Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ВЕЙЛЯ ДЛЯ ПОЛИЭДРОВ С НЕ КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Б. А. Шаимкулов, Э. М. Махкамов

Аннотация. Получена интегральная формула, которая обобщает формулу Хуа Ло-кена для шара Ли.

Ключевые слова: интегральное представление, вычет, полиэдр.

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$. Если $z, w \in \mathbb{C}^n$, то положим $(z, w) = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n$.

Пусть $B_{L,1} = B_L = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z,z)|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0,\ |(z,z)| < 1\}$ — классическая область четвертого типа (шар Ли). Определим шар Ли радиуса $r > 0$ как образ B_L при гомотетии $z \longrightarrow r^{-1}z$. Согласно интегральной формуле Хуа Ло-кена [1] всякую функцию $h(z) \in \mathscr{O}(B_L) \cap C(\Gamma \cup B_L)$ можно представить в виде интеграла

$$h(z) = C_n \int\limits_{\Gamma} \frac{h(\xi)\, d\xi}{(\xi - z, \xi - z)^{\frac{n}{2}}}, \quad z \in B_L, \tag{1}$$

где $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : |(z,z)| = 1,\ |z| = 1\}$ — остов области B_L, а порядок следования дифференциалов и C_n выбран согласно условию $C_n \int\limits_{\Gamma} \frac{d\xi}{(\xi,\xi)^{\frac{n}{2}}} = 1$.

В данной работе получено обобщение интегрального представления (1), которое имеет такую же природу, как и известное интегральное представление Бергмана — Вейля в полиэдрах (см. [2]).

Пусть дано отображение $f = f(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, голоморфное в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^n$. С ним ассоциируется множество (полиэдр) $D_{f,r} = f^{-1}(B_{L,r})$, т. е. прообраз шара Ли $B_{L,r}$ радиуса r. Таким образом,

$$D_{f,r} = \{z \in G : |(f(z), f(z))|^2 - 2r^2|f(z)|^2 + r^4 > 0,\ |(f(z), f(z))| < r^2\}.$$

Отметим, что области $D_{f,r}$ можно определить одним неравенством [1, с. 51]:

$$D_{f,r} = \{z \in G : \rho(f(z)) = \sqrt{|f(z)|^2 + \sqrt{|f(z)|^4 - |(f(z), f(z))|^2}} < r\}.$$

В [3] доказано, что $\rho(z)$ является метрикой Каратеодори.

Известная теорема Хефера (см. [2]) утверждает, что для некоторой окрестности U области $D_{f,r}$ существуют такие функции $P_\nu^k(\xi, z) \in \mathscr{O}(U \times U)$, что при всех $(\xi, z) \in (U \times U)$ имеют место равенства

$$f_k(\xi) - f_k(z) = \sum_{l=1}^{n} (\xi_l - z_l) P_l^k(\xi, z), \quad k = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $H(\xi, z)$ определитель матрицы $\|P_\nu^k\|$ порядка n.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ОТ–Ф1–116.

Теорема 1. *Пусть функция $h(z)$ голоморфна в замыкании области $D_{f,r}$. Тогда для всякой точки $z \in D_{f,r}$ справедлива интегральная формула*

$$h(z) = C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi)H(\xi,z)\,d\xi}{(f(\xi)-f(z), f(\xi)-f(z))^{\frac{n}{2}}}, \tag{2}$$

где $\Gamma_{f,r} = \{z \in G : |(f(z), f(z))| = r^2,\ |f(z)| = r\}$ *— остов области* $D_{f,r}$.

Для доказательства теоремы сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\xi \in \mathbb{C}^n$ такова, что $\rho(\xi) < \varepsilon$. Тогда для всех δ, $0 < \delta < \varepsilon - \rho(\xi)$, в $G_* = G\backslash\{z : (f(z)-\xi, f(z)-\xi) = 0\}$ имеет место гомологичность циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f,\varepsilon}$, где*

$$\Gamma_{f-\xi,\delta} = \{z \in G : |(f(z)-\xi, f(z)-\xi)| = \delta^2,\ |f(z)-\xi| = \delta\}.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим $(n+1)$-мерную цепь

$$C = \{z \in G : |(f(z)-t\xi, f(z)-t\xi)| = (\varepsilon - t\rho(\xi))^2,\ |f(z)-t\xi| = \varepsilon - t\rho(\xi),\ 0 \le t \le 1\}.$$

Отметим, что для точек C выполняется равенство $\rho(f(z)-t\xi) = \varepsilon - t\rho(\xi)$. Сначала покажем, что C лежит в $D_{f,\varepsilon}$. Действительно, если $z^0 \in G \setminus \overline{D}_{f,\varepsilon}$, то $\rho(f(z^0)) > \varepsilon$. Так как $\rho(z)$ является метрикой Каратеодори, имеем

$$\rho(f(z^0) - t\xi) \ge \rho(f(z^0)) - t\rho(\xi) > \varepsilon - t\rho(\xi).$$

Неравенство показывает, что $z^0 \notin C$. Таким образом, C — компактная цепь.

Теперь докажем, что носитель $|C|$ цепи C лежит в G_*. Пусть $z \in C$. Так как с помощью ортогонального преобразования и поворота любую точку множества C можно преобразовать в любую точку из C и ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение (z,z), последнее утверждение достаточно доказать лишь для точки $z \in C$, удовлетворяющей равенству $f(z) - t\xi = (\varepsilon - t\rho(\xi), 0, \ldots, 0)$. Предположим, что $(f(z)-\xi, f(z)-\xi) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&(f(z) - t\xi + t\xi - \xi, f(z) - t\xi + t\xi - \xi)\\
&\quad = (f(z)-t\xi, f(z)-t\xi) - 2(1-t)(f(z)-t\xi, \xi) + (1-t)^2(\xi,\xi)\\
&\quad = (\varepsilon - t\rho(\xi))^2 - 2(1-t)(\varepsilon - t\rho(\xi))\xi_1 + (1-t)^2(\xi,\xi) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда при $t = 1$ получаем $\rho(\xi) = \varepsilon$, что противоречит условию леммы. При $t \ne 1$ из (3) следует, что $b^2 - 2b\xi_1 + (\xi,\xi) = 0$, или $(b-\xi_1)^2 = (\acute{\xi}, \acute{\xi})$, где $b = (\varepsilon - t\rho(\xi))/(1-t)$, $\acute{\xi} = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|(\xi,\xi)|^2 - 2\varepsilon^2|\xi|^2 + \varepsilon^4 = |b^2 - 2b\xi_1|^2 - 2\varepsilon^2|\xi|^2 + \varepsilon^4\\
&= b^4 - 4b^3\operatorname{Re}\xi_1 + 4b^2|\xi_1|^2 - 2\varepsilon^2|\xi|^2 + \varepsilon^4 = 2b^2|b-\xi_1|^2 + 2b^2|\xi_1|^2 - 2\varepsilon^2|\xi|^2 + \varepsilon^4 - b^4\\
&= 2b^2(|(\acute{\xi},\acute{\xi})| - |\acute{\xi}|^2) + (b^2 - \varepsilon^2)(2|\xi|^2 - \varepsilon^2 - b)\\
&\le 2b^2(|(\acute{\xi},\acute{\xi})| - |\acute{\xi}|^2) - (b^2 - \varepsilon^2)^2 \le 0,
\end{aligned}$$

поскольку $|(\acute{\xi},\acute{\xi})| \le |\acute{\xi}|^2$, $|\acute{\xi}| \le \rho(\xi) < \varepsilon$. Последнее неравенство противоречит условию $\rho(\xi) < \varepsilon$. Наконец, для любых $\delta < \varepsilon - \rho(\xi)$ циклы $\Gamma_{f-\xi,\delta}$ принадлежат G_*, и имеет место гомологичность циклов $\Gamma_{f-\xi,\delta} \sim \Gamma_{f-\xi,\varepsilon-\rho(\xi)} = \partial C - \Gamma_{f,\varepsilon}$, откуда получаем утверждение леммы.

Приведем одну интегральную интерпретацию локального вычета, которая введена в [4] и будет применена для доказательства теоремы.

Пусть отображение $f = f(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ голоморфно в окрестности U_a точки $a \in \mathbb{C}^n$ и имеет в этой точке изолированный нуль. Для ростка $h(z) : U_a \to \mathbb{C}$ и отображения $f(z)$ введем действие локального вычета в точке a по формуле

$$\operatorname{res}_f(h) = C_n \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h\,dz}{(f,f)^{\frac{n}{2}}},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Доказательство теоремы 1. Для $z \in D_{f,r}$ имеем $\rho(f(z)) < r$, поэтому согласно лемме цикл $\Gamma_{f,r}$ гомологичен в области регулярности подынтегральной формы в (2) циклу

$$\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta} = \{\xi \in G : |(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))| = \delta^2,\ |f(\xi) - f(z)| = \delta\},$$

где $\delta < r - \rho(f(z))$. С другой стороны, $\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}$ гомологичен сумме $\sum\limits_{\nu} \Gamma_{\xi^{(\nu)}(z),\delta}$, где $\Gamma_{\xi^{(\nu)}(z),\delta} = \{\xi \in U_{\xi^{(\nu)}(z)} : |(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))| = \delta^2,\ |f(\xi) - f(z)| = \delta\}$. Здесь $\xi^{(\nu)}(z)$ — нули отображения $f(\xi) - f(z)$, среди которых есть и $\xi = z$.

Таким образом, согласно формуле Хуа Ло-кена (1), определению 2 и формуле преобразования локального вычета [5] получим

$$h(z) = C_n \int\limits_{\substack{|(\xi-z,\xi-z)|=r^2,\\ |\xi-z|=r}} \frac{h(\xi)\,dz}{(\xi - z, \xi - z)^{\frac{n}{2}}}$$
$$= \operatorname*{res}_{z}{}_{(f(\xi)-f(z))}\big(h \det \|P_l^k\|\big) = \sum_{\nu} \operatorname*{res}_{\xi^{(\nu)}(z)}{}_{(f(\xi)-f(z))}\big(h \det \|P_l^k\|\big).$$

Известно [5, § 5], что $\det \|P_l^k\| \in I_{\xi^{(\nu)}(z)}(f(\xi) - f(z))$ для $\xi^{(\nu)}(z) \neq z$ и вычет в этих точках равен нулю, откуда в силу теоремы локальной двойственности [5, § 16] получаем

$$\sum_{\nu} \operatorname*{res}_{\xi^{(\nu)}(z)}{}_{(f(\xi)-f(z))}\big(h \det \|P_l^k\|\big) = \operatorname*{res}_{z}{}_{(f(\xi)-f(z))}\big(h \det \|P_l^k\|\big)$$
$$= C_n \int\limits_{\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}} \frac{h(\xi) H(\xi, z)\,d\xi}{(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))^{\frac{n}{2}}} = C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi) H(\xi, z)\,d\xi}{(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))^{\frac{n}{2}}}.$$

Теорема доказана.

В случае $f(z) \equiv z$ определитель $H(\xi, z)$ в (2) равен 1 и формула (2) превращается в формулу (1).

Следствие. *Если функция $h(z)$ голоморфна в замыкании области $D_{f,r}$, то она достигает своего максимального значения по модулю на $\Gamma_{f,r}$.*

Доказательство. Пусть $h(z)$ голоморфна на $\overline{D}_{f,r}$, тогда для любого натурального k имеем

$$h^k(z) = C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h^k(\xi) H(\xi, z)\,d\xi}{(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))^{\frac{n}{2}}}.$$

Следовательно,

$$|h(z)|^k \leq (\sup_{\Gamma_{f,r}} |h^k(\xi)|) C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \left| \frac{H(\xi, z)\, d\xi}{(f(\xi) - f(z), f(\xi) - f(z))^{\frac{n}{2}}} \right|.$$

Извлекая корень k-й степени и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим требуемое.

Следующая теорема является вариантом принципа Руше.

Теорема 2. *Пусть отображение $g(z) : G \to \mathbb{C}^n$ голоморфно и удовлетворяет на $\Gamma_{f,r}$ неравенству*

$$|g(z)| < \frac{|f(z)|}{\sqrt{2}}.$$

Тогда отображения $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в $D_{f,r}$ одинаковое число нулей.

Доказательство. Из условия теоремы в силу принципа максимума модуля следует, что $|g(z)| < r/\sqrt{2}$ на $\overline{D}_{f,r}$. С другой стороны, в каждой точке $z \in \partial D_{f,r}$ справедливо равенство

$$\rho(f(z)) = \sqrt{|f(z)|^2 + \sqrt{|f(z)|^4 - |(f(z), f(z))|^2}} = r.$$

Тогда на $\partial D_{f,r}$ имеем $r/\sqrt{2} \leq |f(z)|$, так как $\rho(f(z)) \leq \sqrt{2}|f(z)|$.

Таким образом, в каждой точке $z \in \partial D_{f,r}$ выполняется неравенство

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Отсюда по принципу Руше (см. [2]) получаем утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
3. *Suzuki M.* The intrinsic metrics on the circular domains in C^n // Pacific J. Math. 1984. V. 112, N 1. P. 249–256.
4. *Цих А. К., Шаимкулов Б. А.* Интегральные реализации вычета Гротендика и его преобразование при композициях // Вестн. КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. 2005. № 1. С. 140–144.
5. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.

Статья поступила 28 февраля 2009 г.

Шаимкулов Баходир Аллабердиевич, Махкамов Эркин Мусурманович
Национальный университет Узбекистана, механико-математический факультет,
Вузгородок, Ташкент 100174, Узбекистан
shoimkba@rambler.ru, erkin_mah@mail.ru