Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 510.5

ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ СЕМЕЙСТВ НИЗКИХ МНОЖЕСТВ И ТЬЮРИНГОВЫ СКАЧКИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Получен следующий результат: если даны Δ^0_2-вычислимые нумерации ν, μ семейств множеств натуральных чисел, то предикат $P(x,y) \Leftrightarrow \nu(x)' \neq \mu(y)$ является Σ^0_2-предикатом. Как следствия из этого результата можно получить достаточное условие существования Δ^0_2-вычислимой нумерации подсемейства всех множеств данного семейства, тьюринговы скачки которых лежат в фиксированном уровне иерархии Ершова, и существование Σ^{-1}_ω-вычислимой нумерации семейства всех супернизких множеств.

Ключевые слова: вычислимая нумерация, иерархия Ершова, конструктивный ординал, низкое множество, супернизкое множество.

Пусть $\langle O, <_O \rangle$ — клиниевская система обозначений для конструктивных ординалов и $a \in O$. Множество X принадлежит Σ^{-1}_a-*классу иерархии Ершова*, если существует частично вычислимая функция от двух переменных ψ такая, что для всех x выполнено

$$x \in X \Leftrightarrow \exists t <_O a \forall t' <_O a[\psi(t,x)\downarrow = 1 \ \& \ [\psi(t',x)\downarrow \Rightarrow [t <_O t' \ \vee \ t = t']]].$$

Здесь запись $\psi(t,x)\downarrow$ означает, что значение $\psi(t,x)$ определено. Про такую функцию ψ будем говорить, что она *определяет* X *как* Σ^{-1}_a-*множество.* Определим Π^{-1}_a- и Δ^{-1}_a-классы, полагая

$$\Pi^{-1}_a = \{X : \overline{X} \in \Sigma^{-1}_a\}, \quad \Delta^{-1}_a = \Sigma^{-1}_a \cap \Pi^{-1}_a.$$

Если a является обозначением ординала ω, то множества, принадлежащие классу Δ^{-1}_a, называются ω-*в. п. множествами.* Альтернативные определения классов иерархии Ершова можно найти в [1–4].

Все рассматриваемые в этой статье семейства множеств являются семействами множеств натуральных чисел. Пусть S — семейство множеств. *Нумерацией* семейства S называется произвольное отображение множества натуральных чисел ω на S. Нумерация ν семейства множеств S называется Σ^{-1}_a-*вычислимой*, если

$$\{\langle x,y \rangle : y \in \nu(x)\} \in \Sigma^{-1}_a,$$

где $\langle x,y \rangle$ — образ пары (x,y) относительно функции пары $\frac{x^2+2xy+y^2+3x+y}{2}$. Нумерация ν семейства множеств S называется Δ^0_2-*вычислимой*, если

$$\{\langle x,y \rangle : y \in \nu(x)\} \in \Delta^0_2.$$

Очевидно, что нумерация Δ^0_2-вычислима тогда и только тогда, когда она Σ^{-1}_a-вычислима для некоторого $a \in O$. Если a — обозначение для ординала 1, то понятие Σ_a^{-1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим определением вычислимой нумерации (см. [5]). Для двух нумераций ν и μ пишем $\mu \leqslant \nu$, если существует вычислимая функция f такая, что $\mu(x) = \nu(f(x))$ для всех x.

Множество X называется *супернизким*, если его тьюрингов скачок X' таблично сводится к $\varnothing'$ ($X' \leqslant_{tt} \varnothing'$). В [6] доказано, что класс всех множеств X таких, что $X \leqslant_{tt} \varnothing'$, совпадает с классом ω-в. п. множеств. Следовательно, множество X супернизкое тогда и только тогда, когда X' ω-в. п. В [7] предложено описание супернизких в. п. множеств в терминах множеств с *отслеживаемым скачком* (в оригинале *jump traceable*): множество X называется *множеством с отслеживаемым скачком*, если существуют вычислимая функция h и равномерно вычислимая последовательность в. п. множеств $\{T_e\}_{e\in\omega}$ такие, что $\forall e \ \operatorname{Card}(T_e) \leqslant h(e)$ и

$$\Phi_e^X(e)\!\downarrow\, \Rightarrow \Phi_e^X(e) \in T_e.$$

Здесь Φ_e — тьюрингов функционал с гёделевским номером e. Используя такое описание супернизких в. п. множеств, удается доказать, что семейство всех супернизких в. п. множеств имеет вычислимую нумерацию. Однако в [7] доказано, что класс множеств с отслеживаемым скачком не совпадает с классом супернизких множеств. В этой статье будет доказан следующий основной результат: если даны Δ_2^0-вычислимые нумерации ν, μ каких-либо семейств множеств, то предикат $P(x,y) \Leftrightarrow \nu(x)' \neq \mu(y)$ является Σ_2^0-предикатом. Отметим, что, используя алгоритм Тарского — Куратовского, удается получить только Σ_3^0-оценку этого предиката. Следствия этого результата, одним из которых является существование Σ_ω^{-1}-вычислимой нумерации семейства всех супернизких множеств, будут рассмотрены ниже (мы отождествляем ординалы, меньшие ω^2, с их обозначениями из O).

Пусть $\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$ — нумерация всех частично вычислимых (ч.в.) функций от двух переменных с областью значений в множестве $\{0,1\}$, определенная так: $\varphi_e(t,x) = sg\big(\Phi_e^{\varnothing}(\langle t,x\rangle)\big)$, если $\Phi_e^{\varnothing}(\langle t,x\rangle)\!\downarrow$, и $\varphi_e(t,x)\!\uparrow$ в противном случае. Очевидно, что эта нумерация главная, т. е. она вычислима, и если $\{\psi_e\}_{e\in\omega}$ — произвольная вычислимая нумерация семейства всех ч.в. функций от двух переменных с областью значений в множестве $\{0,1\}$, то существует такая вычислимая функция f, что $\psi_e = \varphi_{f(e)}$. Будем обозначать через W_e^X область определения функционала Φ_e^X. Вместо $W_e^{\varnothing}$ пишем просто W_e.

Пусть p — вычислимая функция такая, что для всех обозначений $a \in O$

$$W_{p(a)} = \{b \in O : b <_O a\}.$$

Для обозначения $a \in O$, функции φ_e и шага s определим величину $m(a,e,x,s)$. Если $\varphi_{e,s}(b,x)\!\uparrow$ для всех $b \in W_{p(a),s}$, то $m(a,e,x,s) = -1$. Предположим, что $\varphi_{e,s}(b,x)\!\downarrow$ для некоторого $b \in W_{p(a),s}$. Пусть $b \in W_{p(a),s}$ такое, что $\varphi_{e,s}(b,x)\!\downarrow$ и

$$\forall b' \in W_{p(a),s} \quad [\varphi_{e,s}(b',x)\!\downarrow\, \Rightarrow [b' = b \vee b <_O b']].$$

Полагаем $m(a,e,x,s) = b$. Определим $m(a,e,x) = \lim\limits_s m(a,e,x,s)$. Очевидно, что при фиксированном $a \in O$ функция $m(a,e,x,s)$ вычислима. Следовательно, по лемме Шенфилда о пределе при фиксированном a функция $m(a,e,x)$ вычислима относительно $\varnothing'$. Пусть даны обозначение $a \in O$ и функция φ_e. Определим множество $V(a,e)$:

$$V(a,e) = \{x : m(a,e,x) \neq -1 \ \&\ \varphi_e(m(a,e,x),x) = 1\}.$$

По определению $X = V(a,e)$ тогда и только тогда, когда функция φ_e определяет X как Σ_a^{-1}-множество. Легко видеть, что нумерация ν, определенная так:

$$\nu(e) = V(a,e),$$

будет главной нумерацией для всех Σ_a^{-1}-вычислимых нумераций, т. е. она Σ_a^{-1}-вычислима, и если дана Σ_a^{-1}-вычислимая нумерация μ какого-либо семейства множеств, то $\mu \leqslant \nu$. Для семейства S пусть $J_a(S) = \{X \in S : X' \in \Sigma_a^{-1}\}$.

Лемма 1. *Пусть даны обозначения $a, b \in O$ и элемент $e \in \omega$. Тогда множество $M_e = \{i : V(a,e)' \neq V(b,i)\}$ в. п. относительно $\varnothing'$ равномерно по e. Другими словами, существует вычислимая функция g такая, что $M_e = W_{g(e)}^{\varnothing'}$ для всех e.*

Доказательство. Для каждого i построим равномерно по i тьюрингов функционал Ψ_i. Используя теорему рекурсии с параметрами, можно считать, что в начале построения имеем такую вычислимую функцию n, что $\Psi_i = \Phi_{n(i)}$ для всех i. Следовательно, равномерно по i мы можем указать вычислимую функцию h_i такую, что

$$\Psi_i^X(x)\downarrow \Leftrightarrow \Phi_{h_i(x)}^X(h_i(x))\downarrow.$$

Через $2^{<\omega}$ обозначим множество всех конечных строк из символов 0 и 1.

Конструкция Ψ_i.

Шаг $s = 0$.

Полагаем $\Psi_{i,0}^{\sigma} = \varnothing$ для всех $\sigma \in 2^{<\omega}$.

Шаг $s+1$.

Для всех $x \in \omega$ и для всех $\sigma \in 2^{<\omega}$ полагаем $\Psi_{i,s+1}^{\sigma}(x)\downarrow = 0$ в том и только в том случае, если $\Phi_{x,s+1}^{\sigma}(x)\downarrow$ и либо $m(b,i,h_i(x),s+1) = -1$, либо $\varphi_{i,s+1}(m(b,i,h_i(x),s+1),h_i(x)) = 0$.

Полагаем $\Psi_i = \bigcup\limits_s \Psi_{i,s}$.

Теперь для каждого e определим множество $W_{g(e)}^{\varnothing'}$. Обозначим $A = V(a,e)$. Выберем произвольное натуральное число i. Ищем x, удовлетворяющий условию (a) или условию (b):

(a) $\Phi_x^A(x)\downarrow$ и либо $m(a,i,x) = -1$, либо $\varphi_i(m(b,i,x),x) = 0$,

(b) существует шаг s, для которого выполнены условия (b.1)–(b.4):

(b.1) $\Phi_{x,s}^A(x)\uparrow$,

(b.2) $m(b,i,x,s) = m(b,i,x) \neq -1$,

(b.3) $\varphi_i(m(b,i,x),x) = 1$,

(b.4) $m(b,i,h_i(x),s) = m(b,i,h_i(x))$.

Если такой x существует, то перечисляем i в $W_{g(e)}^{\varnothing'}$. Очевидно, что указанная процедура перечисления равномерна по e относительно $\varnothing'$. Докажем, что $M_e = W_{g(e)}^{\varnothing'}$. Пусть $i \in M_e$. Тогда найдем x, для которого выполнено условие (a) или условие (b). Следовательно, $i \in W_{g(e)}^{\varnothing'}$. Обратно, пусть $i \in W_{g(e)}^{\varnothing'}$. Предположим, что существует x, для которого выполнено условие (a) с рассматриваемым i. Тогда очевидно, что $i \in M_e$. Предположим теперь, что существует x, для которого выполнено условие (b) с рассматриваемым i. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Выполнено одно из двух условий:

1) $m(b,i,h_i(x)) \neq -1$ и $\varphi_i(m(b,i,h_i(x)),h_i(x)) = 0$,

2) $m(b,i,h_i(x)) = -1$.

Тогда либо $\Phi^A_{h_i(x)}(h_i(x))\uparrow$ и, следовательно, $\Phi^A_x(x)\uparrow$ и $A'(x) \neq V(b,i)(x)$, либо $\Phi^A_{h_i(x)}(h_i(x))\downarrow$ и тогда $A'(h_i(x)) \neq V(b,i)(h_i(x))$.

Случай 2. Выполнены два условия:
1) $m(b,i,h_i(x)) \neq -1$,
2) $\varphi_i(m(b,i,h_i(x)),h_i(x)) = 1$.
Тогда $\Phi^A_{h_i(x)}(h_i(x))\uparrow$ и $A'(h_i(x)) \neq V(b,i)(h_i(x))$.
Таким образом, как в первом, так и во втором случае $i \in M_e$. $\square$

Теорема 2. *Пусть даны Δ^0_2-вычислимые нумерации ν, μ. Тогда предикат*

$$P(e,i) \Leftrightarrow \nu(e)' \neq \mu(i)$$

является Σ^0_2-предикатом.

Доказательство. Пусть нумерация ν Σ^{-1}_a-вычислима и нумерация μ Σ^{-1}_b-вычислима. Выберем вычислимые функции f_ν, f_μ такие, что

$$\nu(x) = V(a, f_\nu(x)), \quad \mu(x) = V(b, f_\mu(x)).$$

Пусть функция g определена, как в лемме 1. Верны следующие импликации:

$$\nu(e)' \neq \mu(i) \Leftrightarrow V(a, f_\nu(e))' \neq V(b, f_\mu(i)) \Leftrightarrow f_\mu(i) \in W^{\varnothing'}_{g(f_\nu(e))}.$$

Следовательно, $P \in \Sigma^0_2$. $\square$

Следствие 3. *Пусть даны Δ^0_2-вычислимые нумерации ν, μ семейств множеств S и T соответственно. Тогда множество $\{x : \nu(x)' \in T\}$ является Σ^0_3-множеством.*

Доказательство. Пусть P — предикат из теоремы 2. Верны следующие импликации:

$$\nu(e)' \in T \Leftrightarrow \exists i(\nu(e)' = \mu(i)) \Leftrightarrow \exists i \neg P(e,i).$$

Значит, $\{x : \nu(x)' \in T\} \in \Sigma^0_3$. $\square$

Используя теоремы 2 и 4, можно доказать Σ^0_3-полноту индексного множества супернизких множеств. Обозначим $I(SL) = \{e : V(\omega, e)$ супернизкое$\}$. Напомним, что мы отождествляем ординалы, меньшие ω^2, с их обозначениями из O.

Теорема 4 [7]. *Множество $I_1(SL) = \{e : W_e$ супернизкое$\}$ Σ^0_3-полно.*

Следствие 5. *Множество $I(SL)$ Σ^0_3-полно.*

Доказательство. Пусть f — вычислимая инъективная функция такая, что $W_e = V(\omega, f(e))$ для всех e, и пусть d — вычислимая инъективная функция такая, что $e \in \varnothing'''$ для всех e тогда и только тогда, когда $f(e) \in I_1(SL)$. Тогда $e \in \varnothing'''$ в том и только в том случае, если $f(d(e)) \in I(SL)$. Таким образом, $\varnothing''' \leqslant_1 I(SL)$ посредством функции $f \circ d$. Покажем теперь, что $I(SL) \in \Sigma^0_3$. В следствии 3 положим S равным семейству всех супернизких множеств и $\nu(e)$ равным $V(\omega, e)$. В качестве T выберем класс всех ω-в. п. множеств и в качестве μ выберем какую-нибудь Δ^0_2-вычислимую нумерацию семейства всех ω-в. п. множеств (см. например [4]). Тогда $I(SL) = \{e : \nu(e)' \in T\} \in \Sigma^0_3$. $\square$

В следующей теореме представлено достаточное условие существования Σ^{-1}_a-вычислимой нумерации семейства $J_b(S)$ при фиксированных $a, b \in O$ и семействе S.

Теорема 6. *Пусть даны обозначения $a, b \in O$ такие, что $|a|_O > 0$, $|b|_O > 0$, и семейство множеств S, которое содержит все конечные множества. Тогда если семейство S имеет Σ_a^{-1}-вычислимую нумерацию, то семейство $J_b(S)$ также имеет Σ_a^{-1}-вычислимую нумерацию.*

Доказательство. Пусть ν — Σ_a^{-1}-вычислимая нумерация семейства S. По следствию 3 $\nu^{-1}(J_b(S)) = \{x : \nu(x)' \in \Sigma_b^{-1}\} \in \Sigma_3^0$. Выберем вычислимую функцию f такую, что

$$x \in \nu^{-1}(J_b(S)) \Leftrightarrow \exists y[W_{f(x,y)} = \omega], \quad x \notin \nu^{-1}(J_b(S)) \Leftrightarrow \forall y[W_{f(x,y)} \text{ конечно}].$$

Определим $B_{\langle x,y\rangle} = \nu(x) \cap W_{f(x,y)}$. Нумерация μ, определенная так: $\mu(\langle x, y\rangle) = B_{\langle x,y\rangle}$, будет Σ_a^{-1}-вычислимой нумерацией семейства $J_b(S)$. $\square$

Доказательство теоремы 6 почти аналогично доказательству теоремы из [8] о том, что если индексное множество семейства в. п. множеств принадлежит Σ_3^0-уровню и это семейство содержит все конечные множества, то оно равномерно в. п.

Следствие 7. *Существует Σ_ω^{-1}-вычислимая нумерация семейства всех супернизких множеств.*

Доказательство получается из теоремы 6 и результата из работы [9] о том, что если $X' \in \Sigma_\omega^{-1}$, то X супернизкое. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. I // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 3. С. 47–73.
2. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. II // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 15–47.
3. *Ершов Ю. Л.* Об одной иерархии множеств. III // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 1. С. 34–51.
4. *Арсланов М. М.* Иерархия Ершова. Казань: Казанский гос. университет, 2007.
5. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
6. *Carstens H. G.* Δ_2^0-mengen // Arch. Math. Log. Grundlagenforsch. 1976. Bd 18. S. 55–65.
7. *Nies A.* Reals which compute little // Lect. Notes Logic. 2002. V. 27. P. 261–275.
8. *Yates C. E. M.* On the degrees of index sets. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 249–266.
9. *Файзрахманов М. Х.* Тьюринговы скачки в иерархии Ершова // Алгебра и логика. (В печати).

Статья поступила 17 мая 2009 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Marat.Faizrahmanov@ksu.ru