Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

А. И. Двирный, В. И. Слынько

Аннотация. Предложен новый подход к построению кусочно дифференцируемой функции Ляпунова для некоторых классов нелинейных нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критическом случае. Предложенный подход позволил получить новые достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений этого класса систем.

Ключевые слова: уравнение с импульсным воздействием, критический случай, устойчивость по Ляпунову.

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием являются современным направлением в теории дифференциальных уравнений, которое имеет приложения к задачам математического моделирования в механике, технике и математической биологии [1–3]. Важной проблемой для этого класса систем является проблема устойчивости решений. Основы теории устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изложены в монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [4]. Там же развит прямой метод Ляпунова для этого класса систем. Некоторые из соответствующих результатов обобщены в монографии [5] с использованием кусочно дифференцируемых вспомогательных функций. В работах [6, 7] показана универсальность прямого метода Ляпунова в этом классе вспомогательных функций. В работе [8] получены условия устойчивости решений нелинейной системы с импульсным воздействием на основе двух вспомогательных функций. Показано, что полученные условия устойчивости обобщают теоремы из монографии [4].

Актуальной и важной с практической точки зрения является задача об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. В работе [9] рассматривается вопрос об обобщении принципа сведения для некоторых классов систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Этот принцип, являясь важным инструментом при исследовании критических случаев, фактически сводит изучение системы дифференциальных уравнений к изучению качественного поведения этой системы на центральном многообразии. Изучение же свойств системы дифференциальных уравнений на центральном многообразии требует определенного искусства исследователя, поскольку здесь нет общих методов исследования. Таким образом, не существует общего подхода к анализу поведения решений в том случае, когда все переменные «критические».

Целью настоящей работы является исследование именно этого, наиболее трудного критического случая. В основу предлагаемого подхода в связи с задачей исследования положен прямой метод Ляпунова с указанием специально сконструированной функции Ляпунова. Это позволяет, в частности, изучать системы дифференциальных уравнений без линейного приближения.

Отметим, что в случае, когда система дифференциальных уравнений возмущенного движения с импульсным воздействием периодична, устойчивость ее тривиального решения может быть изучена при помощи отображений Пуанкаре [10]. Однако такое исследование даже в случае систем невысокого порядка требует достаточно громоздких вычислений [11, 12]. Следовательно, и в этом случае получение условий устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является весьма актуальной задачей. Вместе с тем в случае обыкновенных уравнений значительное продвижение в исследовании существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений зафиксировано в результатах, достигнутых в [13] и развитых в работе [14].

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x),\ t \neq \tau_k, \quad x(t_0) = x_0,\\ \Delta x = Bx + g_k(x), \quad t = \tau_k,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta x = x(t+0) - x(t)$, $f(t,0) = 0$, $g_k(0) = 0$, $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $g_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Моменты импульсного воздействия удовлетворяют двусторонней оценке

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty.$$

Предполагается, что для задачи Коши (1.1) выполняются условия, гарантирующие существование единственного решения [4].

Рассмотрим линейное приближение системы (1.1):

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq \tau_k, \quad x(t_0) = x_0,\\ \Delta x = Bx, \quad t = \tau_k,\end{gathered} \tag{1.2}$$

и обозначим через $\Omega(t,t_0)$ матрицант этой системы. При этом будем предполагать, что выполняются оценки

$$\sup_{t\geq t_0} \|\Omega(t,t_0)\| \leq c_1(t_0), \quad \sup_{t\geq t_0} \|\Omega^{-1}(t,t_0)\| \leq c_2(t_0).$$

В системе (1.1) сделаем замену переменных $x(t) = \Omega(t,t_0)y(t)$. Тогда нелинейная система (1.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = \Omega^{-1}(t,t_0)f(t,\Omega(t,t_0)y),\ t \neq \tau_k, \quad y(t_0) = y_0 = x_0,\\ \Delta y = \Omega^{-1}(\tau_k,t_0)g_k(\Omega(\tau_k,t_0)y), \quad t = \tau_k.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Предположим, что правые части системы (1.3) допускают псевдолинейное представление в виде

$$\Omega^{-1}(t,t_0)f(t,\Omega(t,t_0)y) = C(t,y)y, \quad \Omega^{-1}(\tau_k,t_0)g_k(\Omega(\tau_k,t_0)y) = D_k(y)y.$$

При этом относительно элементов матрицы $C(t,y)$ предположим дополнительно, что существует инвариантная во времени окрестность U точки $y=0$ такая, что

1) для некоторых постоянных $\gamma_1>0$ и $\nu_1\in(0,\infty)$ выполняется неравенство $|c_{ij}(t,y)|\le\gamma_1\|y\|^{\nu_1}$ при всех $y\in U$;

2) при всех $y\in U$ существуют производная Эйлера $D_yC(t,y)$ и постоянные $\gamma_2>0$ и $\nu_2\in(-1,\infty)$ такие, что

$$|D_{y_k}c_{ij}(t,y)|\le\gamma_2\|y\|^{\nu_2}\quad \text{при всех } y\in U,\ i,j,k=1,2,\dots,n.$$

Далее рассмотрим вопрос о связи задачи об устойчивости тривиального состояния равновесия $x=0$ системы (1.1) и состояния равновесия $y=0$ системы (1.3).

Лемма 1.1. *Предположим, что состояние равновесия $y=0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (1.3)

1) *устойчиво по Ляпунову;*

2) *равномерно устойчиво по Ляпунову и постоянные $c_i(t_0)$, $i=1,2$, можно выбрать независимо от t_0;*

3) *асимптотически устойчиво по Ляпунову;*

4) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову и постоянные $c_i(t_0)$, $i=1,2$, можно выбрать независимо от t_0.*

Тогда состояние равновесия $x=0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1)

1) *устойчиво по Ляпунову;*

2) *равномерно устойчиво по Ляпунову;*

3) *асимптотически устойчиво по Ляпунову;*

4) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство очевидно.

2. Основная теорема. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.3) в псевдолинейной форме

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt}=C(t,y)y,\ t\ne\tau_k,\quad y(t_0)=y_0,\\ \Delta y=D_k(y)y,\quad t=\tau_k.\end{gathered}\tag{2.1}$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

$$\frac{dz}{dt}=-C^T(t,p)z,\quad z(t_0)=z_0.\tag{2.2}$$

Обозначим через $Y(t;t_0,p)$ матрицант системы (2.2).

Лемма 2.1. *Для матрицанта $Y(t;s,p)$ системы* (2.2) *при всех $p\in U$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\|Y(t;s,p)\|\le\sqrt{n}e^{Tn\gamma_1\|p\|^{\nu_1}},\quad 0\le t-s\le T,\\ \left\|\frac{\partial Y(t;s,p)}{\partial p_i}\right\|\le n^2\gamma_2Te^{2Tn\gamma_1\|p\|^{\nu_1}}\|p\|^{\nu_2},\quad 0\le t-s\le T,\end{gathered}\tag{2.3}$$

где $\|\cdot\|$ — норма Шмидта соответствующей матрицы.

Доказательство. Из свойств матрицанта следует, что

$$Y(t;s,p) = I - \int\limits_s^t C^T(\tau,p)Y(\tau;s,p)\,d\tau,$$

и в силу неравенства Гронуолла — Беллмана

$$\|Y(t;s,p)\| \le \sqrt{n}e^{\int\limits_s^t \|C(\tau,p)\|d\tau} \le \sqrt{n}e^{Tn\gamma_1\|p\|^{\nu_1}}.$$

Применяя теорему о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру, получим

$$\left\|\frac{\partial Y(t;s,p)}{\partial p_i}\right\| \le \left\|\int\limits_s^t Y(t;\tau,p)\frac{\partial C^T(\tau,p)}{\partial p_i}Y(\tau,s,p)d\tau\right\| \le n^2\gamma_2 Te^{2Tn\gamma_1\|p\|^{\nu_1}}\|p\|^{\nu_2}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $K(r)$ открытый шар радиуса r с центром в начале координат.

Лемма 2.2. *Пусть $\tilde{y}(t;t_0,y_0)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = C(t,\tilde{y})\tilde{y}, \quad \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0.$$

Тогда для всех $\tilde{y}_0 \in K(re^{-n\gamma_1 r^{\nu_1}T})$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{y}(t;t_0,y_0)\| \le \|\tilde{y}_0\|e^{n\gamma_1 r^{\nu_1}(t-t_0)}, \quad 0 \le t-t_0 \le T. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $t^* \in [t_0, t_0+T]$ — момент времени такой, что $\|\tilde{y}(t;t_0,y_0)\| < r$ при $t \in [t_0,t^*)$, $\|\tilde{y}(t^*;t_0,y_0)\| = r$. Тогда

$$\|\tilde{y}(t;t_0,\tilde{y}_0)\| \le \|\tilde{y}_0\| + \int\limits_{t_0}^t \|C(t,\tilde{y}(s;t_0,\tilde{y}_0))\|\|\tilde{y}(s;t_0,\tilde{y}_0)\|\,ds$$

$$\le \|\tilde{y}_0\| + n\gamma_1\int\limits_{t_0}^t r^{\nu_1}\|\tilde{y}(s;t_0,\tilde{y}_0)\|\,ds$$

при всех $t \in [t_0,t^*]$. Применяя лемму Гронуолла — Беллмана, имеем

$$\|\tilde{y}(t;t_0,\tilde{y}_0)\| \le \|\tilde{y}_0\|e^{n\gamma_1(t-t_0)r^{\nu_1}}, \quad t \in [t_0,t^*],$$

откуда при $t = t^*$ получим $\|\tilde{y}(t^*;t_0,\tilde{y}_0)\| < r$. Полученное противоречие доказывает, что $\|\tilde{y}(t^*;t_0,\tilde{y}_0)\| < r$ при всех $t \in [t_0,t_0+T]$, и повторное применение леммы Гронуолла — Беллмана завершает доказательство леммы.

Рассмотрим вопрос о построении кусочно дифференцируемой функции Ляпунова для исследования устойчивости решения $y = 0$ системы (2.1). Для этого введем в рассмотрение функцию $v(t,y) = y^TP(t,y)y$ в виде псевдоквадратичной формы, где матрица $P(t,y)$ определяется по формуле

$$P(t,y) = Y(t;\tau_k,y)XY^T(t;\tau_k,y) - \int\limits_{\tau_k}^t Y(s;\tau_k,y)Q(y)Y^T(s;\tau_k,y)\,ds, \quad t \in (\tau_k,\tau_{k+1}],$$

X — симметричная положительно определенная матрица, $Q(y)$ — симметричная положительно определенная дифференцируемая в окрестности U матрица-функция.

Теорема 2.1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (2.1) *такая, что существует положительно-определенная матрица* X, *для которой выполняются неравенства*

$$y^T((I+D_{k+1}(y))^T X(I+D_{k+1}(y)) - Y(\tau_{k+1};\tau_k,y)XY^T(\tau_{k+1};\tau_k,y))y \\ \le -\delta(\|y\|)\|y\|^2, \quad (2.5)$$

где $y \in U$, $k = 1,2,\ldots$, *а* $\delta(r)$ — *дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\delta'(r)r^{1+\nu_1}}{\delta(r)} = 0, \quad \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{1+\nu_1+\nu_2}} = \infty, \quad 1+\nu_1+\nu_2 > 0.$$

Тогда состояние равновесия $y=0$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть r — положительное число такое, что $K(r)\subset U$, и при всех $y\in K(r)$ выполняются неравенства

$$\frac{4\gamma_1\gamma_2\theta_2^2 n^{11/2}e^{5\gamma_1 n\theta_2\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{1+\nu_1+\nu_2}}{\delta(\|y\|)} < \frac{1}{5},$$

$$2\theta_2 n^{9/2}\gamma_1\gamma_2 e^{3\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{1+\nu_1+\nu_2} < \frac{1}{5}, \quad 2n^3\gamma_1^2\theta_2^2\nu_1 e^{2\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{2\nu_1} < \frac{1}{5},$$

$$\frac{\gamma_1\theta_2 n^3\|y\|^{1+\nu_1}\delta'(\|y\|)e^{2\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}}{\delta(\|y\|)} < \frac{1}{5}.$$

Пусть $y\in K(r)$, $t\in(\tau_k,\tau_{k+1})$. Тогда с учетом предположений относительно матрицы $C(t,y)$ имеем

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} &= y^T\left(C^T(t,y)P(t,y) + P(t,y)C(t,y) + \frac{\partial P(t,y)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P(t,y)}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt}\right)y \\ &= -y^TQ(y)y + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}c_{kr}(t,y)y_r y^T\frac{\partial P(t,y)}{\partial y_k}y \\ &\le -y^TQ(y)y + \sqrt{n}\gamma_1\sum_{k=1}^{n}\|y\|^{3+\nu_1}\left\|\frac{\partial P(t,y)}{\partial y_k}\right\|.\end{aligned}$$

Согласно лемме 2.1 получим

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial P(t,y)}{\partial y_k}\right\| = \Bigg\| &\frac{\partial Y(t;\tau_k,y)}{\partial y_k}XY^T(t;\tau_k,y) + Y(t;\tau_k,y)X\frac{\partial Y^T(t;\tau_k,y)}{\partial y_k} \\ &- \int_{\tau_k}^{t}\left(\frac{\partial Y(s;\tau_k,y)}{\partial y_k}Q(y)Y^T(s;\tau_k,y) + Y(s;\tau_k,y)Q(y)\frac{\partial Y^T(s;\tau_k,y)}{\partial y_k}\right. \\ &\left. + Y(s;\tau_k,y)\frac{\partial Q(y)}{\partial y_k}Y^T(s;\tau_k,y)\right)ds\Bigg\| \le 2n^{5/2}\gamma_2\theta_2\|X\|e^{3\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{\nu_2} \\ &+ 2\theta_2^2 n^{5/2}\gamma_2 e^{3\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{\nu_2}\|Q(y)\| + n\theta_2 e^{2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\left\|\frac{\partial Q(y)}{\partial y_k}\right\|.\end{aligned}$$

Выберем $Q(y) = \frac{e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\delta(\|y\|)}{2\theta_2 n^{3/2}} I$, тогда

$$\|Q(y)\| = \frac{e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\delta(\|y\|)}{2\theta_2 n},$$

$$\frac{\partial Q(y)}{\partial y_k} = -\frac{\gamma_1}{\sqrt{n}} e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}} \nu_1 \|y\|^{\nu_1-1}\frac{\partial\|y\|}{\partial y_k}\delta(\|y\|)I + \frac{1}{2\theta_2 n^{3/2}} e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\delta'(\|y\|)\frac{\partial\|y\|}{\partial y_k} I,$$

$$\left\|\frac{\partial Q}{\partial y_k}\right\| \le \gamma_1\nu_1 e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{\nu_1-1}\delta(\|y\|) + \frac{e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\delta'(\|y\|)}{2\theta_2 n}.$$

Как следствие,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} &\le -\frac{1}{2\theta_2 n^{3/2}} e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\delta(\|y\|)\|y\|^2 \\
&+ n^{3/2}\gamma_1\|y\|^{3+\nu_1}\Big(2n^{5/2}\gamma_2\theta_2\|X\|e^{3\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{\nu_2} + n^{3/2}\gamma_2 e^{\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{\nu_2}\delta(\|y\|) \\
&+ n\theta_2\gamma_1\nu_1\|y\|^{\nu_1-1}\delta(\|y\|) + \frac{\delta'(\|y\|)}{2}\Big) = -\frac{e^{-2\theta_2\gamma_1 n\|y\|^{\nu_1}}}{2\theta_2 n^{3/2}}\delta(\|y\|)\|y\|^2 \\
&+ 2n^4\gamma_1\gamma_2\theta_2\|X\|e^{3\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{3+\nu_1+\nu_2} + n^3\gamma_1\gamma_2 e^{\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|y\|^{3+\nu_1+\nu_2}\delta(\|y\|) \\
&+ n^{5/2}\theta_2\gamma_1^2\nu_1\|y\|^{2(1+\nu_1)}\delta(\|y\|) + \frac{n^{3/2}\gamma_1}{2}\|y\|^{3+\nu_1}\delta'(\|y\|) \\
&\le -\frac{1}{10\theta_2 n^{3/2}} e^{-2\theta_2\gamma_1 r^{\nu_1}}\delta(\|y\|)\|y\|^2. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
&v(\tau_k+0, y+D_k(y)y) - v(\tau_k, y) \\
&= y^T\Bigg(\big(I + D_k^T(y)\big)X(I+D_k(y)) - Y(\tau_k;\tau_{k-1},y)XY^T(\tau_k;\tau_{k-1},y) \\
&+ \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Y(s;\tau_k,y)Q(y)Y^T(s;\tau_k,y)\,ds\Bigg)y \le (-\delta(\|y\|) + \theta_2 n e^{2\theta_2 n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}}\|Q(y)\|)\|y\|^2 \\
&\le -\frac{\delta(\|y\|)\|y\|^2}{2}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Пусть ε — положительное число. Выберем положительное число

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min\left\{\sqrt{\frac{\lambda_m(X)}{\lambda_M(X)}}\varepsilon e^{-n\gamma_1\varepsilon^{\nu_1}\theta_2}, \sqrt{\frac{\lambda_m(X)}{\lambda_M(X)}} r e^{-n\gamma_1 r^{\nu_1}\theta_2}\right\}.$$

Покажем, что из неравенства $\|y_0\| < \delta$ следует неравенство $\|y(t;t_0,y_0)\| < r$ при всех $t \ge t_0$, где $y(t) = y(t;t_0,y_0)$ — решение системы (2.1).

Предположим, что это не так, т. е. существует момент времени t^* такой, что $\|y(t;t_0,y_0)\| < r$ при всех $t \in [t_0, t^*)$ и $\|y(t^*;t_0,y_0)\| \ge r$. Пусть k_0 — наибольшее натуральное число, для которого $\tau_{k_0} \le t^*$. Рассмотрим конечную числовую последовательность $\{v(\tau_k+0, y(\tau_k+0;t_0,y_0))\}_{k=1}^{k_0}$. Она убывает, что является простым следствием оценок (2.6) и (2.7). Таким образом,

$$\lambda_m(X)\|y(\tau_{k_0}+0;t_0,y_0)\|^2 \le \lambda_M(X)\|y_0\|^2 < \lambda_m(X)r^2e^{-2n\gamma_1\theta_2r^{\nu_1}},$$

откуда $\|y(\tau_{k_0}+0;t_0,y_0)\| < re^{-n\gamma_1\theta_2r^{\nu_1}}$. Утверждение леммы 2.2 гарантирует выполнение неравенства $\|y(t^*;t_0,y_0)\| < r$. Полученное противоречие доказывает, что $\|y(t;t_0,y_0)\| < r$ при всех $t \in [t_0,\infty)$.

Таким образом, вдоль решения $y(t;t_0,y_0)$, $t \ge t_0$, выполняются оценки (2.6) и (2.7), т. е. последовательность $\{v(\tau_k+0, y(\tau_k+0;t_0,y_0))\}_{k=1}^{\infty}$ убывает. Поэтому

$$\lambda_m(X)\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|^2 \le \lambda_M(X)\|y_0\|^2 < \lambda_m(X)\varepsilon^2e^{-2n\gamma_1\theta_2\varepsilon^{\nu_1}}.$$

Отсюда следует, что $\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\| < \varepsilon e^{-n\gamma_1\theta_2\varepsilon^{\nu_1}}$. Утверждение леммы 2.2 гарантирует, что $\|y(t;t_0,y_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \in (\tau_k,\tau_{k+1}]$. Утверждение об устойчивости состояния равновесия $y = 0$ доказано.

Покажем, что состояние равновесия $y = 0$ асимптотически устойчиво. Действительно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} v(\tau_k+0, y(\tau_k+0;t_0,y_0)) = \inf_k\{v(\tau_k+0, y(\tau_k+0;t_0,y_0))\}_{k=1}^{\infty} = \alpha.$$

Предположим, что $\alpha > 0$. Тогда

$$\lambda_M(X)\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|^2 \ge y^T(\tau_k+0;t_0,y_0)Xy(\tau_k+0;t_0,y_0) \ge \alpha,$$

и, как следствие, $\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\| \ge \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_M(X)}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} v(\tau_{N+1}+0, y(\tau_{N+1}+0;t_0,y_0)) &\le v(\tau_1+0, y(\tau_1+0;t_0,y_0)) \\ &- \sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|)\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|^2}{2} \le v(\tau_1+0, y(\tau_1+0;t_0,y_0)) \\ &- \frac{\alpha N}{2\lambda_M(X)}\delta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_M(X)}}\right). \end{aligned}$$

Это противоречиво при больших N, тем самым $\alpha = 0$. Поскольку

$$\lambda_M(X)\|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|^2 \le v(\tau_k+0, y(\tau_k+0;t_0,y_0)),$$

то $y(\tau_k+0;t_0,y_0) \to 0$ при $k \to \infty$. Утверждение леммы 2.2 гарантирует оценку

$$\|y(t;t_0,y_0)\| \le \|y(\tau_k+0;t_0,y_0)\|e^{n\gamma_1\theta_2r^{\nu_1}}, \quad t \in (\tau_k,\tau_{k+1}],$$

из которой следует асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $y = 0$. Теорема доказана.

3. Исследование решений вспомогательной системы. Конструктивное применение основной теоремы сопряжено с необходимостью вычисления или оценки матриканта $Y(t;s,y)$ вспомогательной линейной системы (2.2). В этом разделе рассмотрим некоторые подходы в этом направлении, позволяющие сформулировать следствия из основной теоремы.

1. Случай Лаппо — Данилевского. Предположим, что матрица $C(t,p)$ удовлетворяет условию

$$C(t,p)\int_{t_0}^{t} C(s,p)\,ds = \int_{t_0}^{t} C(s,p)\,ds\,C(t,p), \quad t \ge t_0 \ge 0,\ p \in \mathbb{R}^n.$$

В этом случае $Y(\tau_{k+1};\tau_k,y)=\exp\Bigl\{-\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}C^T(s,y)\,ds\Bigr\}$.

2. Метод последовательных приближений. Обозначим

$$Y_m(t;t_0,y)=I+\sum_{l=1}^{m}(-1)^l\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\cdots\int\limits_{t_0}^{s_{m-1}}C^T(s_1,p)\dots C^T(s_m,p)\,ds_1\dots ds_m.$$

Нетрудно установить оценку

$$\|Y_m(\tau_{k+1};\tau_k,y)-Y(\tau_{k+1};\tau_k,y)\|\le\frac{e^{n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}\theta_2}(n\gamma_1\|y\|^{\nu_1}\theta_2)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

3. Метод возмущений. Предположим, что из матрицы $C(t,y)$ каким-либо способом выделена стационарная часть $C_0(y)$ (например, $C_0(y)$ — среднее значение $C(t,y)$). Пусть $\Delta(t,y)=\|C(t,y)-C_0(y)\|$, и обозначим через $Y_0(t;t_0,p)$ матрицант линейной системы

$$\frac{dz}{dt}=-C_0^T(p)z.$$

На основе свойств матрицанта

$$\frac{d(Y-Y_0)}{dt}=-C_0^T(p)(Y-Y_0)-\bigl(C^T(t,p)-C_0^T(p)\bigr)Y,$$

тогда из формулы Коши следует интегральное тождество

$$Y(t;t_0,p)-Y_0(t;t_0,p)=-\int\limits_{t_0}^{t}e^{-C_0^T(p)(t-s)}\bigl(C^T(s,p)-C_0^T(p)\bigr)Y(s;t_0,p)\,ds.$$

Таким образом, получим оценку ошибки приближения:

$$\|Y(t;t_0,p)-Y_0(t;t_0,p)\|\le\int\limits_{t_0}^{t}e^{\Lambda(-C_0(p))(t-s)}\Delta(s,p)\|Y(s;t_0,p)\|\,ds.$$

Здесь $\Lambda(\cdot)$ — логарифмическая матричная норма соответствующей матрицы.

Аналогично получим представление

$$Y(t;t_0,p)=e^{-C_0^T(p)(t-t_0)}-\int\limits_{t_0}^{t}e^{-C_0^T(p)(t-s)}\bigl(C^T(s,p)-C_0^T(p)\bigr)Y(s;t_0,p)\,ds.$$

Оценим норму матрицанта $Y(t;t_0,p)$:

$$\|Y(t;t_0,p)\|\le e^{\Lambda(-C_0(p))(t-t_0)}+\int\limits_{t_0}^{t}e^{\Lambda(-C_0(p))(t-s)}\Delta(s,p)\|Y(s;t_0,p)\|\,ds.$$

Применяя интегральное неравенство Гронуолла — Беллмана, получим

$$\|Y(t;t_0,p)\|\le e^{\Lambda(-C_0(p))(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\Delta(s,p)ds}.$$

Окончательно находим оценку для ошибки в виде

$$\|Y(\tau_{k+1};\tau_k,y)-Y_0(\tau_{k+1};\tau_k,y)\|\le e^{\Lambda(-C_0(y))(\tau_{k+1}-\tau_k)}[e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\Delta(\xi,y)d\xi}-1].$$

4. Условия устойчивости тривиального решения системы (1.3). Теорема 2.1 и результаты разд. 3 позволяют сформулировать некоторые достаточные условия устойчивости в критических случаях.

Следствие 4.1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) такая, что*

1) матрица $C(t,y)$ удовлетворяет условию Лаппо — Данилевского

$$C(t,p)\int\limits_{t_0}^{t} C(s,p)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t} C(s,p)\,ds C(t,p), \quad t \ge t_0 \ge 0,\ p \in \mathbb{R}^n,$$

2) существует положительно определенная матрица X, для которой выполняются неравенства

$$y^T((I+D_{k+1}(y))^T X (I+D_{k+1}(y)) - e^{-\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} C^T(s,y)\,ds} X e^{-\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} C(s,y)\,ds})y \le -\delta(\|y\|)\|y\|^2, \quad (4.1)$$

где $y \in U$, $k = 1,2,\ldots$, $\delta(r)$ — дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям

$$\lim_{r\to 0} \frac{\delta'(r) r^{1+\nu_1}}{\delta(r)} = 0, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{1+\nu_1+\nu_2}} = \infty, \quad 1+\nu_1+\nu_2 > 0.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Следствие 4.2. *Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) такая, что существуют натуральное число m и положительно определенная матрица X, для которой выполняются неравенства*

$$y^T\Bigg(\bigg(D_{k+1}(y) + \sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{s_1}\cdots\int\limits_{\tau_k}^{s_{l-1}} C(s_1,y)\ldots C(s_l,y)\,ds_1\ldots ds_l\bigg)^T X$$
$$+ X\bigg(D_{k+1}(y) + \sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\int\limits_{\tau_k}^{s_1}\cdots\int\limits_{\tau_k}^{s_{l-1}} C(s_1,y)\ldots C(s_l,y)\,ds_1\ldots ds_l\bigg)$$
$$+ D_{k+1}^T(y) X (D_{k+1}(y)\Bigg) y \le -\delta(\|y\|)\|y\|^2, \quad (4.2)$$

где $y \in U$, $k = 1,2,\ldots$, $\delta(r)$ — дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям

$$\lim_{r\to 0} \frac{\delta'(r) r^{1+\nu_1}}{\delta(r)} = 0, \quad \lim_{r\to 0} \frac{\delta(r)}{r^{1+\nu_1+\nu_2}} = \infty, \quad \lim_{r\to 0} \frac{r^{(m+1)\nu_1}}{\delta(r)} = 0, \quad 1+\nu_1+\nu_2 > 0.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Предположим, что из функции $C(t,y)$ выделена некоторая стационарная часть $C_0(y)$, обозначим ее через $\Delta(t,y) = \|C(t,y) - C_0(y)\|$.

Следствие 4.3. *Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2.1) такая, что существует положительно определенная матрица X, для которой выполняются неравенства*

$$y^T((I+D_{k+1}(y))^T X (I+D_{k+1}(y)) - e^{-C_0^T(y)(\tau_{k+1}-\tau_k)} X e^{-C_0(y)(\tau_{k+1}-\tau_k)})y$$
$$+ \|y\|^2 e^{\Lambda(-C_0(y))(\tau_{k+1}-\tau_k)}[e^{\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \Delta(\xi,y)d\xi} - 1] \le -\delta(\|y\|)\|y\|^2,$$

где $y \in U$, $k = 1, 2, \ldots$, $\delta(r)$ — дифференцируемая функция класса Хана, удовлетворяющая в окрестности нуля условиям

$$\lim_{r\to 0}\frac{\delta'(r)r^{1+\nu_1}}{\delta(r)} = 0, \quad \lim_{r\to 0}\frac{\delta(r)}{r^{1+\nu_1+\nu_2}} = \infty, \quad 1+\nu_1+\nu_2 > 0.$$

Тогда состояние равновесия $y = 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

5. Пример. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = \alpha\cos^2 tx_1^3 + \varepsilon\cos tx_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = \varepsilon\sin tx_1^3 - \beta\sin^2 tx_2^3, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x_1(t) = -\gamma x_1^3 + \varepsilon x_2^3, \quad \Delta x_2(t) = \varepsilon x_1^3 + \delta x_2^3, \quad t = \tau_k, \end{gathered} \tag{5.1}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, α, β, γ, δ, ε — положительные постоянные, моменты импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют двусторонней оценке

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty.$$

Применим следствие 4.2. Тогда

$$C(t,x) = \begin{pmatrix} \alpha\cos^2 tx_1^2 & \varepsilon\cos tx_2^2 \\ \varepsilon\sin tx_1^2 & -\beta\sin^2 tx_2^2 \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} -\gamma x_1^2 & \varepsilon x_2^2 \\ \varepsilon x_1^2 & \delta x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $m = 1$, $X = I$. Тогда условие (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} x^T\Biggl(\Biggl(D(x) + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} C(s_1,x)\,ds_1\Biggr)^T + \Biggl(D(x) + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} C(s_1,x)\,ds_1\Biggr) + D^T(x)D(x)\Biggr)x \\ \leq [\alpha(1+\theta_2) - 2\gamma]x_1^4 + 6\varepsilon x_1x_2\bigl(x_1^2 + x_2^2\bigr) + [\beta(1-\theta_1) + 2\delta]x_2^4 + O(\|x\|^6) \\ \leq [\alpha(1+\theta_2) + 3\varepsilon - 2\gamma]x_1^4 + 6\varepsilon x_1^2x_2^2 + [\beta(1-\theta_1) + 2\delta + 3\varepsilon]x_2^4 + O(\|x\|^6). \end{aligned}$$

Неравенства

$$\begin{gathered} \alpha(1+\theta_2) - 2\gamma + 3\varepsilon < 0, \\ (\alpha(1+\theta_2) - 2\gamma)(\beta(1-\theta_1) + 2\delta) + 3\varepsilon(\alpha(1+\theta_2) - 2\gamma + \beta(1-\theta_1) + 2\delta) > 0 \end{gathered}$$

гарантируют существование функции $\delta(r) = \eta r^2$, $\eta > 0$, удовлетворяющей всем условиям следствия 4.2, и тем самым асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы (5.1).

6. Обсуждение результатов. Условия устойчивости тривиального решения нелинейной нестационарной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, представленные в следствиях 4.1–4.3, конструктивны. Предложенная кусочно дифференцируемая функция достаточно эффективна при исследовании критических случаев нелинейных нестационарных систем дифференциальных уравнений. При этом тривиальные орбиты непрерывной и дискретной компонент импульсной системы одновременно могут быть неустойчивыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hsu C. S.* Impulsive parametric excitation // Pap. ASME. 1971. NWA/APM. V. 19. P. 8.
2. *Liu X.* Progress in stability of impulsive systems with applications to population growth models // Advances in stability theory at the end of the 20th century / (Ed. Martynyuk A. A.). London: Taylor and Francis, 2003. P. 321–340. (Stability and control: theory, methods and applications. V. 13).
3. *Слынько В. И.* Устойчивость движения механических систем: гибридные модели: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Киев, 2009.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987.
5. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. Singapore: World Sci., 1989.
6. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 125–133.
7. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. 2008. Т. 44, № 2. С. 132–142.
8. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 2. С. 112–122.
9. *Черникова О. С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 601–607.
10. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы-1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 7–149.
11. *Слынько В. И.* Построение отображений Пуанкаре для голономной механической системы с двумя степенями свободы при наличии ударов // Прикл. механика. 2008. Т. 44, № 5. С. 115–122.
12. *Бабенко С. В., Слынько В. И.* Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях // Доп. НАН України. 2008. № 6. С. 46–52.
13. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Исследование устойчивости автономных систем сравнения. Киев, 1978. 24 с. (Препринт/Институт математики АН УССР; № 78.28).
14. *Оболенский А. Ю.* Об устойчивости систем сравнения // Доп. АН УРСР. 1979. № 8. С. 607–611.

Статья поступила 22 апреля 2010 г.

Двирный Александр Иванович
Академия пожарной безопасности им. Героев Чернобыля,
кафедра высшей математики и информатики,
ул. Оноприенко, 8, Черкассы 18000, Украина
dvirny@mail.ru

Слынько Виталий Иванович
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев 03057, Украина
vitstab@ukr.net