Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.572

ТОЖДЕСТВА В МНОГООБРАЗИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ АЛГЕБРАМИ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

С. М. Рацеев

Аннотация. Пусть UT_s — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над произвольным полем. В. М. Петроградским доказано, что экспонента произвольного подмногообразия в $\mathrm{var}(UT_s)$ существует и является целым числом. В работе усилены оценки роста таких многообразий и показаны эквивалентные условия для нахождения этих самых экспонент. Известно (А. Р. Кемер), что в случае основного поля нулевой характеристики не существует многообразий ассоциативных алгебр промежуточного роста между полиномиальным и экспоненциальным. Доказывается, что это свойство распространяется на случай поля произвольной характеристики, отличной от двух.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, многообразие алгебр, рост многообразий, алгебра верхнетреугольных матриц.

Введение

Пусть $A(X)$ — свободная ассоциативная алгебра над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через R некоторую ассоциативную PI-алгебру. Совокупность всех тождеств алгебры R образует T-идеал $\mathrm{Id}(R)$ в свободной алгебре $A(X)$. Пусть $V = \mathrm{var}(R)$ — многообразие алгебр, порожденное алгеброй R. Тогда алгебра $K(X,V) = A(X)/\mathrm{Id}(R)$ над полем K является относительно свободной алгеброй многообразия V.

Пусть P_n — подпространство в пространстве $A(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(R))$, $n = 1, 2, \dots$. Асимптотическое поведение последовательности $c_n(V) = \dim P_n(V)$, $n = 1, 2, \dots$, называют *ростом* многообразия V.

Регев в работе [1] показал, что если в ассоциативной алгебре R выполнено нетривиальное тождество, а значит, многообразие $V = \mathrm{var}(R)$ нетривиально, то последовательность $c_n(V)$ экспоненциально ограничена, т. е. существуют такие константы α и a, что $c_n(V) \le \alpha a^n$ для любого n. Поэтому для произвольного ассоциативного многообразия V можно определить нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{\mathrm{EXP}}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{\mathrm{EXP}}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

В случае равенства обозначим $\mathrm{Exp}(V) = \underline{\mathrm{EXP}}(V) = \overline{\mathrm{EXP}}(V)$. М. В. Зайцев и Джамбруно в работах [2, 3], в частности, доказали, что в случае поля нулевой характеристики экспонента произвольного нетривиального ассоциативного многообразия существует и является целым числом.

Теорема 1 [3]. *Пусть R — ассоциативная PI-алгебра над полем нулевой характеристики. Тогда существуют неотрицательное целое число q и константы A, B, α и β, $A \neq 0$, такие, что*

$$An^{\alpha}q^{n} \leq c_n(R) \leq Bn^{\beta}q^{n}.$$

Пространство $P_n(V)$ наделено структурой левого S_n-модуля, где S_n — симметрическая группа порядка n. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n. Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(V)$ в случае поля нулевой характеристики для многообразия V имеет место разложение

$$\chi_n(V) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1}$$

где m_λ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n.

Обозначим через $UT_s = UT_s(K)$ алгебру верхнетреугольных матриц порядка s над произвольным полем K. В работе [4] В. М. Петроградский, используя разработанный им так называемый метод ожерелий, доказал, что экспонента произвольного подмногообразия в $\mathrm{var}(UT_s)$ существует и является целым числом. Данный метод дает хорошую оценку сверху роста таких многообразий, т. е. если V — некоторое подмногообразие в $\mathrm{var}(UT_s)$ и $\mathrm{Exp}(V) = d$, то существует такая константа β, что $c_n(V) \leq n^{\beta}d^{n}$ для любого n. В данной работе мы покажем, что в этом случае существует еще и такая константа α, что $c_n(V) \geq n^{\alpha}d^{n}$ для всех достаточно больших n. Такой же метод применялся автором в работах [5, 6] для оценок роста в случае многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом (алгебра Лейбница — неассоциативная алгебра, в которой правое умножение на элемент алгебры является дифференцированием). Получившееся двойное неравенство дает возможность результат А. Р. Кемера о том, что не существует многообразий ассоциативных алгебр промежуточного роста между полиномиальным и экспоненциальным, обобщить со случая поля нулевой характеристики до поля произвольной характеристики, не равной двум. Также в данной работе приводятся эквивалентные условия для отыскания значения экспоненты $d = d(V)$, которая фигурирует в данном двойном неравенстве.

Под обозначением $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ будем понимать левонормированную расстановку коммутаторов $[[[x_1, x_2], x_3], \ldots, x_n]$. Для удобства записи элементы, содержащие кососимметричный набор, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой, волной или двумя чертами сверху. Например,

$$y\bar{x}_1 z\bar{x}_2 = yx_1zx_2 - yx_2zx_1, \quad \left[y, \bar{x}_1^2\right]\left[z, \bar{x}_2^2\right] = [y, \bar{x}_1, \tilde{x}_1][z, \bar{x}_2, \tilde{x}_2].$$

1. Рост подмногообразий в $\mathrm{var}(UT_s)$ в случае произвольного поля

Следуя [4], на множестве непересекающихся подмножеств в $\{1, 2, \ldots, n\}$ введем частичный порядок. Пусть $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A \cap B = \varnothing$. Положим

$A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. Попарно не пересекающиеся подмножества $I_1, \ldots, I_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, возможно, пустые, назовем *цепочками*, а $(I_1, \ldots, I_k)$ — *набором цепочек*. Будем говорить, что $(I_1, \ldots, I_k)$ — *возрастающий набор цепочек*, если $I_{i_1} < \cdots < I_{i_l}$, где набор цепочек $(I_{i_1}, \ldots, I_{i_l})$ получается из $(I_1, \ldots, I_k)$ путем удаления всех пустых компонент.

Введем еще одну частичную упорядоченность на цепочках. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_t\}$ — подмножества в $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем $i_1 < \cdots < i_s$, $j_1 < \cdots < j_t$. Положим $I \prec J$, если набор $(i_1, \ldots, i_s)$ лексикографически слева направо меньше набора $(j_1, \ldots, j_t)$. Данную частичную упорядоченность распространим лексикографически слева направо на наборы цепочек $(I_1, \ldots, I_s)$, сохраняя знак $\prec$.

Обозначим через V_s ассоциативное многообразие, определенное тождеством

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2s-1}, x_{2s}] = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что $UT_s \in V_s$. Хорошо известно (см. [7]), что в случае поля K нулевой характеристики тождество (2) порождает идеал тождеств алгебры UT_s.

Заметим, что $P_n(V_s) \cong P_n(A(X)/\operatorname{Id}(V_1)) \bigoplus\limits_{c=1}^{s-1} P_n(\operatorname{Id}(V_c)/\operatorname{Id}(V_{c+1}))$, где

$$P_n(A(X)/\operatorname{Id}(V_1)) = \langle x_1 x_2 \ldots x_n \rangle_K,$$

а пространство $P_n(\operatorname{Id}(V_c)/\operatorname{Id}(V_{c+1}))$ есть линейная оболочка следующих элементов:

$$\begin{aligned} P_n(\operatorname{Id}(V_c)/\operatorname{Id}(V_{c+1})) = \langle x_{i_1} \ldots x_{i_k} [x_{11}, \ldots, x_{1a_1}] \ldots [x_{c1}, \ldots, x_{ca_c}] \mid \\ k \geq 0,\ a_1, \ldots, a_c \geq 2;\ \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ i_1 < \cdots < i_k,\ j1 > j2 < \cdots < ja_j,\ j = 1, \ldots, c\rangle_K. \end{aligned} \tag{3}$$

Элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, а также элементы $x_{j3}, \ldots, x_{ja_j}$, $j = 1, \ldots, c$, можно менять местами, так как, меняя местами два рядом стоящих элемента, дополнительно получаем элемент из $\operatorname{Id}(V_{c+1})$. Данное свойство назовем свойством $(*)$.

Пусть S_{km} — симметрическая группа порядка km. Обозначим через S^*_{km} следующее подмножество в S_{km}:

$$S^*_{km} = \{\sigma \mid \sigma \in S_{km},\ \sigma(im + 1) < \sigma(im + 2) < \cdots < \sigma(im + m),\ i = 0, \ldots, k - 1\}.$$

Очевидно, что $|S^*_{km}| = \frac{(km)!}{(m!)^k}$.

Пусть V — некоторое фиксированное подмногообразие в V_s. Тогда

$$P_n(V) \cong \bigoplus_{c=0}^{s-1} R_{c,n}(V), \tag{4}$$

где

$$R_{0,n}(V) = P_n(A(X)/\operatorname{Id}(V \cap V_1)),$$
$$R_{c,n}(V) = P_n(\operatorname{Id}(V \cap V_c)/\operatorname{Id}(V \cap V_{c+1})), \quad c = 1, \ldots, s - 1.$$

Для многообразия V введем следующие числовые характеристики. Пусть произвольные положительные целые числа k и n зафиксированы, причем $1 \leq k \leq s$. Будем говорить, что некоторое целое неотрицательное число m *обладает свойством* $Q(n, k, V)$, если существует такое c, что в пространстве $R_{c,n}(V)$ найдется некоторый набор линейно независимых элементов либо вида

$$\begin{aligned} a_\sigma = q t_1 \ldots [t_{i_1}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)}] \ldots [t_{i_2}, x_{\sigma(m+1)}, x_{\sigma(m+2)}, \ldots, x_{\sigma(2m)}] \\ \ldots [t_{i_k}, x_{\sigma((k-1)m+1)}, x_{\sigma((k-1)m+2)}, \ldots, x_{\sigma(km)}] \ldots t_c, \quad \sigma \in S^*_{km}, \end{aligned} \tag{5}$$

либо вида

$$a_\sigma = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(m)}\dots t_1\dots[t_{i_1}, x_{\sigma(m+1)}, x_{\sigma(m+2)},\dots, x_{\sigma(2m)}]$$
$$\dots[t_{i_{k-1}}, x_{\sigma((k-1)m+1)}, x_{\sigma((k-1)m+2)},\dots, x_{\sigma(km)}]\dots t_c, \quad \sigma\in S^*_{km}, \quad (6)$$

где q — некоторый, возможно, пустой моном, $t_1,\dots,t_c$ — некоторые коммутаторы, зависящие не менее чем от двух переменных и $q, t_1,\dots,t_c$ одинаковы для всех элементов a_σ, $\sigma\in S^*_{km}$. Определим значение $m_n(k,V)$ следующим образом: если среди неотрицательных целых чисел, меньших чем n, нет таких, которые обладают свойством $Q(n,k,V)$, то положим $m_n(k,V)=-1$, иначе определим $m_n(k,V)$ как наибольшее из этих чисел, обладающих свойством $Q(n,k,V)$. Введем еще одну характеристику многообразия V:

$$d(V)=\max\{k\mid \varlimsup_{n\to\infty} m_n(k,V)=+\infty,\ k=1,\dots,s\}. \quad (7)$$

Лемма 1. *Пусть $V\subseteq V_s$ и $d(V)\ge 1$. Тогда для любого $r\in\{1,2,\dots,d(V)\}$ и любого n будет выполняться неравенство*

$$n - rm_n(r,V)\le 2(s-1)+r-1. \quad (8)$$

Доказательство. Если рассматривать группу S_{am} как подгруппу в S_{bm} при $b\ge a$, то в этом случае будет такое вложение: $S^*_{am}\subseteq S^*_{bm}$. Поэтому для любого $r\in\{1,2,\dots,d(V)\}$ и любого n верно неравенство $m_n(r,V)\ge m_n(d(V),V)$, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} m_n(r,V)=+\infty, \quad r\in\{1,2,\dots,d(V)\},$$

так как $\varlimsup_{n\to\infty} m_n(d(V),V)=+\infty$.

Предположим, что существуют такие N и $r_0\in\{1,2,\dots,d(V)\}$, для которых неравенство (8) не выполняется, т. е.

$$N - r_0 m_N(r_0,V)\ge 2(s-1)+r_0.$$

Тогда любые наборы элементов a_σ, $\sigma\in S^*_{r_0\widetilde m}$, вида (5), (6) при $\widetilde m = m_N(r_0,V)+1$ из $R_{c,N}$ будут линейно зависимы по модулю идеала тождеств многообразия V для любого $c\ge r_0-1$. Пусть $n\ge N$ и $m\ge\widetilde m$. Тогда элементы вида (5), (6) a_σ, $\sigma\in S^*_{r_0 m}$, будут линейно зависимы по модулю $\mathrm{Id}(V)$, так как с учетом свойства $(*)$ уже линейно зависимы элементы вида

$$qt_1\dots[t_{i_1}, x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(\widetilde m)}, x_{r_0\widetilde m+1},\dots,x_{r_0\widetilde m+m-\widetilde m}]$$
$$\dots[t_{i_2}, x_{\sigma(\widetilde m+1)},\dots,x_{\sigma(2\widetilde m)}, x_{r_0\widetilde m+m-\widetilde m+1},\dots,x_{r_0\widetilde m+2(m-\widetilde m)}]$$
$$\dots[t_{i_{r_0}}, x_{\sigma((r_0-1)\widetilde m+1)},\dots,x_{\sigma(r_0\widetilde m)}, x_{r_0\widetilde m+(r_0-1)(m-\widetilde m)+1},\dots,x_{r_0\widetilde m+r_0(m-\widetilde m)}]\dots t_c,$$
$$\sigma\in S^*_{r_0\widetilde m},$$

и вида

$$x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(\widetilde m)}x_{r_0\widetilde m+1}\dots x_{r_0\widetilde m+m-\widetilde m}\dots t_1$$
$$\dots[t_{i_1}, x_{\sigma(\widetilde m+1)},\dots,x_{\sigma(2\widetilde m)}, x_{r_0\widetilde m+m-\widetilde m+1},\dots,x_{r_0\widetilde m+2(m-\widetilde m)}]$$
$$\dots[t_{i_{r_0-1}}, x_{\sigma((r_0-1)\widetilde m+1)},\dots,x_{\sigma(r_0\widetilde m)}, x_{r_0\widetilde m+(r_0-1)(m-\widetilde m)+1},\dots,x_{r_0\widetilde m+r_0(m-\widetilde m)}]\dots t_c,$$
$$\sigma\in S^*_{r_0\widetilde m}.$$

Поэтому $m_n(r_0,V)<\widetilde m$ для любого $n\ge N$. Тем самым мы пришли к противоречию с тем, что $\varlimsup_{n\to\infty} m_n(r_0,V)=+\infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть V — подмногообразие в V_s и основное поле произвольно. Тогда существуют такие константы N, α, β и такое целое число d, причем $d \in \{0, 1, \dots, s\}$, что для любого $n \geq N$ будет выполнено следующее двойное неравенство:*

$$n^\alpha d^n \leq c_n(V) \leq n^\beta d^n. \tag{9}$$

Доказательство. Покажем, что неравенство (9) верно для многообразия V, когда число d равно значению $d(V)$, определенному в (7). Заметим, что многообразие V нильпотентно в том и только том случае, если $d(V) = 0$. Поэтому в случае нильпотентности многообразия V неравенство (9) очевидно.

Заметим, что из работы [8] следует, что для многообразия V_s выполнено неравенство (9) при $d = s$.

Предположим, что $d(V) \geq 1$. Из леммы 1 и неравенства $d(V) \leq s$ вытекает, что для любого n выполняется неравенство

$$0 \leq n - dm_n \leq 2(s-1) + d - 1 \leq 3(s-1),$$

где $d = d(V)$, $m_n = m_n(d(V))$. Тогда

$$c_n(V) \geq |S^*_{dm_n}| = \frac{(dm_n)!}{[m_n!]^d} \geq \frac{(n-3s+3)!}{[(\frac{n}{d})!]^d} \geq \frac{1}{n^{3s-3}} \frac{n!}{[(\frac{n}{d})!]^d}.$$

Осталось применить формулу Стирлинга и тем самым получить нижнюю оценку для $c_n(V)$ в неравенстве (9).

Покажем верхнюю оценку. Если $d(V) = s$, то неравенство (9) для многообразия V доказано, так как $c_n(V) \leq c_n(V_s) \leq n^\beta s^n$ для некоторой константы β и любого n.

Пусть $1 \leq d(V) \leq s-1$. Обозначим $k = d(V) + 1$. Из определения значения $d(V)$ следует, что для числа k существует такое m, что любые наборы элементов (5) и (6) будут линейно зависимы для любого $c \geq k-1$ и любого n начиная с некоторого номера N. Зафиксируем произвольное значение c такое, что $k-1 \leq c \leq s-1$. Тогда для любого $n \geq N$ пространство $R_{c,n}(V)$ есть линейная оболочка элементов вида (3), причем таких, что каждый из них с учетом свойства $(*)$ не может быть приведен к виду

$$qg_1 \dots [g_{i_1}, x_{11}, \dots, x_{1m}] \dots [g_{i_2}, x_{21}, \dots, x_{2m}] \dots [g_{i_k}, x_{k1}, \dots, x_{km}] \dots g_c \tag{10}$$

и к виду

$$x_{11} \dots x_{1m} \dots g_1 \dots [g_{i_1}, x_{21}, \dots, x_{2m}] \dots [g_{i_{k-1}}, x_{k1}, \dots, x_{km}] \dots g_c, \tag{11}$$

где q — некоторый, возможно, пустой моном, $t_1, \dots, t_c$ — некоторые коммутаторы, зависящие не менее чем от двух переменных, причем в элементах (10) и (11) имеется такой убывающий набор цепочек:

$$\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}\} > \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m}\} > \dots > \{x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km}\}.$$

Действительно, в силу линейной зависимости элементов (5) и (6) в пространстве $R_{c,n}(V)$ выполняются следующие тождества:

$$t_1 \dots [t_{i_1}, x_{(k-1)m+1}, \dots, x_{km}] \dots [t_{i_{k-1}}, x_{m+1}, \dots, x_{2m}] \dots [t_{i_k}, x_1, \dots, x_m] \dots t_c$$
$$= \sum_{\sigma \in S^*_{km} \setminus \{e\}} \alpha_\sigma t_1 \dots [t_{i_1}, x_{\sigma((k-1)m+1)}, \dots, x_{\sigma(km)}] \dots [t_{i_k}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}] \dots t_c, \tag{12}$$

$$x_{(k-1)m+1}\dots x_{km}\dots t_1\dots[t_{i_{k-2}},x_{m+1},\dots,x_{2m}]\dots[t_{i_{k-1}},x_1,\dots,x_m]\dots t_c$$
$$=\sum_{\sigma\in S^*_{km}\setminus\{e\}}\beta_\sigma x_{\sigma((k-1)m+1)}\dots x_{\sigma(km)}\dots t_1\dots[t_{i_{k-1}},x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(m)}]\dots t_c,\qquad(13)$$

где e — тождественная перестановка. Сопоставим каждому элементу ω из (3) набор цепочек $I(\omega)=(I_0(\omega),I_1(\omega),I_2(\omega),\dots,I_c(\omega))$, где $I_0(\omega)=\{i_1,\dots,i_k\}$, $I_i(\omega)=\{i3,i4,\dots,ia_i\}$, $i=1,\dots,c$. Пусть элемент ω из (3) имеет вид (10). Применяя тождество (12), получим, что ω есть линейная комбинация элементов ω_i из (3) таких, что $I(\omega_i)\prec I(\omega)$. Так как размерность пространства $R_{c,n}(V)$ конечна, то ω в итоге выражается через элементы требуемого вида. Аналогично поступаем с элементами вида (11), используя тождество (13). Таким образом, базис пространства $R_{c,n}(V)$ можно выбрать из элементов (3) так, что эти базисные элементы не приводятся к виду (10) и (11). В работе [8] показано, что количество таких базисных элементов пространства $R_{c,n}$ не превосходит значения $n^\beta(k-1)^n$ для некоторой константы β. Учитывая разложение (4), получим верхнюю оценку. Теорема доказана.

2. Несколько технических лемм

Заметим, что множеству перестановок S^*_{km} можно взаимно однозначно сопоставить множество M^*_{km} таких матриц A размера $k\times m$, в которых расставлены числа $1,2,\dots,km$, причем каждое число из множества $\{1,2,\dots,km\}$ в матрице A встречается ровно один раз и элементы каждой строки образуют возрастающую последовательность.

Пусть даны два целых числа k и m. В матрице размера $k\times m$ расставим числа $1,2,\dots,km$ следующим образом. В первый столбец расставим числа $1,2,\dots,k$ по порядку сверху вниз. Также расставим числа $k+1,k+2,\dots,2k$ по порядку сверху вниз во второй столбец. Таким же способом заполним оставшиеся столбцы. Получим такую матрицу A:

$$\begin{pmatrix}1 & k+1 & \dots & (m-1)k+1\\ 2 & k+2 & \dots & (m-1)k+2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k & 2k & \dots & km\end{pmatrix}.$$

Пусть перестановка $\sigma_1\in S_k$ действует на элементы первого столбца матрицы A. Пусть также $\sigma_2\in S_k$ действует на элементы второго столбца (так как каждый элемент второго столбца представим в виде $k+i$, где $1\le i\le k$, будем считать, что результатом действия перестановки σ_2 на элемент $k+i$ будет $k+\sigma_2(i)$), и т. д. Тогда матрица $\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_m(A)$ будет принадлежать множеству M^*_{km}.

Назовем значения $1,2,\dots,k$, входящие в первый столбец матрицы A, *первым набором длины* k, во второй столбец — *вторым набором длины* k и т. д. Назовем также значения $\sigma_1(1)$, $\sigma_2(k+1)$, …, $\sigma_m((m-1)k+1)$ *первыми номерами*, значения $\sigma_1(2)$, $\sigma_2(k+2),\dots,\sigma_m((m-1)k+2)$ — *вторыми номерами* и т. д. Данные обозначения нам понадобятся в следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть V — подмногообразие в V_s над произвольным полем K. Пусть также имеется некоторый набор чисел $\alpha_\sigma\in K$, $\sigma\in S_{d+1}$, где d — некоторое неотрицательное целое число, что для некоторого целого числа $m\ge 0$ в* *пространстве $R_{d,n}(V)$ выполнено полилинейное тождество вида*

$$\sum_{\sigma_m\in S_{d+1}}\cdots\sum_{\sigma_1\in S_{d+1}}\alpha_{\sigma_m}\dots\alpha_{\sigma_1}x_{1\sigma_1(1)}x_{2\sigma_2(1)}\dots x_{m\sigma_m(1)}$$
$$[y_1,y_2,x_{1\sigma_1(2)},x_{2\sigma_2(2)},\dots,x_{m\sigma_m(2)}]$$
$$\dots[y_{2d-1},y_{2d},x_{1\sigma_1(d+1)},x_{2\sigma_2(d+1)},\dots,x_{m\sigma_m(d+1)}]=0, \quad (14)$$

где у переменных $x_{i\sigma_i(j)}$ индекс i означает порядковый номер набора, а j — порядковый номер элемента в i-м наборе. Тогда

(i) *существует такое целое k, что в пространстве $R_{c,n}(V)$, $c=d,d+1,\dots,s-1$, будут выполняться все полилинейные тождества вида*

$$\sum_{\sigma_k\in S_{d+1}}\cdots\sum_{\sigma_1\in S_{d+1}}\alpha_{\sigma_k}\dots\alpha_{\sigma_1}x_{1\sigma_1(1)}x_{2\sigma_2(1)}\dots x_{k\sigma_k(1)}\dots t_1$$
$$\dots[t_{i_1},x_{1\sigma_1(2)},x_{2\sigma_2(2)},\dots,x_{k\sigma_k(2)}]$$
$$\dots[t_{i_d},x_{1\sigma_1(d+1)},x_{2\sigma_2(d+1)},\dots,x_{k\sigma_k(d+1)}]\dots t_c=0, \quad (15)$$

где $t_1,\dots,t_c$ — некоторые коммутаторы, содержащие не менее двух переменных.

(ii) *если $\alpha_\sigma=(-1)^\sigma$, $\sigma\in S_{d+1}$, то существует такое целое $p\geq 0$, что в многообразии V выполнено полилинейное тождество*

$$\bar{x}_{11}\tilde{x}_{12}\dots\bar{\bar{x}}_{1p}[y_1,y_2,\bar{x}_{21},\tilde{x}_{22},\dots,\bar{\bar{x}}_{2p}]$$
$$\dots[y_{2d-1},y_{2d},\bar{x}_{(d+1)1},\tilde{x}_{(d+1)2},\dots,\bar{\bar{x}}_{(d+1)p}]=0.$$

Доказательство. Пусть $V\subseteq V_s$. Пусть также имеются некоторое целое число d и некоторый набор элементов поля K: α_σ, $\sigma\in S_{d+1}$. Если $s\leq d$, то для многообразия V выполнены условия пп. (i), (ii). Поэтому докажем лемму для случая $s\geq d+1$.

Пусть в пространстве $R_{d,n}(V)$ выполнено полилинейное тождество (14). Покажем, что если элемент v из $R_{c,n}(V)$, $c=d,\dots,s-1$, содержит $k=k(c,d)$ наборов длины $d+1$, то в пространстве $R_{c,n}(V)$ выполнено такое тождество:

$$\sum_{\sigma_k\in S_{d+1}}\cdots\sum_{\sigma_1\in S_{d+1}}\alpha_{\sigma_k}\dots\alpha_{\sigma_1}v=0. \quad (16)$$

Если $c=d$, то тождества вида (16) следуют из тождества (14), причем $k(c,d)=m$. База индукции проверена.

Пусть $c\geq d+1$. Предположим, что существует такое целое $k=k(c-1,d)$, что для элемента $v\in R_{c-1,n}(V)$, содержащего не менее $k(c-1,d)$ наборов длины $d+1$, выполнено тождество (16) в $R_{c-1,n}(V)$. Пусть $k(c,d)$ — достаточно большое число, значительно большее чем $k(c-1,d)$, и элемент $v\in R_{c,n}(V)$ содержит не менее $k(c,d)$ наборов длины $d+1$. Элемент v имеет следующий вид:

$$v=w\dots[t_1,\dots][t_2,\dots]\dots[t_c,\dots],$$

где переменные с первыми номерами расположены в мономе w, а с j-ми номерами, $j=2,\dots,d+1$, распределены по некоторым коммутаторам $[t_{i_1},\dots],\dots,[t_{i_d},\dots]$.

Выделим в элементе v самый крайний справа из коммутаторов, в котором нет ни вторых, ни третьих, и т. д., ни $(d+1)$-х номеров. Обозначим этот коммутатор через t. Если t находится на последнем месте в элементе v, то можно применить предположение индукции. Поэтому пусть элемент v имеет вид

$$v=w\dots q_1\dots q_{i-1}tq_i\dots q_{c-1},$$

где $q_1, \dots, q_{c-1}$ — оставшиеся $c-1$ коммутаторов. Будем передвигать коммутатор t вправо, учитывая тождество антикоммутативности $[x,y] = -[y,x]$. Получаем $v = w \dots q_1 \dots q_i t \dots q_{c-1} - w \dots q_1 \dots [q_i, t] \dots q_{c-1}$. Обозначим первое слагаемое через v_1, а второе — через v_2. Рассмотрим v_2. Не ограничивая общности, можно считать, что коммутатор q_i содержит некоторое количество вторых номеров, в частности ни одного, и не содержит других номеров. Если вне коммутатора q_i содержится не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, то, обозначив $[q_i, t]$ новой переменной, можно применить индуктивный переход.

Если же вне коммутатора q_i содержится менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, значит, в этот коммутатор попало не менее $3k(c-1,d)$ вторых номеров. В элементе v_2 будем передвигать коммутатор t влево, применяя тождество Лейбница $[x,y,z] = [x,z,y] + [x,[y,z]]$, при этом будут получаться слагаемые вида

$$w \dots q_1 \dots [q_i', t', \dots] \dots q_{c-1},$$

где в коммутаторе q_i' находится не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, а коммутатор t' содержит коммутатор t и некоторое количество вторых номеров. Если в коммутаторе $[q_i', t', \dots]$ вне q_i' и t' содержится не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров, то применяем предположение индукции. В противном же случае в коммутатор t' попадет не менее $k(c-1,d)$ вторых номеров. Тогда, раскрывая коммутатор $[q_i', t', \dots]$, представим элемент v_2 в виде линейной комбинации элементов следующего вида: $\dots q_1 \dots q_{i-1} q_i' t' \dots q_{c-1}$ и $\dots q_1 \dots q_{i-1} t' q_i' \dots q_{c-1}$. В первом элементе будем передвигать вправо коммутатор t', а во втором — q_i'. То же самое делаем с коммутатором t в элементе v_1. Поэтому в пространстве $R_{c,n}(V)$ выполнено тождество (16).

Таким образом, из условия леммы следует условие (i).

Пусть $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_{d+1}$. Если в элементе $v \in R_{c,n}(V)$ один коммутатор содержит два представителя одного кососимметричного набора, то с учетом свойства $(*)$ элемент v будет принадлежать пространству $R_{c+1,n}(V)$. Поэтому, применяя метод, который использовался для доказательства условия (i), из условия леммы получаем также условие (ii). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $V \subseteq V_s$ над произвольным полем K. Пусть также имеется такой набор элементов поля K: β_σ, $\sigma \in S_{d+1}$, где d — неотрицательное целое число, что для некоторого целого числа $m \geq 0$ в пространстве $R_{d+1,n}(V)$ выполнено полилинейное тождество вида*

$$\sum_{\sigma_m \in S_{d+1}} \cdots \sum_{\sigma_1 \in S_{d+1}} \beta_{\sigma_m} \dots \beta_{\sigma_1} [y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, \dots, x_{m\sigma_m(1)}] \\ \dots [y_{2d+1}, y_{2d+2}, x_{1\sigma_1(d+1)}, x_{2\sigma_2(d+1)}, \dots, x_{m\sigma_m(d+1)}] = 0. \quad (17)$$

Тогда

(i) *существует такое целое k, что в пространстве $R_{c,n}(V)$, $c = d+1, \dots, s-1$, будут выполняться все полилинейные тождества вида*

$$\sum_{\sigma_k \in S_{d+1}} \cdots \sum_{\sigma_1 \in S_{d+1}} \beta_{\sigma_k} \dots \beta_{\sigma_1} q t_1 \dots [t_{i_1}, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, \dots, x_{k\sigma_k(1)}] \\ \dots [t_{i_{d+1}}, x_{1\sigma_1(d+1)}, x_{2\sigma_2(d+1)}, \dots, x_{k\sigma_k(d+1)}] \dots t_c = 0,$$

где q — некоторый моном, $t_1, \dots, t_c$ — некоторые коммутаторы, содержащие не менее двух переменных;

(ii) *если* $\beta_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_{d+1}$, *тогда существует такое целое* $p \geq 0$, *что в многообразии* V *выполнено полилинейное тождество*

$$[y_1, y_2, \bar{x}_{11}, \tilde{x}_{12}, \dots, \bar{\bar{x}}_{1p}][y_3, y_4, \bar{x}_{21}, \tilde{x}_{22}, \dots, \bar{\bar{x}}_{2p}] \\ \dots [y_{2d+1}, y_{2d+2}, \bar{x}_{(d+1)1}, \tilde{x}_{(d+1)2}, \dots, \bar{\bar{x}}_{(d+1)p}] = 0.$$

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 4. *Пусть* $V \subseteq V_s$ *и* d *— неотрицательное целое число. Тогда если в пространстве* $R_{d,n_1}(V)$ *выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида* (14), *то в пространстве* $R_{d+1,n_2}(V)$ *также выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида* (17).

Доказательство. Пусть в пространстве $R_{d,n_1}(V)$ выполнено тождество (14) для некоторого целого m. Пусть элемент v вида (17) содержит достаточно большое количество k, значительно большее числа m, наборов длины $d+1$. Запишем элемент v в виде $v = q_1 q_2 \dots q_{d+1}$, где $q_1, \dots, q_{d+1}$ — коммутаторы. Раскрывая коммутатор q_1, представим элемент v в виде линейной комбинации элементов такого вида: $w_1[y_1, y_2]w_2 q_2 \dots q_{d+1}$, где w_1, w_2 — мономы, состоящие из первых номеров. Если моном w_2 содержит не менее m первых номеров, то нетривиальное тождество

$$\sum_{\sigma_k \in S_{d+1}} \dots \sum_{\sigma_1 \in S_{d+1}} \alpha_{\sigma_k} \dots \alpha_{\sigma_1} w_1 [y_1, y_2] w_2 q_2 \dots q_{d+1} = 0$$

в пространстве $R_{d+1,n_2}(V)$ есть следствие тождества (14) в $R_{d,n_1}(V)$. Если же в мономе w_2 будет менее m первых номеров, то в мономе w_1 первых номеров будет более чем m. Будем передвигать коммутатор $[y_1, y_2]$ вправо, попадая в рассмотренные случаи в лемме 2.

Таким образом, в пространстве $R_{d+1,n_2}(V)$ выполнено нетривиальное тождество вида (17). Лемма доказана.

3. Экспоненты подмногообразий в var(UT_s)

Теорема 3. *Пусть* V *— подмногообразие в* V_s *над произвольным полем* K *и* d *— некоторое неотрицательное целое число. Пусть также имеется набор элементов* $\{\alpha_\sigma \mid \sigma \in S_{d+1}\}$ *поля* K, *состоящий не из одних нулей, такой, что в пространстве* $R_{d,n}(V)$ *выполнено тождество* (14) *для некоторого целого* m. *Тогда* $\operatorname{Exp}(V) \leq d$.

Доказательство. Из леммы 1 и теоремы 2 следует, что $\operatorname{Exp}(V) \leq d$ тогда и только тогда, когда существует такое целое число m, что в пространстве $R_{s-1,n}(V)$ будут линейно зависимы любые наборы элементов вида

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)} \dots t_1 \dots [t_{i_1}, x_{\sigma(m+1)}, x_{\sigma(m+2)}, \dots, x_{\sigma(2m)}] \\ \dots [t_{i_d}, x_{\sigma(dm+1)}, x_{\sigma(dm+2)}, \dots, x_{\sigma((d+1)m)}] \dots t_{s-1}, \quad \sigma \in S^*_{(d+1)m}, \tag{18}$$

и линейно зависимы любые наборы элементов такого вида

$$q t_1 \dots [t_{i_1}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}] \dots [t_{i_2}, x_{\sigma(m+1)}, x_{\sigma(m+2)}, \dots, x_{\sigma(2m)}] \\ \dots [t_{i_{d+1}}, x_{\sigma(dm+1)}, x_{\sigma(dm+2)}, \dots, x_{\sigma((d+1)m)}] \dots t_{s-1}, \quad \sigma \in S^*_{(d+1)m}, \tag{19}$$

где q — некоторый, возможно, пустой, моном, $t_1, \dots, t_{s-1}$ — некоторые коммутаторы, содержащие не менее двух переменных.

Пусть выполнены условия теоремы. Из леммы 2 следует, что тождество (14) влечет тождества вида (15) в пространствах $R_{c,n}(V)$, $c = d, d+1, \ldots, s-1$, поэтому любые наборы элементов вида (18) будут линейно зависимы для некоторого числа m. Аналогичным образом из тождества (14) с учетом лемм 3 и 4 следует линейная зависимость элементов вида (19) в пространстве $R_{s-1,n}(V)$. Поэтому $\mathrm{Exp}(V) \le d$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *но тождество* (14) *выполнено в многообразии* V. *Тогда* $\mathrm{Exp}(V) \le d$.

Доказательство следует из теоремы 3, поскольку тождество (14) будет выполнено в пространстве $R_{d,n}(V)$ согласно определению данных пространств.

В случае алгебр Ли известен такой результат С. П. Мищенко [9]: если характеристика основного поля не равна двум и для некоторого многообразия алгебр Ли V существует такое n_0, что выполнено неравенство $c_{n_0}(V) < 2^{[\frac{n_0-1}{2}]}$, где квадратные скобки означают целую часть числа, то коммутант многообразия V будет нильпотентным. В работе [10] С. П. Мищенко и О. И. Череватенко обобщили данный результат на случай многообразий алгебр Лейбница. Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству, приведенному в работе [10].

Теорема 4. *Пусть V — ассоциативное многообразие и характеристика основного поля не равна двум. Если для некоторого n_0 выполнено неравенство $c_{n_0}(V) < 2^{[\frac{n_0-1}{2}]}$, то существует такое целое число s, что V является подмногообразием в V_s.*

Следствие 2. (i) *Пусть $V \subset V_s$ такое, что $c_n(V) < n^\beta(2-\varepsilon)^n$ для некоторых констант β, $0 < \varepsilon < 1$ и всех достаточно больших n. Тогда рост многообразия V полиномиален.*

(ii) *Если характеристика основного поля не равна двум, то не существует многообразий ассоциативных алгебр, рост которых был бы промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным.*

Доказательство. Первое утверждение следует из оценок роста подмногообразий в V_s (теорема 2). Утверждение (ii) вытекает из п. (i) и теоремы 4.

Следствие 3. *Пусть для многообразия ассоциативных алгебр V выполняется неравенство $\underline{\mathrm{EXP}}(V) < \sqrt{2}$ и $\mathrm{char}\, K \ne 2$. Тогда многообразие V имеет полиномиальный рост.*

Доказательство. Если для нижней экспоненты некоторого многообразия V выполнено неравенство $\underline{\mathrm{EXP}}(V) < \sqrt{2}$, то по теореме 4 V является подмногообразием в V_s для некоторого целого значения s, а по следствию 2 рост многообразия V будет полиномиальным.

Теорема 5. *Пусть V — многообразие ассоциативных алгебр и характеристика основного поля не равна двум. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *последовательность $c_n(V)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена полиномом;*

(ii) $\mathrm{Exp}(V) \le 1$.

Доказательство. Условие (i) очевидным образом влечет (ii). Обратно, если $\mathrm{Exp}(V) \le 1$, то по следствию 3 последовательность $c_n(V)$ ограничена полиномом.

4. Случай поля нулевой характеристики

Напомним, что в случае поля нулевой характеристики алгебра верхнетреугольных матриц UT_s порождает многообразие $V_s = \mathrm{var}(UT_s)$ [7].

Лемма 5. *Если диаграмма Юнга d содержит больше чем $s-1$ клеток вне первых s строк, то элемент, соответствующий диаграмме d, будет равен нулю в многообразии V_s.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что если диаграмма Юнга d содержит больше чем $c-1$ клеток вне первых c строк, то соответствующий неприводимый S_n-модуль не входит в $R_{c-1,n}(V_s)$.

Пусть $f \in R_{c-1,n}(V_s)$: $f = q[t_1,\dots]\dots[t_{c-1},\dots]$ и диаграмма Юнга d содержит более чем $c-1$ клеток вне первых c строк. Тогда для элемента $e_{\tau d}\cdot f$, где $\tau \in S_n$, возможны 2 случая.

1. Либо три переменные одного кососимметричного набора попадут в один коммутатор $[t_i,\dots]$, либо две переменные — в моном q. Тогда, учитывая свойство $(*)$ и тождество Якоби, получаем, что $e_{\tau d}\cdot f = 0$ в пространстве $R_{c-1,n}(V_s)$.

2. Два кососимметричных набора имеют по два своих представителя в одном коммутаторе $[t_i,\dots]$. Снова учитывая свойство $(*)$ и тождество Якоби, получаем, что $e_{\tau d}\cdot f = 0$ в $R_{c-1,n}(V_s)$. Лемма доказана.

Для произвольного многообразия $V \subseteq V_s$ определим следующие числовые значения, используя разложение (1):

$$q_n(k,V) = \max\{\lambda_k \mid \lambda \vdash n,\ m_\lambda(V) > 0\},$$

$$d_0(V) = \max\bigl\{k \mid \varlimsup_{n\to\infty} q_n(k,V) = +\infty,\ k = 1,\dots,s\bigr\}.$$

В следующей лемме докажем такое свойство многообразий $V \subseteq V_s$: если $d_0(V) \ge 1$, то существует такая константа $C \le 3(s-1)$, что для любого $r \in \{1,2,\dots,d_0(V)\}$ и любого n найдется диаграмма Юнга степени n, содержащая прямоугольник с боковой стороной r, у которой число клеток вне прямоугольника $\le C$ и соответствующий S_n-модуль для этой диаграммы Юнга будет ненулевым.

Лемма 6. *Пусть V — подмногообразие в V_s и $d_0(V) \ge 1$. Тогда для любых $r \in \{1,2,\dots,d_0(V)\}$ и n выполняется неравенство*

$$n - rq_n(r,V) \le 2(s-1) + r - 1. \tag{20}$$

Доказательство. Докажем лемму от противного. Предположим, что существуют такие числа N и $r_0 \in \{1,2,\dots,d_0(V)\}$, что

$$N - r_0 q_N(r_0,V) \ge 2(s-1) + r_0.$$

Обозначим $m = q_N(r_0,V) + 1$.

Пусть d — некоторая диаграмма Юнга степени N, содержащая прямоугольник $r_0 \times m$. Тогда неприводимые S_N-модули, соответствующие диаграмме d, будут нулевыми в многообразии V по свойству значения $q_N(r_0,V)$. Покажем, что для всех $c = r_0-1,\dots,s-1$ в $R_{c,N}(V)$ выполняются все полилинейные тождества степени N вида

$$qt_1\dots[t_{i_1},\bar{x}_{11},\tilde{x}_{12},\dots,\bar{\bar{x}}_{1m}]\dots[t_{i_2},\bar{x}_{21}\tilde{x}_{22},\dots,\bar{\bar{x}}_{2m}]$$
$$\dots[t_{i_{r_0}},\bar{x}_{r_01},\tilde{x}_{r_02},\dots,\bar{\bar{x}}_{r_0m}]\dots t_c = 0, \tag{21}$$

$$\bar{x}_{11}\tilde{x}_{12}\ldots\bar{\bar{x}}_{1m}\ldots t_1\ldots[t_{i_1},\bar{x}_{21}\tilde{x}_{22},\ldots,\bar{\bar{x}}_{2m}]$$
$$\ldots[t_{i_{r_0-1}},\bar{x}_{r_01},\tilde{x}_{r_02},\ldots,\bar{\bar{x}}_{r_0m}]\ldots t_c=0, \quad (22)$$

где q — некоторый моном, $t_1,\ldots,t_c$ — некоторые коммутаторы, зависящие не менее чем от двух переменных. Элементы (21) и (22) по свойству $(*)$ симметричны относительно переменных $\bar{x}_{i1,}\tilde{x}_{i2},\ldots,\bar{\bar{x}}_{im}$, $i=1,\ldots,r_0$. Пусть группа S_{r_0m} действует на переменные, принадлежащие кососимметричным наборам. Тогда S_{r_0m}-модуль, порожденный элементами вида (21), есть сумма неприводимых S_{r_0m}-модулей, соответствующих прямоугольнику $r_0\times m$. То же самое справедливо и для элементов вида (22). Если M — S_N-модуль, порожденный элементами вида (21) либо вида (22), то по правилу Литтлвуда — Ричардсона модуль M раскладывается в сумму неприводимых S_N-модулей, соответствующих только тем диаграммам, которые содержат прямоугольник $r_0\times m$, поэтому $M=0$ в многообразии V. Таким образом, справедливость тождеств (21) и (22) в пространстве $R_{c,N}(V)$ доказана.

Пусть $n\geq N$, $m_0=2(s-1)+\binom{s}{r_0}(m-1)+1$ и некоторая диаграмма Юнга d степени n содержит прямоугольник $r_0\times m_0$. Тогда все неприводимые модули из разложения $P_n(V)$, соответствующие диаграмме d, являются нулевыми. Действительно, пусть $f\in R_{c,n}(V)$. Элемент $e_{\tau d}\cdot f$ содержит не менее m_0 кососимметричных наборов, каждый из которых состоит не менее чем из r_0 переменных. При распределении данных кососимметричных наборов в элементе $e_{\tau d}\cdot f$, учитывая свойство $(*)$, будем получать элементы вида (21) либо вида (22). Поэтому элемент $e_{\tau d}\cdot f$ равен нулю в $R_{c,n}(V)$. Таким образом, для любого $n\geq N$ выполнено неравенство $q_n(r_0,V)<m_0$. Противоречие с тем, что последовательность $\{q_n(r_0,V)\}_{n\geq 1}$ неограниченна. Лемма доказана.

Замечание. Пусть $V\subseteq V_s$. Из леммы 6 следует, что значение $q_n(k,V)$ можно интерпретировать еще следующим образом: это максимальное из тех значений m, для которых существует такое $c=c(m)$, что в пространстве $R_{c,n}(V)$ найдется ненулевой элемент либо вида

$$qt_1\ldots[t_{i_1},\bar{x}_{11},\tilde{x}_{12},\ldots,\bar{\bar{x}}_{1m}]\ldots[t_{i_2},\bar{x}_{21}\tilde{x}_{22},\ldots,\bar{\bar{x}}_{2m}]\ldots[t_{i_k},\bar{x}_{k1},\tilde{x}_{k2},\ldots,\bar{\bar{x}}_{km}]\ldots t_c,$$

либо вида

$$\bar{x}_{11}\tilde{x}_{12}\ldots\bar{\bar{x}}_{1m}\ldots t_1\ldots[t_{i_1},\bar{x}_{21}\tilde{x}_{22},\ldots,\bar{\bar{x}}_{2m}]\ldots[t_{i_{k-1}},\bar{x}_{k1},\tilde{x}_{k2},\ldots,\bar{\bar{x}}_{km}]\ldots t_c.$$

Лемма 7. *Пусть $V\subseteq V_s$. Тогда существуют такие константы N, α и β, что для последовательности $c_n(V)$ выполняется двойное неравенство*

$$n^\alpha(d_0(V))^n\leq c_n(V)\leq n^\beta(d_0(V))^n$$

для любого $n\geq N$.

Доказательство. Из лемм 5 и 6 следует, что характеры $\chi_n(V)$ лежат в объединении некоторого прямоугольника и полосы $H(d_0(V),0)$ ширины $d_0(V)$. С учетом того, что кодлина произвольного нетривиального ассоциативного многообразия ограничена полиномом [11], получаем, что $c_n(V)\leq n^\beta(d_0(V))^n$ для некоторой константы β и любого n.

По формуле крюков из неравенства (20) следует такое неравенство: $c_n(V)\geq n^\alpha(d_0(V))^n$ для некоторого α и всех n начиная с некоторого номера. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть V — подмногообразие в V_s над полем K нулевой характеристики и d — некоторое неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Exp}(V) \leq d$;

(ii) *найдется набор элементов $\{\alpha_\sigma \mid \sigma \in S_{d+1}\}$ поля K, состоящий не из одних нулей, такой, что для некоторого целого $m \geq 0$ в многообразии V выполнено тождество*

$$\sum_{\sigma_m \in S_{d+1}} \cdots \sum_{\sigma_1 \in S_{d+1}} \alpha_{\sigma_m} \ldots \alpha_{\sigma_1} x_{\sigma_1(1)} x_{\sigma_2(1)} \ldots x_{\sigma_m(1)} [y_1, y_2, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_2(2)}, \ldots, x_{\sigma_m(2)}] \\ \ldots [y_{2d-1}, y_{2d}, x_{\sigma_1(d+1)}, x_{\sigma_2(d+1)}, \ldots, x_{\sigma_m(d+1)}] = 0; \quad (23)$$

(iii) *существует такое целое $p \geq 0$, что в многообразии V справедливо следующее полилинейное тождество:*

$$\bar{x}_{11} \tilde{x}_{12}, \ldots \bar{\bar{\bar{x}}}_{1p} [y_1, y_2, \bar{x}_{21}, \tilde{x}_{22}, \ldots, \bar{\bar{\bar{x}}}_{2p}] \\ \ldots [y_{2d-1}, y_{2d}, \bar{x}_{(d+1)1}, \tilde{x}_{(d+1)2}, \ldots, \bar{\bar{\bar{x}}}_{(d+1)p}] = 0; \quad (24)$$

(iv) *существует такая константа $C = C(V)$, что в сумме (1) $m_\lambda = 0$ в случае, если выполнено условие $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d) > C$.*

Доказательство. Пусть $V \subseteq V_s$ и $\mathrm{Exp}(V) \leq d$. Тогда из леммы 7 с учетом замечания получаем, что существует такое целое $p \geq 0$, что в пространстве $R_{d,n}(V)$ будет выполнено тождество (24). Из леммы 2 следует, что данное тождество будет выполнено и в многообразии V в силу того, что $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_{d+1}$. Поэтому из условия (i) вытекает условие (iii).

Пусть выполняется условие (ii). Заметим, что если $m > 1$, то тождество (23) не является полилинейным. Из данного тождества согласно свойству $(*)$ следует, что в пространстве $R_{d,n}(V)$ будет выполнено полилинейное тождество (14). Поэтому по теореме 3 условие (ii) влечет (i).

Условие (iii) очевидным образом влечет условие (ii), так как в этом случае $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$, $\sigma \in S_{d+1}$.

Эквивалентность условий (i) и (iv) следует из лемм 6 и 7. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть $V \subseteq V_s$ над полем нулевой характеристики, и пусть d — максимальное из всех таких целых чисел k, для которых при любом $m \geq 0$ элементы вида*

$$\bar{x}_1^m \left[y_1, y_2, \bar{x}_2^m\right] \ldots \left[y_{2k-3}, y_{2k-2}, \bar{x}_k^m\right] = 0$$

не принадлежат идеалу тождеств многообразия V. Тогда $\mathrm{Exp}(V) = d_0(V) = d$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Regev A.* Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77, N 6. P. 1067–1069.
2. *Giambruno A., Zaicev M. V.* On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. 1998. V. 140. P. 145–155.
3. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate // Adv. Math. 1999. V. 142. P. 221–243.
4. *Petrogradsky V. M.* Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // Serdika Math. 2000. V. 26. P. 1001–1010.
5. *Рацеев С. М.* Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2006. Т. 46, № 6. С. 70–77.

6. *Рацеев С. М.* Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 108–117.

7. *Мальцев Ю. Н.* Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 393–400.

8. *Петроградский В. М.* О функциях сложности для T-идеалов ассоциативных алгебр // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 6. С. 887–897.

9. *Мищенко С. П.* Многообразия алгебр Ли со слабым ростом последовательности коразмерностей // Вестн. МГУ. 1982. Т. 5. С. 63–66.

10. *Мищенко С. П., Череватенко О. И.* Многообразия алгебр Лейбница слабого роста // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2006. Т. 49, № 9. С. 19–23.

11. *Berele A., Regev A.* Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras // J. Algebra. 1983. V. 82. P. 559–567.

Статья поступила 28 января 2010 г.

Рацеев Сергей Михайлович
Ульяновский гос. университет,
кафедра информационной безопасности и теории управления,
ул. Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
RatseevSM@rambler.ru