > 0\ \forall \varphi \in E_m' \\ \|\varphi\|_n' \le B \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_m\right\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Условие (6) *будет также достаточным, если оно выполнено для некоторых бесконечных подсистем $X_m \subseteq X \cap E_m$ таких, что*

$$\lim_{\substack{x_k \in X_m,\\ k \to \infty}} \frac{\|x_k\|_{m+1}}{\|x_k\|_m} = 0. \tag{7}$$

Следствие 1. *Пусть пространство E удовлетворяет исходным предположениям теоремы* 2, *а $X = (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E_1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|x_k\|_{n+1}}{\|x_k\|_n} = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Последовательность X является* АПС *в E тогда и только тогда, когда выполняется условие* (6).

Из теоремы 2 и теоремы 1.4.2 в диссертации автора [4] вытекает еще одно полезное в приложениях следствие, распространяющее теорему А. Оно отличается от следствия 1 заменой E_m' на E', что, как правило, более удобно в применении. При этом следует учесть, что LN^*-пространство и строгий индуктивный предел банаховых пространств являются примерами регулярных индуктивных пределов [12, теорема 2; 10, гл. VII, § 1, предложение 4].

Следствие 2. *Пусть $E = \operatorname{ind}\limits_{n\to}(E_n, \|\cdot\|_n)$ — LN^*-пространство или строгий индуктивный предел последовательности банаховых пространств E_n, $X = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ обладает свойствами* (1) *и* (2) *из теоремы* А. *Для того чтобы X была* АПС *в E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась равномерная по $\varphi \in E'$ оценка* (3).

По задачам 2 и 3 к необходимости условия (6) для свойства последовательности X быть АПС в E можно добавить утверждение о существенности предположения (7) в «достаточной» части теоремы 2. Подтверждающий пример, фактически построенный в [4], для полноты изложения будет приведен в заключительной части работы. Мы можем также выписать условие в духе (6), которое уже позволяет элементы пространства E раскладывать в абсолютно сходящиеся в E ряды по системе X, не удовлетворяющей (7). Именно, пусть X подчиняется требованиям:

$$\inf_{x_k \in E_n} \frac{\|x_k\|_{n+1}}{\|x_k\|_n} > 0, \quad n = 1, 2, \dots; \tag{8}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m = m(n) \in \mathbb{N}\ \exists B_n > 0\ \forall \varphi \in E_n' \quad \|\varphi\|_n' \le B_n \sup\left\{\frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_m} : x_k \in E_n\right\}. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае X — АПС в E, где E — КИП (не обязательно регулярный) последовательности банаховых пространств $(E_n, \|\cdot\|_n)$. Обозначим левую часть (8) через $\frac{1}{\alpha_n} > 0$, $n = 1, 2, \dots$. При $m \ge n$ можем для всех $x_k \in E_n$ написать

$$\frac{\|x_k\|_n}{\|x_k\|_m} = \frac{\|x_k\|_n}{\|x_k\|_{n+1}} \cdot \frac{\|x_k\|_{n+1}}{\|x_k\|_{n+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\|x_k\|_{m-1}}{\|x_k\|_m} \le \alpha_n \cdot \alpha_{n+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{m-1}.$$

Тогда из (9) получим для любого $\varphi \in E_n'$ оценки ($n = 1, 2, \dots$)

$$\|\varphi\|_n' \leq B_n \cdot \alpha_n \cdot \alpha_{n+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{m(n)-1} \cdot \sup_{x_k \in E_n} \frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_n} = \widetilde{B}_n \cdot \sup_{x_k \in E_n} \frac{|\varphi(x_k)|}{\|x_k\|_n}. \tag{10}$$

Согласно теореме 4 из [2, гл. I, § 1], примененной к банахову пространству E_n, последовательность $X \cap E_n$ — АПС в E_n при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда легко получаем нужное.

Интересно отметить, что условие (10) уже не для всякой АПС X в E имеет место. Например, оно не может выполняться для системы экспонент $\mathscr{E}_\Lambda = (e^{\lambda_k z})_{k=1}^\infty$ в пространстве $A(\overline{G}) = \operatorname*{ind}_{n\to} A_c(K_n)$ (G — выпуклая ограниченная область в $\mathbb{C}, (K_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность выпуклых компактов, $\overline{G} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, $K_{n+1} \subset \operatorname{int} K_n$, $n = 1, 2, \dots$), поскольку в банаховом пространстве $A_c(K_n)$ функций, непрерывных на K_n и аналитических в его внутренности $\operatorname{int} K_n$, вообще нет ни одной АПС экспонент [13].

§ 3. Приложение к системам простейших дробей в пространстве локально аналитических функций

Применим полученные выше результаты к одной конкретной ситуации. Пусть G — ограниченная конечносвязная область в $\mathbb{C}$ и $A(\overline{G})$ обозначает векторное пространство классов локально аналитических на $\overline{G}$ функций. В $A(\overline{G})$ вводится топология внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $A_c(K_n)$ аналитических в $\operatorname{int} K_n$ и непрерывных на компакте K_n функций с sup-нормой. Здесь $\overline{G} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, причем выполнены вложения $K_{n+1} \subset \operatorname{int} K_n$, $n = 1, 2, \dots$. Отметим, что введенная топология не зависит от выбора последовательности компактов K_n с указанными свойствами. В силу этого обстоятельства мы можем проводить рассуждения для какой-либо фиксированной последовательности таких компактов, подчиняя ее дополнительным требованиям. В частности, можно добиться плотности пространства $A_c(K_1)$ в $A_c(K_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Это следует из конечносвязности G, теоремы Рунге о рациональной аппроксимации и возможности смещения полюсов приближающих рациональных функций. Например, для кольца $G = \{z : r < |z| < R\}$, $0 < r < R < +\infty$, можно взять $K_n = \{z : r_n \leq |z| \leq R_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $0 < r_n \uparrow r, R_n \downarrow R$ при $n \to \infty$. Как известно [2], $A(\overline{G})$ — LN^*-пространство, а его сопряженное $A(\overline{G})'$ отождествляется с пространством $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G})$ функций, аналитических на открытом множестве $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ и исчезающих в бесконечно удаленной точке. Указанное отождествление реализует преобразование Коши [14]:

$$T : \forall \varphi \in A(\overline{G})' \mapsto \varphi_z \left(\frac{1}{z - \lambda} \right) =: g(\lambda) \in A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}). \tag{11}$$

Алгебраический изоморфизм T становится топологическим, если $A(\overline{G})'$ наделить сильной топологией, а $A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G})$ — естественной топологией пространства Фреше.

Последовательность попарно различных точек $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ порождает систему простейших дробей $X_\Lambda = \left(\frac{1}{z - \lambda_k}\right)_{k=1}^\infty \subset A(\overline{G})$. Рассмотрим вопрос о том, когда X_Λ образует АПС в $A(\overline{G})$.

Всякий линейный непрерывный функционал ψ на $A_c(K_n)$ допускает представление [10, дополнение к гл. II; 8, гл. VI, § 3] (см. также [15])

$$\psi(f) = \int\limits_{K_n} f\,d\mu, \tag{12}$$

где μ — комплекснозначная счетно аддитивная (борелевская регулярная) мера ограниченной вариации с содержащимся в K_n носителем. Класс всех таких мер обозначим символом $\mathscr{M}_n$. Полагая $\psi_z\bigl(\frac{1}{\xi - z}\bigr) =: \gamma(\xi) = \gamma_\mu(\xi)$, получим, что $\gamma \in A_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n)$. Если K_n — выпуклый компакт, то $\gamma(\xi)$ является функцией, ассоциированной по Борелю с характеристической функцией $\Phi(\lambda) = \psi_z(e^{\lambda z}) = \int\limits_{K_n} e^{\lambda z}\,d\mu_z$ функционала ψ. Как известно, $\Phi(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с содержащейся в K_n сопряженной индикаторной диаграммой. В этом случае по теореме Полиа наименьший выпуклый компакт, содержащий все особые точки функции γ, лежит в K_n.

Для $E_m = A_c(K_m)$ и $X = X_\Lambda$ пространство $E_m(X)$ обозначим через $A_c(K_m, \Lambda)$. Переформулировка теоремы 1 применительно к рассматриваемой ситуации приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная конечносвязная область в $\mathbb{C}$, последовательность компактов K_n удовлетворяет исходным предположениям этого параграфа, а $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{G}$. Для того чтобы система простейших дробей $X_\Lambda = \bigl(\frac{1}{z - \lambda_k}\bigr)_{k=1}^{\infty}$ была* АПС *в $A(\overline{G}) = \operatorname*{ind}_{n\to} A_c(K_n)$, необходимо и достаточно выполнения условий:*

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m = m(n) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $f \in A_c(K_n)$ найдутся $B = B(n, f)$, $g \in A_c(K_m, \Lambda)$ такие, что каждый линейный непрерывный функционал φ на $A_c(K_m, \Lambda)$ допускает продолжение до функционала вида (12), удовлетворяющего равномерной оценке

$$\Biggl|\int\limits_{K_n} f\,d\mu\Biggr| \le B|\varphi(g)|;$$

2) найдется последовательность $(p_n) \uparrow \infty$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для всякой меры $\mu \in \mathscr{M}_{p_n}$ из обращения функции

$$\gamma_\mu(\lambda) = \int\limits_{K_{p_n}} \frac{d\mu_z}{\lambda - z}$$

в нуль в каждой точке $\lambda_k \notin K_{p_n}$ следует $\gamma_\mu(\lambda) \equiv 0$.

Формулировку теоремы 3 можно упростить, если переходить к реализации функционалов посредством преобразования (11). Однако эта процедура упирается в задачу внутреннего описания пространства $A_c(K_m, \Lambda)$ и образа $F_m = T(A'_c(K_m, \Lambda))$ сопряженного к нему пространства, которую вряд ли можно удовлетворительно решить для произвольно расположенной последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ (см. [16]). В этой связи важное значение приобретает адаптированная к изучаемой ситуации версия теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть G и Λ, как в теореме 3. Для того чтобы X_Λ была* АПС *в $A(\overline{G})$, необходимо, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ существовали $m = m(n) \in \mathbb{N}$,*

$B = B_n > 0$ такие, что для всех $\mu \in \mathscr{M}_m$

$$\sup\left\{\left|\int\limits_{K_n} f\,d\mu\right| : f \in A_c(K_n), \max_{z\in K_n}|f(z)| \le 1\right\}$$
$$\le B\sup\{\rho(\lambda_k, K_m)|\gamma_\mu(\lambda_k)| : \lambda_k \notin K_m\}, \quad (13)$$

где $\rho(\lambda_k, K_m)$ — расстояние от λ_k до K_m. Условие (13) будет также достаточным, если оно выполняется для некоторых бесконечных подмножеств $\Lambda_m \subset \Lambda \setminus K_m$ таких, что

$$\lim_{\substack{\lambda_k\in\Lambda_m,\\ k\to\infty}} \rho(\lambda_k, K_m)(\rho(\lambda_k, K_{m+1}))^{-1} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что следствия теоремы 2 к системе X_Λ в пространстве $A(\overline{G})$ неприменимы. В самом деле, при выполнении условия (1) теоремы A все точки λ_k не принадлежат K_1. Далее, $\rho(\lambda_k, K_n) = |\lambda_k - z_{k,n}|$, где $z_{k,n} \in K_n$, $k, n = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\begin{aligned}\rho(\lambda_k, K_n)(\rho(\lambda_k, K_{n+1}))^{-1} &= |\lambda_k - z_{k,n}|(|\lambda_k - z_{k,n+1}|)^{-1}\\ &\ge |\lambda_k - z_{k,n}|(|\lambda_k - z_{k,n}| + |z_{k,n+1} - z_{k,n}|)^{-1}\\ &= \left(1 + \frac{|z_{k,n+1} - z_{k,n}|}{|\lambda_k - z_{k,n}|}\right)^{-1} \ge \left(1 + \frac{\operatorname{diam} K_n}{\rho(K_n, \partial K_1)}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,\end{aligned}$$

где $\operatorname{diam} K_n = \sup\{|x - y| : x, y \in K_n\}$ — диаметр компакта K_n; ∂K_1 — граница компакта K_1, а $\rho(K_n, \partial K_1) = \inf\{|x - y| : x \in K_n, y \in \partial K_1\}$ — расстояние между компактами K_n и ∂K_1. Следовательно,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sup\limits_{z\in K_{n+1}} |z - \lambda_k|^{-1}}{\sup\limits_{z\in K_n} |z - \lambda_k|^{-1}} = \varliminf_{k\to\infty} \rho(\lambda_k, K_n)(\rho(\lambda_k, K_{n+1}))^{-1}$$
$$\ge \left(1 + \frac{\operatorname{diam} K_n}{\rho(K_n, \partial K_1)}\right)^{-1} =: \delta_n > 0,$$

и условие (2) нарушается.

В заключение построим два примера последовательностей Λ. В первом из них точки λ_k выбраны так, что выполняется равномерная оценка (13), но X_Λ не является АПС в $A(\overline{G})$, что указывает на существенность дополнительного предположения (14) в условии теоремы 4. Несколько изменив способ построения Λ, можно предъявить пример АПС X_Λ в $A(\overline{G})$. Предварительно преобразуем левую часть неравенства (13). Будем дополнительно предполагать, что G — (ограниченная) односвязная область в $\mathbb{C}$. Тогда последовательность компактов K_n можно выбрать так, чтобы ∂K_n были жордановыми спрямляемыми кривыми. При $m > n, \mu \in \mathscr{M}_m$ и $f \in A_c(K_n)$ имеем

$$\int\limits_{K_n} f\,d\mu = \int\limits_{K_m} f\,d\mu = \int\limits_{K_m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi\,d\mu_z$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} f(\xi)\int\limits_{K_m} \frac{d\mu_z}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} f(\xi)\gamma(\xi)\,d\xi,$$

где Γ_n — контур, охватывающий K_n и расположенный в области аналитичности функции f. Из условий на G моментально следует, что

$$\forall\mu \in \mathscr{M}_m \sup\left\{\left|\int\limits_{K_n} f\,d\mu\right| : f \in A_c(K_n), \max_{z\in K_n}|f(z)| \le 1\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\int\limits_{\partial K_n} f(\xi)\gamma_\mu(\xi)\,d\xi\right| : f \in A_c(K_n), \max_{z\in K_n}|f(z)| \le 1\right\}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K_n}|\gamma_\mu(\xi)|\,d\xi \le \frac{L_n}{2\pi}\max_{\xi\in\partial K_n}|\gamma_\mu(\xi)|,$$

где L_n — длина ∂K_n.

Итак, (13) будет заведомо выполняться, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $m = m(n) \in \mathbb{N}$, $D = D_n > 0$ такие, что для всех $\mu \in \mathscr{M}_m$

$$\max_{\xi\in\partial K_n}|\gamma_\mu(\xi)| \le D\sup\{\rho(\lambda_k, K_m)|\gamma_\mu(\lambda_k)| : \lambda_k \notin K_m\}. \tag{15}$$

Пример 1. Пусть G — ограниченная жорданова область в $\mathbb{C}$, граница которой обладает тем свойством, что для каждой ее точки z найдется кружок, лежащий в $\overline{G}$ и имеющий с ∂G единственную общую точку z. Аналогичным свойством можно наделить компакты K_n, построив их по области G согласно исходным предположениям теоремы 3. В частности, G может быть кругом. Пусть, далее, $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_{(n)}$, где $\Lambda_{(n)}$ — любое счетное всюду плотное множество точек на ∂K_n. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathscr{M}_m$, $m > n$,

$$\max_{\xi\in\partial K_n}|\gamma_\mu(\xi)| = \sup_{\lambda_k\in\Lambda_{(n)}}|\gamma_\mu(\lambda_k)| \le \sup_{\lambda_k\notin K_{n+1}}|\gamma_\mu(\lambda_k)|$$
$$\le (\rho(K_{n+1}, \partial K_n))^{-1}\sup\{\rho(\lambda_k, K_{n+1})|\gamma_\mu(\lambda_k)| : \lambda_k \notin K_{n+1}\},$$

т. е. (15) выполняется с $m = n+1$ и $D(n) = (\rho(K_{n+1}, \partial K_n))^{-1}$. Покажем, что X_Λ абсолютно представляющей системой в $A(\overline{G})$ не является. Предполагая противное, выберем произвольно отличную от тождественного нуля целую функцию $f(z)$ и разложим ее в абсолютно сходящийся по топологии $A(\overline{G})$ ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$. Поскольку пространство $A(\overline{G})$ обладает свойством (Y_0), все функции $\frac{a_k}{z-\lambda_k}, \lambda_k \in \Lambda$, принадлежат некоторому пространству $A_c(K_m), m > 1$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$ сходится к $f(z)$ абсолютно по норме $A_c(K_m)$. Значит, $a_k = 0$, если $\lambda_k \in \Lambda_j, j \ge m$, откуда $f(z) = \sum\limits_{\lambda_k\in\bigcup_{j=1}^{m-1}\Lambda_j}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно внутри области $\operatorname{int}K_m$. Из предложения 1 в [17] следует, что последний ряд сходится к $f(z)$ абсолютно и равномерно на компактах из $\operatorname{int}K_{m-1}$. Выпишем $\left(\frac{a_k}{z-\lambda_k}\right)_{\lambda_k\in\bigcup_{j=1}^{m-1}\Lambda_j}$ в виде последовательности $\left(\frac{b_k}{z-\nu_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ и предположим, что $b_{k_0} \ne 0$ для некоторой точки ν_{k_0}, лежащей на границе ∂K_{m-1}. Воспользуемся теперь одним приемом из [18, гл. I, § 20]. Пусть z лежит на радиусе d_{m-1} какой-либо окружности $\gamma_{m-1} \subset K_{m-1}$, $\gamma_{m-1} \cap \partial K_{m-1} = \{\nu_{k_0}\}$, проведенном к точке ν_{k_0}. Очевидно, для всех $k \ne k_0$ и $z \in d_{m-1}$ справедливы неравенства $|z-\nu_{k_0}|<|z-\nu_k|$. Запишем $f(z)$ в виде абсолютно и равномерно сходящегося внутри области $\operatorname{int} K_{m-1}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z-\nu_k}$. Выбрав номер $N>k_0$ так, чтобы $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}|b_k|<\frac{|b_{k_0}|}{2}$, получим

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{z-\nu_k}\right|\le\frac{1}{|z-\nu_{k_0}|}\sum_{k=N+1}^{\infty}|b_k|<\frac{|b_{k_0}|}{2|z-\nu_{k_0}|}\quad\forall z\in d_{m-1}.$$

Поэтому при тех же z

$$|f(z)|=\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{z-\nu_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{z-\nu_k}\right|=\left|\frac{b_{k_0}}{z-\nu_{k_0}}+\sum_{\substack{k=1,\\k\ne k_0}}^{N}\frac{b_k}{z-\nu_k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{z-\nu_k}\right|$$

$$\ge\frac{|b_{k_0}|}{|z-\nu_{k_0}|}-\left|\sum_{\substack{k=1,\\k\ne k_0}}^{N}\frac{b_k}{z-\nu_k}\right|-\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{z-\nu_k}\right|\ge\frac{|b_{k_0}|}{2|z-\nu_{k_0}|}-\sum_{\substack{k=1,\\k\ne k_0}}^{N}\frac{|b_k|}{|z-\nu_k|}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{z\to\nu_{k_0},\\z\in d_{m-1}}}|f(z)|=+\infty$, что невозможно. Таким образом, $b_k=0$, если k таково, что $\nu_k\in\Lambda_{m-1}$, и $f(z)=\sum\limits_{\lambda_k\in\bigcup\limits_{j=1}^{m-2}\Lambda_j}\frac{a_k}{z-\lambda_k}$, если $m>2$. Продолжая рассуждения указанным образом, получим, что $f(z)\equiv0$. Обнаруженное противоречие заставляет признать, что X_Λ, $\Lambda=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Lambda_{(n)}$, не является АПС в $A(\overline{G})$.

Замечание. В примере 1 в качестве G, разумеется, можно выбирать области более общего вида. Например, легко видеть, что предложенный метод проходит для $\overline{G}$, являющейся внешностью произвольной выпуклой ограниченной области. Нетрудно также понять, что при описанном выборе последовательности Λ в роли области G может выступать внутренность какого-либо (не обязательно выпуклого) многоугольника, поскольку лишь конечное число точек из ∂G (вершины многоугольника) не удовлетворяют требованиям на границу G, описанным в примере 1. Интересно также отметить, что построенная в примере 1 система X_Λ, не являясь АПС в $A(\overline{G})$, обладает все же хорошими аппроксимационными свойствами. В терминологии [4] (см. также [19]) X_Λ будет абсолютно приближающей в $A(\overline{G})$ системой.

Кроме упомянутых выше работ вопросам, связанным с разложением функций из $A(\overline{G})$ в ряды по фиксированной системе простейших дробей, сходящиеся равномерно внутри области G, посвящены [20–24] (этот список далеко не полный). Рассматриваемый в данной работе случай более сильной (индуктивной) топологии изучен гораздо хуже. В банаховом пространстве функций, непрерывных в единичном круге $|z|\le1$ и аналитических в его внутренности, приближения линейными комбинациями простейших дробей с учетом коэффициентов этих комбинаций изучались С. Я. Хавинсоном [25, 26].

Пример 2. В этом примере G — произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, а последовательность компактов K_n по-прежнему такова, что $\overline{G}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$, K_{n+1} лежит во внутренности односвязной области $\operatorname{int}K_n$,

$n = 1, 2, \dots$. Будем также считать выполненным условие $\partial\overline{G} = \partial G$, что позволяет наделить этим свойством компакты K_n. Применяя алгоритм Рунге — Вольфа [27], построим для каждого $n \geq 2$ последовательность $\Lambda_{(n)}$ попарно различных точек, лежащую в $K_{n-1} \setminus K_n$, стягивающуюся к ∂K_n [17], так, чтобы

$$\frac{1}{z-\alpha} = \sum_{\lambda_k \in \Lambda_{(n)}} \frac{a_k}{z-\lambda_k}, \quad \sum_{\lambda_k \in \Lambda_{(n)}} |a_k| < \infty,$$

α — фиксированная точка из $\mathbb{C} \setminus K_1$. Из предложения 2 и теоремы 1 статьи [17] заключаем, что $X_{\Lambda_{(n)}}$ образует АПС в пространстве $A(K_n)$, наделенном топологией равномерной сходимости на компактах области $\operatorname{int} K_n$. Если $f \in A(\overline{G})$, то $f \in A(K_n)$ для некоторого $n \geq 2$. Поэтому найдется ряд по системе $X_{\Lambda_{(n)}}$, сходящийся к f абсолютно и равномерно внутри области $\operatorname{int} K_n$ и тем более абсолютно по топологии пространства $A(\overline{G})$. Значит, X_Λ — АПС в $A(\overline{G})$, где $\Lambda = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \Lambda_{(n)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. I. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб. 1975. Т. 97, № 2. С. 193–229.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.
3. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Реализация сопряженного пространства с помощью обобщенного преобразования Фурье — Бореля. Приложения // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1988. С. 62–73.
4. *Шерстюков В. Б.* Некоторые классы полных систем. Достаточные и эффективные множества. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону: РГУ, 2000.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе пространств, обладающих свойством (Y_0) // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1977. № 4. С. 64.
6. *Абанин А. В.* О свойстве (Y_0) // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1981. № 4. С. 31–32.
7. *Мелихов С. Н.* Об абсолютно сходящихся рядах в канонических индуктивных пределах // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 877–886.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
10. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
11. *Красичков-Терновский И. Ф.* Об абсолютной полноте системы экспонент на интервале // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 3. С. 309–322.
12. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1, № 1. С. 60–77.
13. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых свойствах абсолютно представляющих систем // Линейные операторы в комплексном анализе. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1994. С. 58–65.
14. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math. 1953. Bd 191. S. 30–50.
15. *Красичков-Терновский И. Ф., Шилова Г. Н.* Абсолютная полнота систем экспонент на выпуклых компактах // Мат. сб. 2005. Т. 196, № 12. С. 85–98.
16. *Brown L., Shields A., Zeller K.* On absolutely convergent exponential sums // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96, N 1. P. 162–183.
17. *Коробейник Ю. Ф.* К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 723–737.
18. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
19. *Шерстюков В. Б.* О приближении аналитических функций линейными комбинациями простых дробей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. № 1. С. 22–24.
20. *Леонтьева Т. А.* Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 191–200.
21. *Леонтьева Т. А.* Об условиях представимости аналитических функций рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 197–203.

22. *Леонтьева Т. А.* Ряды рациональных дробей с быстро убывающими коэффициентами // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 5. С. 627–639.

23. *Сибилев Р. В.* Теорема единственности для рядов Вольфа — Данжуа // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 1. С. 170–199.

24. *Шерстюков В. Б.* Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 458–473.

25. *Хавинсон С. Я.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов // Изв. АН Арм. ССР. 1971. Т. 6, № 2–3. С. 221–234.

26. *Хавинсон С. Я.* О полных системах в банаховых пространствах // Изв. АН Арм. ССР. 1985. Т. 20, № 2. С. 89–111.

27. *Wolff J.* Sur les séries $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{A_k}{z-\alpha_k}$ // C. R. Acad. Sci. 1921. V. 173. P. 1327–1328.

Статья поступила 13 мая 2009 г., окончательный вариант — 23 сентября 2009 г.

Шерстюков Владимир Борисович
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
кафедра высшей математики,
Каширское шоссе, 31, Москва 115409
shervb73@gmail.com