Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 512.534.2+510.227+519.175

О СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ПОЛУГРУППЫ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. А. Колмыков

Аннотация. Для элементов подмножеств полугруппы частичных преобразований исследуется вопрос о равномощности множеств коммутирующих и некоммутирующих элементов.

Ключевые слова: полугруппа, частичное преобразование, кардинальное число.

При рассмотрении соотношения коммутативности $ab = ba$ возникает следующее понятие. Полугруппу назовем *сбалансированной*, если для любого ее неединичного и ненулевого элемента равномощны множества коммутирующих и некоммутирующих с ним элементов. Это свойство интересно тем, что некоторые важные полугруппы преобразований являются сбалансированными.

Например, в [1] доказано, что в случае несчетности множества M всякая полугруппа, заключенная между симметрической группой $S(M)$ и симметрической инверсной полугруппой $\mathscr{I}(M)$, является сбалансированной.

В [1] мы обнаружили большее: при несчетности M свойством сбалансированности обладает всякое множество, заключенное между $S(M)$ и $\mathscr{I}(M)$. Это несет больше информации о ситуациях перестановочности элементов в таких полугруппах.

В настоящей статье рассматриваются симметрическая полугруппа $\mathscr{T}(M)$ и полугруппа $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$, состоящая из всех частичных преобразований множества M. Мы доказываем, что в случае, когда конфинальный характер множества M больше, чем $\aleph_0$, всякое множество, заключенное между $\mathscr{T}(M)$ и $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$, является сбалансированным.

Частичным преобразованием множества M называется всякое отображение $f : L \to M$, где L — подмножество в M, называемое *областью определения* $D(f)$ частичного преобразования f. Частичные преобразования множества M образуют (относительно операции суперпозиции) полугруппу $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$. Элементы из $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$, имеющие областью определения M, составляют симметрическую полугруппу $\mathscr{T}(M)$.

Подмножество F некоторой полугруппы назовем *сбалансированным*, если для любого неединичного и ненулевого элемента $a \in F$ множество элементов, содержащихся в F и коммутирующих с a, равномощно множеству элементов, содержащихся в F и не коммутирующих с a.

Конфинальным характером $cf(\alpha)$ *кардинального числа* α называется наименьшее из кардинальных чисел γ таких, что $\alpha = \sum\{\beta_t : t \in T\}$, где $\beta_t < \alpha$ для любого $t \in T$ и $|T| = \gamma$. *Конфинальным характером множества* называется конфинальный характер его мощности.

Теорема. *Пусть $cf(M) > \aleph_0$ и $\mathscr{T}(M) \subseteq F \subseteq \mathscr{P}\mathscr{T}(M)$. Тогда множество F сбалансировано.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 2, 3 и 6. Определим понятия, которые используются в этих леммах.

Через $\mathrm{Cent}(g)$ обозначим централизатор элемента g в полугруппе $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$.

Централизатор частичного преобразования удобно исследовать на языке теории графов. *Ориентированный граф* (*орграф*) — это пара (V_0, V_1), где $V_1 \subseteq V_0^2$. Элемент $(u, v) \in V_1$ обозначается через $\overrightarrow{uv}$ и называется *ориентированным ребром* (или *стрелкой*) *с началом u и концом v*. Если $G = (V_0, V_1)$ — орграф, то множества V_0 и V_1 обозначаются через $V_0(G)$ и $V_1(G)$ соответственно.

Всякому элементу $g \in \mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ соответствует орграф O_g с множеством вершин M и множеством стрелок $\{(x, g(x))\}_{x \in D(g)}$. Если орграф есть O_g для некоторого частичного преобразования g, то такой орграф назовем *частичным функциональным графом* (если $d(g) = M$, то O_g называется *функциональным графом*).

Приведем локальное и глобальное описания частичных функциональных графов.

Степень захода (соответственно *исхода*) $\deg_+ v$ (соответственно $\deg_- v$) вершины v орграфа — это мощность множества стрелок с концом (соответственно началом) v. Отметим, что стрелка-петля $\overrightarrow{vv}$ дает вклад 1 и в степень захода, и в степень исхода.

Локальное описание частичных функциональных графов: орграф является частичным функциональным графом тогда и только тогда, когда степень исхода каждой вершины не превосходит 1.

Для $g \in \mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ через $D^c(g)$ обозначим дополнение $D(g)$ до M. В орграфе O_g вершины из $D^c(g)$ и только они имеют нулевую степень исхода.

Орграф называется *связным*, если при замене всех ориентированных ребер неориентированными получающийся граф связен (в естественном смысле). *Компонентой орграфа* называется компонента связности. Для описания всех частичных функциональных графов достаточно описать все связные частичные функциональные графы.

Через $\overrightarrow{P}_1$ обозначается орграф, для которого множество V_0 одноэлементно, а V_1 пусто. Пусть n — натуральное число. *Контур* $\overrightarrow{C}_n$ — это орграф с множеством вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеством стрелок $\{\overrightarrow{v_1v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}v_n}, \overrightarrow{v_nv_1}\}$ (если $n = 1$, то $V_0 = \{v_1\}$, $V_1 = \{\overrightarrow{v_1v_1}\}$). *Лучом* $\overrightarrow{N}$ назовем орграф с множеством вершин $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и множеством стрелок $\{\overrightarrow{v_iv_{i+1}}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Включение $G \subseteq H$ орграфов означает включения $V_0(G) \subseteq V_0(H)$ и $V_1(G) \subseteq V_1(H)$. Говорят, что *орграф G содержит контур* (соответственно *луч*), если $\overrightarrow{C}_n \subseteq G$ (соответственно $\overrightarrow{N} \subseteq G$).

Орграф называется *ордеревом*, если при замене всех ориентированных ребер неориентированными получается дерево (т. е. связный граф без циклов, в частности, без петель). *Корневое ордерево* — это ордерево, в котором отмечена одна вершина, называемая *корнем*. *Расстояние между вершинами в ордереве* — это расстояние между этими вершинами в дереве, получающемся заменой ориентированных ребер неориентированными. *Высота $h_{\dot{T}}(v)$ вершины v корневого ордерева $\dot{T}$* — это расстояние от v до корня. Будем говорить, что корневое ордерево $\dot{T}$ *ориентировано к корню*, если $h_{\dot{T}}(u) = h_{\dot{T}}(v) + 1$ для любого $\overrightarrow{uv} \in V_1(\dot{T})$. В частности, одновершинное корневое ордерево $\dot{P}_1$ ориентировано к корню, так как $V_1(\dot{P}_1) = \varnothing$.

Пусть G — орграф, $v \in V_0(G)$, $\dot{T}$ — корневое ордерево. Слова «к вершине v приклеим корневое ордерево $\dot{T}$» означают, что в дизъюнктном объединении орграфов G и $\dot{T}$ произведено отождествление вершины v и корня ордерева $\dot{T}$, после чего отмеченность вершины забыта; таким образом, получился некоторый новый (не корневой) орграф. Отметим, однако, что если $\dot{T} = \dot{P}_1$, то полученный орграф совпадает с G.

Глобальное описание связных частичных функциональных графов следующее.

Лемма 1. *Возьмем орграф $\overrightarrow{P}_1$, $\overrightarrow{C}_n$ или $\overrightarrow{N}$. Ко всем его вершинам приклеим некоторые корневые ордеревья, ориентированные к корню. Получим связный частичный функциональный граф. Обратно, всякий связный частичный функциональный граф можно получить таким образом.*

Доказательство. Нам понадобится описание связных функциональных графов. Оно имеется в § 4.4 книги [2]. Однако это описание (хотя и несложное) неудобно для нас, так как использует сложную терминологию. Терминология, которую используем мы, сейчас более удобна, так как она приспособлена к доказательству нашей теоремы.

Глобальное описание связных функциональных графов таково. Возьмем орграф $\overrightarrow{C}_n$ или $\overrightarrow{N}$. Ко всем его вершинам приклеим некоторые корневые ордеревья, ориентированные к корню. Получим связный функциональный граф. Обратно, всякий связный функциональный граф можно получить таким образом.

Докажем только вторую часть утверждения леммы (так как лишь эта часть не вполне очевидна). Рассмотрим связный частичный функциональный граф O_g. Пусть $D^c(g) = \varnothing$. Тогда O_g — связный функциональный граф. Он получается в результате процедуры, описанной в предыдущем абзаце.

Пусть $D^c(g) \neq \varnothing$. Сначала покажем, что $|D^c(g)| = 1$. Предположим противное: $v_1, v_2 \in D^c(g)$. Так как орграф O_g связный, то в соответствующем неориентированном графе вершины v_1 и v_2 соединены простым путем. Ребра этого пути, инцидентные v_1 или v_2, в орграфе направлены соответственно к v_1 и к v_2, так как $v_1, v_2 \notin D(g)$. Если в рассматриваемом пути только одно ребро, то противоречие получено. Если ребер больше, то путь содержит вершину v такую, что оба ребра этого пути, инцидентные вершине v, в орграфе направлены от вершины v. Тогда $\deg_- v \geq 2$, что невозможно.

Итак, множество $D^c(g)$ содержит лишь один элемент, который обозначим через w. Определим отображение $g^* : V_0(O_g) \to V_0(O_g)$ следующим образом: $g^*(u) = g(u)$, если $u \neq w$; $g^*(w) = w$. Тогда O_{g^*} — связный функциональный граф, который получается из O_g добавлением ориентированной петли $\overrightarrow{ww}$. Орграф O_{g^*} получается в результате склейки некоторого корневого ордерева $\dot{T}$ (ориентированного к корню) и контура $\overrightarrow{C}_1$. Если удалить ориентированную петлю $\overrightarrow{ww}$, то полученный орграф (а это и есть O_g) является результатом склейки ордерева $\dot{T}$ и $\overrightarrow{P}_1$. $\square$

Если $A \subseteq M$, то через e_A обозначается частичное преобразование множества M, определенное следующим образом: $D(e_A) = A$ и $e_A(x) = x$ для любого $x \in A$. Частичное преобразование $e_{M \setminus A}$ обозначается через 0_A. Элемент e_M (соответственно 0_M) полугруппы $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ является ее единичным (соответственно нулевым) элементом; орграф этого элемента имеет все компоненты, изоморфные $\overrightarrow{C}_1$ (соответственно $\overrightarrow{P}_1$).

В доказательстве леммы 4 работы [1] имеется недостаток: не рассмотрен некоторый случай. Сейчас мы устраним этот недостаток, доказав утверждение (более общее, чем необходимо в настоящей статье), из которого следует упомянутая лемма.

Лемма 2. *Если множество M бесконечно и g — неединичный и ненулевой элемент полугруппы $\mathscr{PT}(M)$, то $|S(M) \setminus \mathrm{Cent}(g)| = 2^{|M|}$.*

Доказательство. Для элемента $g \in \mathscr{PT}(M) \setminus \{0_M, e_M\}$ рассмотрим две возможности.

1. Пусть $g = e_A$ для некоторого $A \notin \{\varnothing, M\}$. Возьмем $a \in A$, $b \notin A$. Если $\sigma \in S(M)$, $\sigma(a) = b$ и $\sigma(b) = a$, то $\sigma \notin \mathrm{Cent}(g)$. Поэтому $|S(M) \setminus \mathrm{Cent}(g)| \geq |S(M \setminus \{a, b\})| = 2^{|M|}$.

2. В ином случае можно утверждать, что в множестве M существуют b и c такие, что $b \in D(g)$, $g(b) \neq b$, $c \neq b$, $c \neq g(b)$ и $c \neq g(g(b))$ (если $g(g(b))$ не определено, то утверждение $c \neq g(g(b))$ является верным, так как выражение c определено). Если $\sigma \in S(M)$, $\sigma(b) = g(b)$, $\sigma(g(b)) = c$ и $\sigma(c) = b$, то $\sigma \notin \mathrm{Cent}(g)$. Поэтому $|S(M) \setminus \mathrm{Cent}(g)| \geq |S(M \setminus \{b, g(b), c\})| = 2^{|M|}$. $\square$

Эндоморфизм f орграфа G — это отображение $f : V_0(G) \to V_0(G)$ такое, что наличие стрелки $\overrightarrow{uv}$ влечет наличие стрелки $\overrightarrow{f(u)f(v)}$. Множество всех эндоморфизмов орграфа G обозначается символом $\mathrm{End}(G)$.

Через $\mathrm{End}_*(O_g)$ обозначим множество всех элементов $f \in \mathrm{End}(O_g)$, для которых $f(D(g)) \subseteq D(g)$ и $f(D^c(g)) \subseteq D^c(g)$.

Лемма 3. *Если $g \in \mathscr{PT}(M)$, то $\mathscr{T}(M) \cap \mathrm{Cent}(g) \supseteq \mathrm{End}_*(O_g)$.*

Доказательство. Пусть $f : M \to M$. Тогда $D(f \circ g) = D(g)$. Если $f(D(g)) \subseteq D(g)$ и $f(D^c(g)) \subseteq D^c(g)$, то $D(g \circ f) = D(g)$.

Пусть $f \in \mathrm{End}_*(O_g)$. Из предыдущего абзаца ясно, что $D(f \circ g) = D(g \circ f) = D(g)$. Если $u \in D(g)$, то $(u, g(u)) \in V_1(O_g)$. Поэтому $(f(u), f(g(u))) \in V_1(O_g)$. Это равносильно тому, что $g(f(u)) = f(g(u))$. Итак, $g \circ f = f \circ g$. $\square$

Эндоморфизм корневого ордерева — это эндоморфизм соответствующего ордерева, переводящий корень в корень. Множество всех эндоморфизмов корневого ордерева $\dot{T}$ обозначается через $\mathrm{End}(\dot{T})$.

Лемма 4. *Пусть корневое ордерево $\dot{T}$ ориентировано к корню и этот корень имеет бесконечную степень захода m. Тогда $|\mathrm{End}(\dot{T})| \geq 2^m$.*

Доказательство. Множество U всех вершин, находящихся на расстоянии 1 до корня (обозначаемого через v_0), разобьем на двухэлементные подмножества: $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, где I — множество индексов, имеющее мощность m. Для каждого $i \in I$ определим корневое ордерево $\dot{T}_i$ следующим образом. Рассмотрим орграф $(V_0(\dot{T}), V_1(\dot{T}) \setminus \{\overrightarrow{uv_0}\}_{u \in U \setminus U_i})$. Компоненту этого орграфа, содержащую вершину v_0, обозначим через $\dot{T}_i$. Множество $\mathrm{End}(\dot{T}_i)$ содержит не менее двух элементов. Это следует из леммы 3 работы [3].

Корневые ордеревья из множества $\{\dot{T}_i\}_{i \in I}$ склеим путем отождествления их корней. Полученное корневое ордерево есть $\dot{T}$. Поэтому

$$|\mathrm{End}(\dot{T})| \geq \Big|\prod_{i \in I} \mathrm{End}(\dot{T}_i)\Big| = \prod_{i \in I} |\mathrm{End}(\dot{T}_i)| \geq 2^{|I|} = 2^m. \quad \square$$

Ниже нам понадобится следующее обозначение. Пусть $a \subseteq V_0(O_g)$. Через $\mathrm{End}_A(O_g)$ обозначим множество всех эндоморфизмов орграфа O_g, оставляющих неподвижными все вершины множества $V_0(O_g) \setminus (A \cup g^{-1}(A) \cup g^{-1}(g^{-1}(A)) \cup \ldots)$.

Лемма 5. *Пусть $g \in \mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ и $|D^c(g)| = m \geq \aleph_0$. Тогда $|\operatorname{End}_*(O_g)| \geq 2^m$.*

Доказательство. Это утверждение почти очевидно вытекает из леммы 4, но формальное доказательство несколько громоздко.

Достроим орграф O_g, добавив новую вершину v_0 и проведя из всех вершин множества $D^c(g)$ стрелки к вершине v_0. Иными словами, рассмотрим орграф $(V_0(O_G) \cup \{v_0\}, V_1(O_g) \cup \{\overrightarrow{uv}_0\}_{u \in D^c(g)})$. Обозначим его через $\check{O}_g$.

Компонента орграфа $\check{O}_g$, содержащая вершину v_0, является ордеревом. Отметим в этой компоненте вершину v_0. Получим корневое ордерево, ориентированное к корню. Обозначим его через $\dot{T}$.

Существует естественная инъекция $\operatorname{End}(\dot{T}) \to \operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g)$, которая каждому $f \in \operatorname{End}(\dot{T})$ ставит в соответствие его продолжение $\bar{f} \in \operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g)$, определенное следующим образом: если $u \in V_0(\dot{T})$, то $\bar{f}(u) = f(u)$; в остальных случаях $\bar{f}(u) = u$.

Построим инъекцию $\operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g) \to \operatorname{End}_*(O_g)$. Возьмем произвольный эндоморфизм $\phi \in \operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g)$. В графе $\check{O}_g$ рассмотрим произвольную вершину $u \neq v_0$. Так как $\deg_- u = 1$, то $\deg_- \phi(u) \geq 1$, отсюда $\phi(u) \neq v_0$. Значит, $\phi(V_0(O_g)) \subseteq V_0(O_g)$. Определим отображение $\tilde{\phi} : V_0(O_g) \to V_0(O_g)$, положив $\tilde{\phi}(u) = \phi(u)$ для любого $u \in V_0(O_g)$. Покажем, что $\tilde{\phi} \in \operatorname{End}_*(O_g)$. Очевидно, что $\tilde{\phi} \in \operatorname{End}(O_g)$. Кроме того, так как $\phi \in \operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g)$, то $\phi(v_0) = v_0$; все вершины из $D^c(g)$ имеют высоту 1 в $\dot{T}$, поэтому $\phi(D^c(g)) \subseteq D^c(g)$. Итак, $\tilde{\phi}(D^c(g)) = \phi(D^c(g)) \subseteq D^c(g)$. Остается доказать, что $\tilde{\phi}(D(g)) \subseteq D(g)$. Возьмем произвольную вершину $u \in D(g)$. Пусть $u \notin V_0(T)$. Тогда $\phi(u) = u$, поэтому $\tilde{\phi}(u) = u \in D(g)$. Пусть $u \in V_0(T)$. Предположим, что $\tilde{\phi}(u) = w \in D^c(g)$, т. е. $\phi(u) = w \in D^c(g)$. Тогда $(w, \phi(g(u))) = (\phi(u), \phi(g(u))) \in V_1(\check{O}_g)$, поэтому $\phi(g(u)) = v_0$. Так как $u \notin D^c(g)$, то $(g(u), x) \in V_1(\check{O}_g)$ для некоторой вершины $x \in V_0(\check{O}_g)$. Тогда $(v_0, \phi(x)) = (\phi(g(u)), \phi(x)) \in V_1(\check{O}_g)$. Но $(v_0, y) \notin V_1(\check{O}_g)$ для любого y; противоречие.

Итак, построены инъекции $\operatorname{End}(\dot{T}) \to \operatorname{End}_{D^c(g)}(\check{O}_g) \to \operatorname{End}_*(O_g)$. По лемме 4 имеем $|\operatorname{End}(\dot{T})| \geq 2^m$. Поэтому $|\operatorname{End}_*(O_g)| \geq 2^m$. $\square$

Лемма 6. *Если $g \in \mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ и $cf(M) > \aleph_0$, то $|\operatorname{End}_*(O_g)| = 2^{|M|}$.*

Доказательство. Положим $L_0 = D^c(g)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через L_n обозначим множество всех вершин, каждая из которых принадлежит некоторому контуру длины n в орграфе O_g. Рассмотрим все те компоненты орграфа O_g, которые не содержат вершин из множества L_n ни для какого $n \in \mathbb{N}_0$. В каждой такой компоненте отметим некоторый луч. Через $L_{+\infty}$ обозначим множество всех вершин, каждая из которых принадлежит некоторому из отмеченных лучей. Положим $L = \cup_{n \in \overline{\mathbb{N}}_0} L_n$, где $\overline{\mathbb{N}}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots; +\infty\}$.

Удалим из графа O_g стрелки вида $\overrightarrow{uv}$, где $u, v \in L$. Иными словами, рассмотрим орграф $\widetilde{O}_g = (V_0(O_g), V_1(O_g) \backslash \{\overrightarrow{uv}\}_{u,v \in L}$. Пусть w — некоторая вершина из множества L. Рассмотрим ту компоненту орграфа $\widetilde{O}_g$, которая содержит вершину w. В этой компоненте отметим вершину w. Получим корневое ордерево, ориентированное к корню. Обозначим его через $\dot{T}_w$. На множестве $V_0(O_g)$ определим функцию H высоты следующим образом. Если $u \in V_0(\dot{T}_v)$, то положим $H(u) = h_{\dot{T}_v}(u)$.

Через $V_0(O_g)_s$ обозначим множество всех вершин орграфа O_g, для которых $H(v) = s$.

Так как $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_0} |V_0(O_g)_i| = |M|$ и $cf(M) > \aleph_0$, то $|V_0(O_g)_i| = |M|$ для некоторого i. Пусть k — наименьшее i с таким свойством.

Случай 1. Пусть $k = 0$. Так как $\sum\limits_{i\in\overline{\mathbb{N}}_0} |L_i| = |L| = |V_0(O_g)_0| = |M|$ и $cf(M) > \aleph_0$, то $|L_i| = |M|$ для некоторого $i \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Пусть l — наименьшее i с таким свойством.

Если $l = 0$, то доказываемое утверждение следует из леммы 5.

Пусть $l = 1$. Для каждого отображения $\phi : L_1 \to L_1$ определим отображение $f_\phi : V_0(O_g) \to V_0(O_g)$ следующим образом. Если $u \in V_0(\dot{T}_v)$ для некоторой вершины $v \in L_1$, то $f_\phi(u) = \phi(v)$; в остальных случаях $f_\phi(u) = u$.

Очевидны следующие утверждения: $f_\phi \in \operatorname{End}_*(O_g)$; если $\phi \neq \psi$, то $f_\phi \neq f_\psi$. Поэтому $|\operatorname{End}_*(O_g)| \geq |L_1|^{|L_1|} = |M|^{|M|}$.

Пусть $l > 1$. Через $\mathscr{K}$ обозначим множество всех компонент орграфа O_g, каждая из которых содержит хотя бы одну вершину из L_l. Отметим следующее. Так как $l \neq 0$, для любой компоненты $K \in \mathscr{K}$ имеем $V_0(K) \subseteq D(g)$ и $g(V_0(K)) \subseteq D(g)$.

Очевидно, что $|\mathscr{K}| \geq \aleph_0$. Более того, $|\mathscr{K}| = |M|$. Действительно, $|M| \geq |\mathscr{K}| = |\mathscr{K}|\aleph_0 \geq |L_l| = |M|$.

Для каждого подмножества $U \subseteq \mathscr{K}$ определим отображение $f_U : V_0(O_g) \to V_0(O_g)$ следующим образом. Если $u \in V_0(K)$ для некоторой компоненты $K \in U$, то $f_U(u) = g(u)$; в остальных случаях $f_U(u) = u$.

Очевидны следующие утверждения: $f_U \in \operatorname{End}_*(O_g)$; если $U \neq W$, то $f_U \neq f_W$. Поэтому $|\operatorname{End}_*(O_g)| \geq 2^{|\mathscr{K}|} = 2^{|M|}$.

Случай 2. Пусть $k \neq 0$. На множестве $V_0(O_g)_k$ определим отношение эквивалентности: $u \sim v$ тогда и только тогда, когда $g(u) = g(v)$. Множество классов эквивалентности имеет мощность, не превосходящую $|V_0(O_g)_{k-1}|$, которая меньше, чем $|M|$. Пусть U_0 (соответственно U_1) — множество конечных (соответственно бесконечных) классов. Заметим, что $|U_0| < |M|$.

Если U — некоторое множество классов, то через $\overline{U}$ обозначим множество $\bigcup\limits_{A\in U} A$.

Покажем, что $|\overline{U}_1| = |M|$. Это очевидно, если U_0 конечно. Пусть U_0 бесконечно. Тогда $|M| = |\overline{U}_0| + |\overline{U}_1| \leq \aleph_0|U_0| + |\overline{U}_1| = |U_0| + |\overline{U}_1|$, но $|U_0| < |M|$. Поэтому $|\overline{U}_1| = |M|$.

Пусть $A \in U_1$. Очевидно, что $\operatorname{End}_A(O_g) \subseteq \operatorname{End}_*(O_g)$.

Орграф O_g является результатом склейки некоторого орграфа и корневого дерева, ориентированного к корню, причем степень захода этого корня равна $|A|$. Из леммы 4 вытекает, что $|\operatorname{End}_A(O_g)| \geq 2^{|A|}$.

Отсюда

$$2^{|M|} = |M|^{|M|} \geq |\operatorname{End}_*(O_g)| \geq \Big|\prod_{A\in U_1} \operatorname{End}_A(O_g)\Big| \geq \prod_{A\in U_1} 2^{|A|} = 2^{|\overline{U}_1|} = 2^{|M|}. \quad \square$$

Замечания. 1. Доказанное утверждение является существенным усилением теоремы 2 из работы [4].

2. Неравенство $cf(M) > \aleph_0$ является условием общего положения. Можно сказать, что «большинство» множеств ему удовлетворяют. Значит, в большинстве случаев перестановочность частичных отображений (вопреки интуиции) не редкость.

3. Мы предполагаем, что в доказанной теореме условие $cf(M) > \aleph_0$ можно заменить условием $|M| > \aleph_0$, но доказать это пока не можем.

4. Если множество M счетно, то легко привести пример (см. начало доказательства теоремы в [5]) такого отображения $\sigma : M \to M$, что множество $\mathrm{Cent}(\sigma)$ счетно, а его дополнение до $\mathscr{P}\mathscr{T}(M)$ континуально.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмыков В. А.* О сбалансированных подмножествах симметрической инверсной полугруппы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 49, № 4. С. 825–828.
2. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1968.
3. *Колмыков В. А.* Эндоморфизмы функциональных графов // Дискрет. математика. 2006. Т. 18, № 3. С. 115–119.
4. *Колмыков В. А.* О соотношении коммутативности в симметрической полугруппе // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1130–1135.
5. *Колмыков В. А.* О соотношении коммутативности в полугруппах инъекций // Изв. вузов. Математика. 2006. № 11. С. 26–28.

Статья поступила 9 сентября 2008 г.

Колмыков Владислав Алексеевич
Воронежский гос. университет, НИИ математики при ВГУ,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
kolmykov@math.vsu.ru