*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 514.75*

# МИНИМАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

**И. П. Рыбников**

**Аннотация.** Предложен метод построения минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ в терминах функций Бейкера — Ахиезера алгебраических спектральных кривых.

**Ключевые слова:** лагранжево подмногообразие, функция Бейкера — Ахиезера.

## 1. Введение

В статье строятся минимальные лагранжевы погружения (**ML**-погружения) $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ с диагональной индуцированной метрикой в терминах функций Бейкера — Ахиезера алгебраических спектральных кривых. Эта работа является обобщением [1] с двумерного случая на многомерный.

**ML**-подмногообразия интересны как с точки зрения интегрируемых систем, так и с точки зрения их приложений к теории струн, точнее к зеркальной симметрии. В математическом описании зеркальной симметрии, предложенном в [2], **ML**-подмногообразия играют важную роль. В SYZ-теории зеркальная симметрия между многообразиями Калаби — Яу $L_1$ и $L_2$ объясняется в терминах двойственных трехмерных минимальных лагранжевых торов.

Для $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ теория **ML**-торов хорошо изучена. Первые явные примеры таких торов получены в [3]. В [4] найдены **ML**-конусы в $\mathbb{C}^3$, инвариантные относительно действия $U(1)$ (это эквивалентно построению поверхностей в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$). Конформная метрика ($ds^2 = 2e^w\,dzd\bar{z}$) **ML**-тора в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ удовлетворяет уравнению Цицейки:

$$w_{z\bar{z}} = e^{-2w} - e^w.$$

В [5] найдены квазипериодические решения этого уравнения и фактически формулы, полученные в этой работе, пригодны для построения всех **ML**-торов (см. [6, 7]).

В больших размерностях теория **ML**-подмногообразий менее развита. Такие подмногообразия описываются сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и большинство методов построения частных решений — это редукция к о.д.у (см., например, [8, 9]). Исключением является работа [10], где по пересечению вещественных квадрик в евклидовом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 09–01–00598) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ–7256.2010.1).

пространстве строятся минимальные и $H$-минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. В результате получены замкнутые подмногообразия сложной топологической структуры, которые классифицированы только в простых случаях.

В данной работе решаются уравнения в частных производных, описывающие **ML**-подмногообразия без редуцирования к о.д.у. Решения этих уравнений строятся с помощью модифицированной конструкции Кричевера построения плоских криволинейных ортогональных систем координат [11]. Искомое **ML**-отображение получается как композиция отображений $\mathscr{H}\circ\varphi$, где $\mathscr{H}$ — проекция Хопфа,

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to S^{2n+1}\subset\mathbb{C}^{n+1}.$$

Из лагранжевости и диагональности индуцированной метрики ($ds^2=2e^{v_1}\,dx_1^2+\dots+2e^{v_n}\,dx_n^2$, $2e^{v_i}=\langle\varphi_{x_i},\varphi_{x_i}\rangle$) вытекает, что $\varphi$ удовлетворяет уравнениям

$$\langle\varphi,\varphi_{x_1}\rangle=\dots=\langle\varphi,\varphi_{x_n}\rangle=\langle\varphi_{x_i},\varphi_{x_j}\rangle=0,\quad i\neq j. \tag{1}$$

Здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^{n+1}$. С помощью леммы 1 из класса лагранжевых отображений выделяются минимальные. Отображение $\varphi$ строится в терминах функции Бейкера — Ахиезера спектральной кривой. Для гладких спектральных кривых функция Бейкера — Ахиезера выражается через тэта-функцию многообразия Якоби кривой. Поэтому получаемое отображение, вообще говоря, квазипериодично. Периодичности можно добиться специальным выбором спектральных параметров.

В разд. 2 выписаны уравнения лагранжевых подмногообразий с диагональной метрикой, а также доказана лемма 1 — ключевая лемма в конструкции **ML**-подмногообразий. В разд. 3 кратко напоминается определение функции Бейкера — Ахиезера, с ее использованием строится отображение $\mathscr{H}\circ\varphi$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ и находятся ограничения на спектральные данные, при которых это отображение лагранжево. В разд. 4 находятся ограничения на спектральные данные из разд. 3, чтобы $\mathscr{H}\circ\varphi$ задавало минимальное лагранжевое отображение. В разд. 5 дан пример **ML**-отображения, построенного по спектральным данным приводимой алгебраической кривой, неприводимые компоненты которой изоморфны $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, в случае такой кривой отображения задаются в элементарных функциях.

Автор выражает благодарность А. Е. Миронову за постановку задачи и внимание к работе и Я. В. Базайкину за полезные обсуждения.

## 2. Уравнения минимальных лагранжевых подмногообразий с диагональной метрикой

Введем следующие обозначения:

$$|\varphi_{x_1}|^2=2e^{v_1(x)},\dots,|\varphi_{x_n}|^2=2e^{v_n(x)},\quad x=(x_1,\dots,x_n),$$

тогда из (1) следует, что матрица

$$\widetilde{\Phi}=\left(\varphi,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}}\varphi_{x_1},\dots,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_n}{2}}\varphi_{x_n}\right)^{\top}$$

принадлежит группе $U(n+1)$. Определим лагранжев угол $\beta(x)$:

$$e^{i\beta(x_1,\dots,x_n)}=\det\widetilde{\Phi}.$$

Через лагранжев угол выражается вектор средней кривизны $H$ лагранжева подмногообразия (см. [12]):

$$H = J\nabla\beta,$$

где $J$ — комплексная структура в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. В частности, если $\beta = \mathrm{const}$, то подмногообразие минимально.

Разложим вектор-функции $\varphi_{x_ix_j}$ по базису $\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}, \varphi$:

$$\varphi_{x_1x_1} = \Gamma^1_{11}\varphi_{x_1} + \dots + \Gamma^n_{11}\varphi_{x_n} + b_{11}\varphi, \dots,$$

$$\varphi_{x_ix_j} = \Gamma^1_{ij}\varphi_{x_1} + \dots + \Gamma^n_{ij}\varphi_{x_n} + b_{ij}\varphi, \dots,$$

$$\varphi_{x_nx_n} = \Gamma^1_{nn}\varphi_{x_1} + \dots + \Gamma^n_{nn}\varphi_{x_n} + b_{nn}\varphi.$$

Справедлива

**Лемма 1.** *Имеет место равенство*

$$\Gamma^1_{1i} + \dots + \Gamma^n_{ni} = \frac{1}{2}(v_{1x_i} + \dots + v_{nx_i}) - i\beta_{x_i}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1 & \dots & \dots & \dots & \varphi^{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi^1_{x_1} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi^{n+1}_{x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_n}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi^1_{x_n} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_n}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi^{n+1}_{x_n} \end{pmatrix} \in SU(n+1).$$

Матрица $\Phi$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Phi_{x_1} = A_1\Phi, \dots, \Phi_{x_n} = A_n\Phi, \tag{2}$$

где $A_1, \dots, A_n \in su(n+1)$ имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & ia^1_1 & & & & & \\ & & ia^1_2 & & & & * \\ & & \dots & & & & \\ & & & & \dots & & \\ & * & & & & \dots & \\ & & & & & & ia^1_n \end{pmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & ia^n_1 & & & & & \\ & & ia^n_2 & & & & * \\ & & \dots & & & & \\ & & & & \dots & & \\ & * & & & & \dots & \\ & & & & & & ia^n_n \end{pmatrix},$$

здесь $a^i_j(x)$ — некоторые вещественные функции, причем

$$a^i_n = -ia^i_1 - \dots - ia^i_{n-1}. \tag{3}$$

Мы ограничились выписыванием только диагональных элементов матриц $A_i$, поскольку только они понадобятся нам в дальнейшем.

Справедливо равенство

$$\Gamma^1_{1i} = ia^i_1 + \frac{1}{2}v_{1x_i} - i\frac{\beta_{x_i}}{n}.$$

Действительно, из (2) следует, что

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi_{x_1}\right)_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{v_{1x_i}}{2} + i\frac{\beta_{x_i}}{n}\right)e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi_{x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi_{x_1x_i}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}ia^i_1 e^{-\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{n}}\varphi_{x_1},$$

откуда вытекает требуемое равенство. Аналогично получаем

$$\Gamma^j_{ji} = ia^i_j + \frac{1}{2}v_{jx_i} - i\frac{\beta_{x_i}}{n}.$$

Значит,

$$\Gamma^1_{1i} + \dots + \Gamma^n_{ni} = i\big(a^i_1 + \dots + a^i_n\big) + \frac{1}{2}(v_{1x_i} + \dots + v_{nx_i}) - i\beta_{x_i}.$$

Из (3) приходим к утверждению леммы 1.

Лемма 1 влечет следующий критерий минимальности.

**Следствие 1.** *Если* $\mathrm{Im}\big(\Gamma^1_{1i}+\dots+\Gamma^n_{ni}\big) = 0$, *то подмногообразие минимально.*

## 3. Лагранжевы погружения

**3.1. Функция Бейкера — Ахиезера.** Кратко напомним определение $n$-точечной функции Бейкера — Ахиезера. Функция Бейкера — Ахиезера строится по набору спектральных данных $\{\Gamma, P, \gamma, r, k_1^{-1}, \dots, k_n^{-1}\}$, где $\Gamma$ — риманова поверхность рода $g$, $P = P_1 + \dots + P_n$, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — два дивизора на $\Gamma$, $r \in \Gamma$ — фиксированная точка, $k_i^{-1}$ — локальные параметры в окрестностях $P_i$. Тогда $n$-точечная функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x, P)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $P \in \Gamma$, обладает следующими свойствами:

1) в окрестностях $P_j$ функция $\psi$ имеет существенные особенности:

$$\psi = e^{ik_jx_j}\left(f_j(x) + \frac{g_j(x)}{ik_1} + \frac{h_j(x)}{k_1^2} + \dots\right);$$

2) $\psi$ мероморфна на $\Gamma \setminus \{\bigcup P_i\}$ с простыми полюсами в точках $\gamma_j$, $j = 1, \dots, g$;

3) выполнено условие нормировки $\psi(x, r) = d$, $d \in \mathbb{C}$.

Для спектральных данных общего положения существует единственная функция Бейкера — Ахиезера. Отметим, что функцию Бейкера — Ахиезера явным образом можно выразить через тэта-функцию поверхности $\Gamma$ (см. [10]).

**3.2. Условие лагранжевости.** Введем следующие функции:

$$\varphi^i = \alpha_i\psi(x, Q_i),$$

где $Q_1, \dots, Q_{n+1} \in \Gamma$, $\alpha_i$ — константы. В этом разделе найдены ограничения на спектральные данные, при которых вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^{n+1})$ задает лагранжево погружение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{CP}^n$.

Пусть для поверхности $\Gamma$ существует антиголоморфная инволюция $\mu$, для которой точки $P_1, \dots, P_n$ неподвижны и

$$k_i(\mu(P)) = \bar{k}_i(P).$$

Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Пусть $Q_1,\dots,Q_n,r$ — неподвижные точки $\mu$. Предположим, что на $\Gamma$ существует мероморфная 1-форма $\Omega$ со следующими дивизорами нулей и полюсов:*

$$(\Omega)_0=\gamma+\mu\gamma+P_1+\dots+P_n,\quad (\Omega)_\infty=Q_1+\dots+Q_{n+1}+r.$$

*Тогда функции $\varphi^i$ удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\varphi^1\overline{\varphi}^1A_1+\dots+\varphi^n\overline{\varphi}^nA_n+|d|^2\operatorname{Res}_r\Omega=0, \tag{4}$$

$$\varphi^1\overline{\varphi}^1{}_{x_i}A_1+\dots+\varphi^n\overline{\varphi}^n{}_{x_i}A_n=0, \tag{5}$$

$$\varphi^1_{x_i}\overline{\varphi}^1{}_{x_j}A_1+\dots+\varphi^n_{x_i}\overline{\varphi}^n{}_{x_j}A_n=0,\quad i\neq j, \tag{6}$$

$$\varphi^1_{x_i}\overline{\varphi}^1{}_{x_i}A_1+\dots+\varphi^n_{x_i}\overline{\varphi}^n{}_{x_i}A_n+|f_i|^2c_i=0,\quad i=1,\dots,n, \tag{7}$$

*где $A_k=\frac{\operatorname{Res}_{Q_k}\Omega}{|\alpha_k|^2}$, $k=1,\dots,(n+1)$, $c_1,\dots,c_n$ — коэффициенты разложения формы $\Omega$ в окрестностях $P_1,\dots,P_n$:*

$$\Omega=\big(c_1w_1+a_1w_1^2+\dots\big)\,dw_1,\quad w_1=1/k_1,\quad \dots,$$

$$\Omega=\big(c_nw_n+a_nw_n^2+\dots\big)\,dw_n,\quad w_n=1/k_n.$$

Доказательство. Рассмотрим 1-форму

$$\Omega_1=\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))}\Omega.$$

Из определения функции Бейкера — Ахиезера и антиголоморфности инволюции $\mu$ вытекают следующие разложения в точках $P_1,\dots,P_n$:

$$\overline{\psi(\mu(P))}=e^{-ik_1x_1}\left(\bar f_1(x)-\frac{\bar g_1(x)}{ik_1}+\frac{\bar h_1(x)}{k_1^2}+\dots\right),\quad \dots,$$

$$\overline{\psi(\mu(P))}=e^{-ik_nx_n}\left(\bar f_n(x)-\frac{\bar g_n(x)}{ik_n}+\frac{\bar h_1(x)}{k_n^2}+\dots\right).$$

Видно, что форма $\Omega_1$ не будет иметь существенных особенностей в точках $P_1,\dots,P_n$, а простые полюсы $\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))}$ и нули $\Omega$ сократятся. У $\Omega_1$ останутся только простые полюсы в точках $Q_1,\dots,Q_{n+1}$, $r$. Они равны соответственно $\varphi^1\overline{\varphi}^1A_1,\dots,\varphi^n\overline{\varphi}^nA_n$, $|d|^2\operatorname{Res}_r\Omega$. Из равенства нулю их суммы следует (1).

Формы $\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))}_{x_i}\Omega$, $\psi(P)_{x_i}\overline{\psi(\mu(P))}_{x_j}\Omega$ также имеют только простые полюсы в $Q_1,\dots,Q_{n+1}$ и не имеют существенных особенностей в $P_1,\dots,P_n$. Эти полюсы равны соответственно $\varphi^1\bar\varphi^1_{x_i}A_1,\dots,\varphi^n\bar\varphi^n_{x_i}A_n$, $\varphi^1_{x_i}\bar\varphi^1_{x_j}A_1,\dots,\varphi^n_{x_i}\bar\varphi^n_{x_j}A_n$, $i\neq j$. Равенство нулю их суммы доказывает (3) и (4). Для доказательства (5) нужно рассмотреть формы $\psi(P)_{x_i}\overline{\psi(\mu(P))}_{x_i}\Omega$. У этих форм только простые полюсы в точках $Q_1,\dots,Q_{n+1}$, $P_i$ с вычетами $\varphi^1_{x_i}\bar\varphi^1_{x_i}A_1,\dots,\varphi^n_{x_i}\bar\varphi^n_{x_i}A_n$, $|f_i|^2c_i$. Теорема 1 доказана.

**Следствие 2.** *Если $\operatorname{Res}_{Q_i}\Omega>0$, $\alpha_i=\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_i}\Omega}$, $d=\frac{i}{\sqrt{\operatorname{Res}_r\Omega}}$, то равенства (1) выполнены и $\langle\varphi,\varphi\rangle=1$, $\langle\varphi_{x_i},\varphi_{x_i}\rangle=\big|f_i^2\big||c_i|$. Следовательно, $\mathscr{H}\circ\varphi$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}P^n$ — лагранжево отображение, и индуцированная метрика имеет вид*

$$ds^2=|f_1|^2|c_1|\,dx_1^2+\dots+|f_n|^2|c_n|\,dx_n^2.$$

Далее будем полагать, что $\operatorname{Res}_{Q_i}\Omega>0$.

## 4. Минимальные лагранжевы погружения

В этом разделе найдем ограничение на спектральные данные, при котором погружение $\varphi$, построенное в предыдущем разделе, минимально.

Пусть поверхность $\Gamma$ имеет голоморфную инволюцию $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ с неподвижными точками $P_i$. Обозначим через $\tau$ композицию $\mu\sigma$.

Найдем ограничения на спектральные данные, чтобы функции $f_i, g_i$, участвующие в разложении функции $\psi$ в окрестностях $P_i$, были вещественны.

**Лемма 2.** *Пусть $\tau(\gamma) = \gamma,\ \tau(r) = r,\ d \in \mathbb{R}$. Тогда $\psi(x, \tau(P)) = \overline{\psi(x, P)}$.*

Доказательство. Заметим, что функция $\overline{\psi(x, \tau(P))}$ является функцией Бейкера — Ахиезера с теми же спектральными данными, что и $\psi(x, P)$, а следовательно, эти функции совпадают в силу единственности. Лемма 2 доказана.

Из этой леммы следует, что $f_i, g_i$ вещественны.

Рассмотрим функции

$$F_{ij} = \partial^2_{x_i x_j}\psi + \Gamma^1_{ij}\partial_{x_1}\psi + \dots + \Gamma^n_{ij}\partial_{x_n}\psi + b_{ij}\psi, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Выберем $\Gamma^k_{ij}(x)$ и $b_{ij}$ так, чтобы

$$F_{ij}(x, Q_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Такие $\Gamma^k_{ij}$ и $b_{ij}$ существуют в силу равенств (1).

**Лемма 3.** *Справедливы равенства*

$$\Gamma^k_{kk} = -i\frac{a_k}{c_k} - \frac{f_{k x_k}}{f_k}, \quad \Gamma^k_{ki} = -\frac{f_{k x_i}}{f_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим форму $w_{kk} = F_{kk}(P)\psi(\sigma(P))_{x_k}\Omega$. Она не имеет существенных особенностей в точках $P_i$ при $i \neq k$, а в точке $P_k$ имеет полюс второго порядка

$$\operatorname{Res}_{P_k} w_{kk} = f_k\big((ia_k + c_k\Gamma^k_{kk})f_k + c_k f_{k x_k}\big) = 0.$$

Отсюда следует формула для $\Gamma^k_{kk}$. Для $\Gamma^k_{ki}$ доказательство аналогично, только нужно рассматривать формы $F_{ki}(P)\psi(\sigma(P))_{x_k}\Omega$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует равенство

$$\Gamma^1_{1i} + \dots + \Gamma^n_{ni} = -\frac{ia_i}{c_i} - \frac{f_{1 x_i}}{f_1} - \dots - \frac{f_{n x_i}}{f_n}.$$

Таким образом, если в разложении формы $\Omega$ в окрестностях $P_i$ коэффициенты при $w_i^2\,dw_i$ равны 0, то по следствию 1 отображение минимально.

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему результату.

**Теорема 2.** *Пусть спектральная кривая $\Gamma$ имеет антиголоморфную инволюцию $\mu : \Gamma \to \Gamma$ с фиксированными точками $Q_1, \dots, Q_{n+1}, P_1, \dots, P_n$ и мероморфной 1-формой со следующими дивизорами нулей и полюсов:*

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + \dots + P_n, \quad (\Omega)_\infty = Q_1 + \dots + Q_{n+1} + r,$$

*и пусть $\operatorname{Res}_{Q_i}\Omega > 0$. Тогда $\mathscr{H} \circ \varphi$ задает лагранжево отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.*

*Если, кроме того, существует голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ с неподвижными точками $P_i$ такая, что $\mu(\gamma) = \sigma(\gamma)$, $\tau(r) = r$, $d \in \mathbb{R}$ и форма $\Omega$ имеет следующие разложения в окрестностях $P_i$:*

$$\begin{aligned} \Omega &= \big(c_1 w_1 + d_1 {w_1}^3 + \dots\big)\,dw_1, \quad w_1 = 1/k_1,\\ \Omega &= \big(c_n w_n + d_n {w_n}^3 + \dots\big)\,dw_n, \quad w_n = 1/k_n, \end{aligned} \tag{8}$$

*то отображение минимально.*

## 5. Пример

В этом разделе разобран пример с приводимой спектральной кривой рода 2, по которой будет построено минимальное лагранжевое отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{C}P^3$. Теорема 2 легко переносится на случай приводимой спектральной кривой по схеме работы [13]. Пусть $\Gamma$ — приводимая кривая с неприводимыми компонентами $\Gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, изоморфными $\mathbb{C}P^1$. Под родом в определении функции Бейкера — Ахиезера будет подразумеваться арифметический род кривой (см. [13]). Дифференциал $\Omega$ из теоремы 2 задается мероморфными 1-формами $\Omega_i$, определенными на $\Gamma_i$. Полюсы этих форм находятся в точках пересечения $\Gamma_i$. Также должны быть выполнены условия регулярности: если компоненты $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ пересекаются в точке $P$, то

$$\mathrm{Res}_P\,\Gamma_i + \mathrm{Res}_P\,\Gamma_j = 0.$$

Арифметический род кривой $\Gamma$ равен размерности пространства регулярных дифференциалов, а число полюсов $\gamma_i$, в определении функции Бейкера — Ахиезера, должно совпадать с арифметическим родом кривой $\Gamma$.

Пусть кривая $\Gamma$ состоит из компонент, пересекающихся, как показано на рис. 1. Пусть $z_1$ — координата на первой компоненте, $z_2$ — координата на второй, $z_3$ — на третьей. Пусть точки пересечения первых двух компонент имеют координаты $a$, $-a$, $b$, $-b$ соответственно на первой и второй компонентах, а точки пересечения второй и третьей компоненты имеют координаты $c$, $-c$, $l$, $-l$ соответственно. Точки $a, b, c, l$ подразумеваются вещественными.

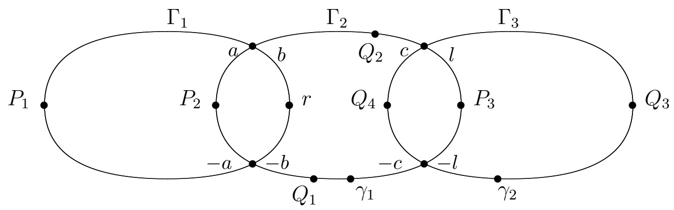


Рис. 1.

Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad P_3 = 0 \in \Gamma_2, \quad r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1, Q_2 \in \Gamma_2, \quad Q_3, Q_4 \in \Gamma_3, \quad Q_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1 \in \Gamma_2, \quad \gamma_2 \in \Gamma_3, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in i\mathbb{R}.$$

На кривой $\Gamma$ задана голоморфная инволюция:

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z_1) = -z_1, \quad \sigma(z_2) = -z_2, \quad \sigma(z_3) = -z_3,$$

и антиголоморфная инволюция:

$$\mu : \Gamma \to \Gamma, \quad \mu(z_1) = \bar{z}_1, \quad \mu(z_2) = \bar{z}_2, \quad \mu(z_3) = \bar{z}_3.$$

Мероморфная форма $\Omega$ задается формами $\Omega_i$ на компонентах $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$:

$$\Omega_1 = \frac{dz_1}{z_1(-a^2 + z_1^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{s_2 z_2\big(z_2^2 - \gamma_1^2\big)\,dz_2}{(z_2 - Q_1)(z_2 - Q_2)\big(z_2^2 - b^2\big)\big(z_2^2 - c^2\big)},$$

$$\Omega_3 = \frac{s_3\big(z_3^2 - \gamma_2^2\big)}{(z_3 - Q_3)(z_3 - Q_4)\big(z_3^2 - l^2\big)}.$$

Выпишем условия регулярности:

$$\operatorname{Res}_a \Omega_1 + \operatorname{Res}_b \Omega_2 = 0, \quad \operatorname{Res}_{-a} \Omega_1 + \operatorname{Res}_{-b} \Omega_2 = 0,$$

$$\operatorname{Res}_c \Omega_2 + \operatorname{Res}_l \Omega_3 = 0, \quad \operatorname{Res}_{-c} \Omega_2 + \operatorname{Res}_{-l} \Omega_3 = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$s_2 = -\frac{(b^2 - c^2)(b^2 - Q_1^2)}{\left(a^2(b^2 - \gamma_1^2)\right)}, \quad Q_1 = -Q_2,$$

$$s_3 = \frac{l^2(c^2 - \gamma_1^2)(b^2 - Q_1^2)(l^2 - Q_4^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(\gamma_2^2 - l^2)(c^2 - Q_1^2)}, \quad Q_3 = -\frac{l^2}{Q_4}.$$

Далее потребуем выполнение условий (8), чтобы отображение было минимально. Из этих условий получаем $Q_3 = 0$, поэтому $Q_4 = \infty$.

Далее,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega_2} = \frac{(b^2 - c^2)(\gamma_1^2 - Q_1^2)}{2a^2(b^2 - \gamma_1^2)(c^2 - Q_1^2)},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\operatorname{Res}_0 \Omega_3} = \sqrt{-\frac{(-c^2 + \gamma_1^2)\gamma_2^2(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(\gamma_2^2 - l^2)(c^2 - Q_1^2)}},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\operatorname{Res}_\infty \Omega_3} = \sqrt{-\frac{(-c^2 + \gamma_1^2)l^2(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(-\gamma_2^2 + l^2)(c^2 - Q_1^2)}}.$$

Подберем параметры так, чтобы $\alpha_1$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ были положительными. Пусть, например, $a = c = l = 1$, $b = 2$, $Q_1 = 3$, $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = i$.

Функция Бейкера — Ахиезера $\psi$ определяется функциями $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ на компонентах $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$:

$$\psi_1 = e^{ixz_1} f_1(x, y, z), \quad \psi_2 = e^{iyz_2 + i\frac{z}{z_2}} \left(f_2(x, y, z) + \frac{g_2(x, y, z)}{z_2 - \gamma_1}\right),$$

$$\psi_3 = f_3(x, y, z) + \frac{g_3(x, y, z)}{z_3 - \gamma_2}.$$

Функции $f_1$, $f_2$, $f_3$, $g_2$, $g_3$, находятся из условий согласованности

$$\psi_1(x, y, z, a) = \psi_2(x, y, z, b), \quad \psi_1(x, y, z, -a) = \psi_2(x, y, z, -b),$$

$$\psi_2(x, y, z, c) = \psi_3(x, y, z, l), \quad \psi_2(x, y, z, -c) = \psi_3(x, y, z, -l)$$

и условия нормировки

$$\psi_1(x, y, z, 0) = d,$$

причем

$$d = \sqrt{\frac{1}{|\operatorname{Res}_0 \Omega_1|}} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) =& 1, \\
f_2(x, y, z) =& \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2} i(2x + 4y + z)} (i(-e^{2ix} + e^{i(4y+z)}) + 2(e^{2ix} + e^{i(4y+z)})), \\
f_3(x, y, z) =& \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2} i(2x + 6y + 3z)} ((-2 + i)e^{2ix} + (6 - 3i)e^{2i(x+y+z)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (2+i)e^{3i(2y+z)} + (6+3i)e^{i(4y+z)}),\\
g_2(x,y,z) =& \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}i(2x+4y+z)}(e^{2ix} - e^{i(4y+z)}),\\
g_3(x,y,z) =& \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)}((1-3i)e^{2ix} + (9+3i)e^{2i(x+y+z)}\\
&\quad - (1+3i)e^{3i(2y+z)} - (9-3i)e^{i(4y+z)}).
\end{aligned}
$$

Искомое отображение имеет вид

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 =& \left(\frac{1}{16} + \frac{i}{16}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{6}i(6x-6y+z)}((3-4i)e^{2ix} + e^{i(4y+z)}),\\
\varphi_2 =& \left(\frac{1}{16} - \frac{i}{16}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{6}i(6x+5(6y+z))}(e^{2ix} + (3+4i)e^{i(4y+z)}),\\
\varphi_3 =& \frac{1}{16\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)}((1+2i)e^{2ix} + (3+6i)e^{2i(x+y+z)}\\
&+ (1-2i)e^{3i(2y+z)} + (3-6i)e^{i(4y+z)}),\\
\varphi_4 =& \frac{1}{16\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)}((-2+i)e^{2ix} + (6-3i)e^{2i(x+y+z)}\\
&- (2+i)e^{3i(2y+z)} + (6+3i)e^{i(4y+z)}).
\end{aligned}
$$

Лагранжев угол и индуцированная метрика имеют вид

$$e^{i\beta} = -i,$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 = dx^2 + \frac{3}{4}(2\cos(x-2y-z/2) + \sin(x-2y-z/2))^2\,dy^2&\\
+ \frac{1}{12}(\cos(x-2y-z/2) - 2\sin(x-2y-z/2))^2\,dz^2&.
\end{aligned}
$$

Секционная кривизна полученного подмногообразия тождественно равна 1, вторая фундаментальная форма равна 0, т. е. погружение вполне геодезическое. Следовательно, построенное подмногообразие — это $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Mironov A. E.* Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ // OCAMI (Osaka City University Advanced Mathematical Institute) Studies Ser. 2010. V. 3. P. 185–196.
2. *Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E.* Mirrow symetry is $T$-duality // Nucl. Phys. 1996. V. B479. P. 243–259.
3. *Castro I., Urbano F.* New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane // Manuscr. Math. 1994. V. 85, N 3–4. P. 265–281.
4. *Haskins M.* Special Lagrangian cones // Amer. J. Math. 2004. V. 126, N 4. P. 845–871.
5. *Шарипов Р. А.* Минимальные торы в пятимерной сфере // Теорет. и мат. физика. 1991. Т. 87, № 1. С. 48–56.
6. *Hui Ma, Yujie Ma.* Totally real minimal tori in $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ // Math. Z. 2005. Bd 249, Heft 2. S. 241–267.
7. *Carberry E., McIntosh I.* Minimal Lagrangian 2-tori in $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ come in real families of every dimension // J. London Math. Soc. 2004. V. 69. P. 531–544.
8. *Миронов А. Е.* Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 3. С. 374–384.
9. *Joyce D.* Special Lagrangian $m$-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries // Duke Math. J. 2002. V. 115, N 1. P. 1–51.

**10.** *Миронов А. Е.* О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 89–102.

**11.** *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрические $n$-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 1. С. 32–50.

**12.** *Wolfson J.* Minimal Lagrangian diffeomorfisms and the Monge–Ampere equation // J. Differ. Geometry. 1997. V. 46. P. 335–373.

**13.** *Миронов А. Е., Тайманов И. А.* Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2006. Т. 255. С. 180–196.

*Статья поступила 12 октября 2010 г.*

Рыбников Иван Павлович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ivan.p.rybnikov@gmail.com