Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.957

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИОННО–ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

М. О. Корпусов

Аннотация. Рассмотрена одна модельная система уравнений, состоящая из двух нелинейных уравнений соболевского типа шестого порядка со вторым порядком производной по времени. Эта система уравнений описывает взрывную неустойчивость в плазме при учете сильной пространственно-временной дисперсии и нелинейной зависимости поляризуемости от напряженности электрического поля. Также рассмотрен случай так называемой фокусирующей среды.

Ключевые слова: разрушение, нелинейный анализ, плазма.

§ 1. Введение

В настоящее время усилия многих математиков направлены на исследование возникновения режимов с обострением или «blow up» для различных нелинейных эволюционных задач для уравнений в частных производных. При этом имеется три четко сформулированных и широко развитых метода исследования возникновения «blow up». Первый метод — это метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [1], второй — это энергетический метод Х. А. Левина [2–5] и, наконец, третий — метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [6] (см. также [7]). В настоящей работе мы применим некоторую модификацию энергетического метода Х. А. Левина для получения достаточных условий разрушения следующей системы уравнений соболевского типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u + \Delta u) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v + \Delta v) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v) = 0.$$

Отметим, что наша модификация метода Х. А. Левина более простая в применении к собственно соболевским уравнениям, т. е. уравнениям, у которых оператор при высшей производной по времени является оператором, вообще говоря, более высокого порядка, нежели при всех других производных по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–12018–офи–м–2011), а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД–99.2009.1.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим поверхностно-односвязную ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$. Пусть область Ω занимает нелинейная «фокусирующая» среда (см., например, [8]) со следующим оператором диэлектрической проницаемости (см. [9]):

$$\hat{\varepsilon}\cdot \equiv -\Delta \cdot + \mathrm{I} \cdot - \int\limits_0^t d\tau (t-\tau)\kappa(x, |\mathbb{E}|)(\tau)\cdot, \tag{2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа, I — единичный оператор, $\kappa(x,|\mathbb{E}|)$ — электрическая восприимчивость. Будем рассматривать в дальнейшем комплексные вектор напряженности электрического поля $\mathbb{E} \in \mathbb{C}^3$ и вектор индукции электрического поля $\mathbb{D} \in \mathbb{C}^3$, где $\mathbb{C}^3 \equiv \mathbb{R}^3 + i\,\mathbb{R}^3$ и i — мнимая единица. В квазистационарном приближении комплексные векторы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{D}$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbb{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbb{D} = 0. \tag{2.2}$$

Наконец, пусть векторы $\mathbb{D}$ и $\mathbb{E}$ связаны следующим феноменологическим соотношением:

$$\mathbb{D} = \hat{\varepsilon}\mathbb{E}, \tag{2.3}$$

где оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ определен равенством (2.1).

Представим комплексные векторы $\mathbb{D}$ и $\mathbb{E}$ в виде

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 + i\mathbb{E}_2, \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_1 + i\mathbb{D}_2, \quad \mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2 \in \mathbb{R}^3. \tag{2.4}$$

Тогда с учетом (2.4) уравнения (2.2) примут вид

$$\operatorname{rot}\mathbb{E}_1 = 0,\ \operatorname{rot}\mathbb{E}_2 = 0,\ \operatorname{div}\mathbb{D}_1 = 0,\ \operatorname{div}\mathbb{D}_2 = 0,\ \mathbb{D}_1 = \hat{\varepsilon}\mathbb{E}_1,\ \mathbb{D}_2 = \hat{\varepsilon}\mathbb{E}_2. \tag{2.5}$$

Поскольку по условию область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является поверхностно-односвязной, существуют потенциалы u, v такие, что

$$\mathbb{E}_1 = \nabla u, \quad \mathbb{E}_2 = \nabla v. \tag{2.6}$$

Тогда из уравнений (2.5) получим следующее интегродифференциальные уравнения:

$$-\Delta^2 u + \Delta u = \int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u),$$

$$-\Delta^2 v + \Delta v = \int\limits_0^t d\tau\,(t-\tau)\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v).$$

Дифференцируя оба этих уравнения по переменной t, получим искомую систему уравнений соболевского типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u + \Delta u) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u) = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v + \Delta v) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v) = 0. \tag{2.8}$$

Естественно, нам необходимо дополнить систему уравнений (2.7), (2.8) начальными и краевыми условиями на границе $\partial\Omega$. Предположим, что граница $\partial\Omega$

представляет собой «заземленный», «идеальный проводник». Тогда на границе $\partial\Omega$ естественными будут следующие однородные условия Дирихле:

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.9}$$

Наконец, введем начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad v'(x,0) = v_1(x). \tag{2.10}$$

§ 3. Разрушение сильного обобщенного решения

Прежде всего нам нужно ввести ряд банаховых пространств и их взаимные вложения. Введем обозначения:

$$\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \otimes \mathbb{H}^2_0(\Omega), \quad \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega),$$

$$\mathbb{F} \equiv \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega), \quad \mathbb{F}^* \equiv \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \otimes \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Ясно, что $\mathbb{B}^*$ является сильным сопряженным банаховым пространством к банахову пространству $\mathbb{B}$ относительно нормы

$$\|b^*\|_* \equiv \sup_{\|b\|\leq 1} |\langle b^*, b\rangle|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, выбранная одним из следующих эквивалентных способов:

$$\|w\| = \left[\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta v|^2\,dx\right]^{1/2} \quad \text{для всех } w = (u,v) \in \mathbb{B},$$

а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$. Кроме того, понятно, что $\mathbb{F}^*$ является сильно сопряженным банаховым пространством к банахову пространству $\mathbb{F}$ относительно нормы

$$\|f^*\|_{\mathbb{F}^*} \equiv \sup_{\|f\|_{\mathbb{F}}\leq 1} |\langle f^*, f\rangle_1|,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ — скобки двойственности между $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}^*$ и через $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$ обозначена норма в банаховом пространстве $\mathbb{F}$, выбранная одним из следующих эквивалентных способов:

$$\|w\|_{\mathbb{F}} \equiv \left[\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right]^{1/p} \quad \text{для всех } w = (u,v) \in \mathbb{F}.$$

Пусть $p \in (2,6]$, тогда поскольку $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$, имеет место цепочка непрерывных и плотных вложений $\mathbb{B} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{B}^*$.

Пусть $\mathbb{J} : \mathbb{B} \to \mathbb{F}$ — оператор вложения. В силу плотности множества $\mathbb{J}\mathbb{B}$ в $\mathbb{F}$ существует инъективный транспонированный к $\mathbb{J}$ оператор $\mathbb{J}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{B}^*$, который определен равенством

$$\langle \mathbb{J}^t f^*, w\rangle = \langle f^*, \mathbb{J}w\rangle_1 \quad \text{для всех } f^* \in \mathbb{F}^*,\ w \in \mathbb{B}. \tag{3.1}$$

Таким образом, оператор $\mathbb{J}^t$ тоже является оператором вложения. Поэтому если отождествим банахово пространство $\mathbb{B}$ с $\mathbb{J}\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$, а $\mathbb{F}^*$ — с $\mathbb{J}^t\mathbb{F}^* \subset \mathbb{B}^*$, то из равенства (3.1) получим следующее равенство:

$$\langle f^*, w\rangle = \langle f^*, w\rangle_1 \quad \text{для всех } f^* \in \mathbb{F}^*,\ w \in \mathbb{B}. \tag{3.2}$$

Введем некоторые условия на функцию $\kappa(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$.

Определение 1. *Каратеодориевой функцией* или *функцией Каратеодори* называется функция $\kappa(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$, которая для почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $s \in \mathbb{R}^1_+$ и для всех $s \in \mathbb{R}^1_+$ измерима по $x \in \Omega$.

Пусть функция $\kappa(x,s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) функция $\kappa(x,s)$ каратеодориева и $\kappa(x,s)$ для почти всех $x \in \Omega$ принадлежит по $s \in \mathbb{R}^1_+$ классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$;

(ii) функция $\kappa(x,s)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет условиям роста:

$$|\kappa(x,s)| \leq c_1 + c_2 s^{p-2}, \tag{3.3}$$

$$|\kappa'_s(x,s)s| \leq c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при } p \in (2,6]; \tag{3.4}$$

(iii) существует такое $\theta > 2$, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $s > 0$ выполнено неравенство

$$\kappa(x,s)s^2 \geq \theta \int_0^s d\sigma \kappa(x,\sigma)\sigma. \tag{3.5}$$

При выполнении условия роста (3.4) оператор

$$\mathrm{B}(w) \equiv -(\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u), \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v))^t$$

является локально липшиц-непрерывным как действующий из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}^*$:

$$\|\mathrm{B}(w_1) - \mathrm{B}(w_2)\|_{\mathbb{F}^*} \leq \mu(\mathrm{R})\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}}, \tag{3.6}$$

где $\mathrm{R} = \max\{\|w_1\|_{\mathbb{F}}, \|w_2\|_{\mathbb{F}}\}$, а функция $\mu(\cdot)$ неубывающая. Действительно, докажем это. Пусть $w_1 = (u_1, v_1)$ и $w_2 = (u_2, v_2)$ принадлежат $\mathbb{F}$. Согласно определению $*$-нормы имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{B}(w_1) - \mathbb{B}(w_2)\|_{\mathbb{F}^*} &= \sup_{\|h\|_{\mathbb{F}} \leq 1} |\langle \mathbb{B}(w_1) - \mathbb{B}(w_2), h\rangle_1| \\ &\leq \sup_{\|\nabla h_1\|_p \leq 1} |\langle \operatorname{div}(\kappa(x,s_1)\nabla u_1) - \operatorname{div}(\kappa(x,s_2)\nabla u_2), h_1\rangle_2| \\ &+ \sup_{\|\nabla h_2\|_p \leq 1} |\langle \operatorname{div}(\kappa(x,s_1)\nabla v_1) - \operatorname{div}(\kappa(x,s_2)\nabla v_2), h_2\rangle_2| = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$s_1 = \sqrt{|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2}, \quad s_2 = \sqrt{|\nabla u_2|^2 + |\nabla v_2|^2}, \tag{3.8}$$

а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Рассмотрим отдельно слагаемое I_1, поскольку для I_2 выкладки такие же. Для I_1 приходим к выражениям

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \sup_{\|\nabla h_1\|_p \leq 1} \left| \int_\Omega ([\kappa(x,s_1)\nabla u_1 - \kappa(x,s_2)\nabla u_2], \nabla h_1)\, dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\nabla h_1\|_p \leq 1} \int_\Omega |\nabla h_1||\kappa(x,s_1)\nabla u_1 - \kappa(x,s_2)\nabla u_2|\, dx.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств в случае $s_1 < s_2$:

$$|\kappa(x,s_1)\nabla u_1 - \kappa(x,s_2)\nabla u_2| \leq |\kappa(x,s_1) - \kappa(x,s_2)||\nabla u_1| + |\kappa(x,s_2)||\nabla u_1 - \nabla u_2|$$
$$\leq |\kappa'_s(x,s_3)||s_1 - s_2||\nabla u_1| + |\kappa(x,s_2)||\nabla u_1 - \nabla u_2|, \quad (3.10)$$

где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (3.10):

$$|\kappa(x,s_1)\nabla u_1 - \kappa(x,s_2)\nabla u_2| \leq |s_3\kappa'_s(x,s_3)||s_1 - s_2|s_3^{-1}|\nabla u_1| + |\kappa(x,s_2)||\nabla u_1 - \nabla u_2|$$
$$\leq \left[c_1 + c_2 s_2^{p-2}\right]|s_1 - s_2|s_1^{-1}|\nabla u_1| + \left[c_1 + c_2 s_2^{p-2}\right]|\nabla u_1 - \nabla u_2|$$
$$\leq \left[c_1 + c_2 s_2^{p-2}\right][|\nabla u_1 - \nabla u_2| + |\nabla v_1 - \nabla v_2|] + \left[c_1 + c_2 s_2^{p-2}\right]|\nabla u_1 - \nabla u_2|. \quad (3.11)$$

Из этой цепочки неравенств и (3.9) приходим к оценке

$$\mathrm{I}_1 \leq \sup_{\|\nabla h_1\|_p \leq 1} \|\nabla h_1\|_p \left(\int_\Omega \left[c_1 + c_2 s_2^{p-2}\right]^{p/(p-2)} dx\right)^{(p-2)/p}$$
$$\times \max\{\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_p, \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_p\}$$
$$\leq \mu(\mathrm{R})\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{F}}, \quad \mu(\mathrm{R}) = c_3 + c_4\mathrm{R}^{p-2}, \quad \mathrm{R} = \max\{\|w_1\|_{\mathbb{F}}, \|w_2\|_{\mathbb{F}}\}. \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим случай $s_1 > s_2$. Имеет место следующее неравенство:

$$|\kappa(x,s_1)\nabla u_1 - \kappa(x,s_2)\nabla u_2| = |\kappa(x,s_2)\nabla u_2 - \kappa(x,s_1)\nabla u_1|$$
$$\leq |\kappa(x,s_2) - \kappa(x,s_1)||\nabla u_2| + |\kappa(x,s_1)||\nabla u_1 - \nabla u_2|$$
$$\leq |\kappa'_s(x,s_3)||s_1 - s_2||\nabla u_2| + |\kappa(x,s_1)||\nabla u_1 - \nabla u_2|, \quad (3.13)$$

где $s_3 \in [s_2, s_1]$. Далее в точности повторяем рассуждения, приведшие нас к неравенству (3.12).

Прежде чем давать определение сильного обобщенного решения задачи (2.7)–(2.10), необходимо обсудить свойства нелинейных операторов

$$\mathrm{B}_1(w) = -\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u), \quad (3.14)$$

$$\mathrm{B}_2(w) = -\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v). \quad (3.15)$$

Требуется доказать, что при $p > 2$

$$\mathrm{B}_1(w),\, \mathrm{B}_2(w) : \mathbb{F} \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \quad (3.16)$$

и тогда

$$\mathrm{B}(w) \equiv (\mathrm{B}_1(w), \mathrm{B}_2(w)) : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^*. \quad (3.17)$$

Но это следствие введенного условия роста (3.3) и теоремы М. А. Красносельского [10] об операторах Немыцкого.

Теперь мы можем дать определение сильного обобщенного решения задачи (2.7)–(2.10).

Определение 2. *Сильным обобщенным решением задачи* (2.7)–(2.10) *назовем функцию* $w = (u,v) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{B})$, *удовлетворяющую при некотором* $\mathrm{T} > 0$ *равенству*

$$\langle \mathrm{D}(w), z\rangle = 0 \quad \text{для всех } t \in [0,\mathrm{T}],\ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}, \quad (3.18)$$

$$\mathrm{D}(w) \equiv (\mathrm{D}_1(w), \mathrm{D}_2(w)),$$

$$\mathrm{D}_1(w) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 u + \Delta u) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u),$$

$$\mathrm{D}_2(w) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\Delta^2 v + \Delta v) - \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v),$$

где, напомним, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \otimes \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ и $\mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Замечание 1. Для распределения $\Delta^2 w \equiv (\Delta^2 u, \Delta^2 v) \in \mathbb{B}^*$ будем использовать интегрирование по «частям» в следующем смысле:

$$\langle \Delta^2 w, z \rangle \equiv \int\limits_\Omega [\Delta u \Delta z_1 + \Delta v \Delta z_2]\, dx,$$

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}$ и $w = (u, v) \in \mathbb{B}$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) \equiv \Phi[(u, v)](t) \equiv \frac{1}{2}\langle \Delta^2 w, w \rangle - \frac{1}{2}\langle \Delta w, w \rangle_1, \tag{3.19}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \mathrm{J}[(u, v)](t) \equiv \langle \Delta^2 w', w' \rangle - \langle \Delta w', w' \rangle_1. \tag{3.20}$$

Замечание 2. Отметим, что в силу доказанного равенства скобок двойственности (3.2) для $w \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$ имеют место равенства

$$\langle \Delta w', w' \rangle_1 = \langle \Delta w', w' \rangle, \quad \langle \Delta w', w' \rangle_1 = \langle \Delta w', w' \rangle,$$

поскольку $\Delta w, \Delta w' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)) \subset \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{F}^*)$. Отметим, что здесь и в дальнейшем символом w' обозначаем частную производную по времени.

Лемма 1. *Пусть* $u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$ *при некотором* $\mathrm{T} > 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$(\Phi')^2(t) \leq 2\Phi(t)\mathrm{J}(t) \quad \textit{для всех } t \in [0, \mathrm{T}]. \tag{3.21}$$

Доказательство основано на применении неравенства Шварца для неотрицательных квадратичных форм. □

Займемся выводом первого энергетического равенства. Пусть $w = (u, v) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$ — сильное обобщенное решение задачи (2.7)–(2.10) при некотором $\mathrm{T} > 0$. Возьмем в равенстве (3.18) в качестве z само решение w. После интегрирования по «частям» получим равенство

$$\int\limits_\Omega \Delta u'' \Delta u\, dx + \int\limits_\Omega \Delta'' v \Delta v\, dx + \int\limits_\Omega (\nabla u'', \nabla u)\, dx + \int\limits_\Omega (\nabla v'', \nabla v)\, dx$$
$$= \int\limits_\Omega \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]\, dx. \tag{3.22}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_\Omega \Delta u'' \Delta u\, dx = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \Delta u' \Delta u\, dx - \int\limits_\Omega |\Delta u'|^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_\Omega |\Delta u|^2\, dx - \int\limits_\Omega |\Delta u'|^2\, dx, \tag{3.23}$$

$$\int\limits_\Omega (\nabla u'', \nabla u)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int\limits_\Omega |\nabla u'|^2\, dx, \tag{3.24}$$

$$\int\limits_{\Omega} \Delta v'' \Delta v \, dx = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\Omega} |\Delta v|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} |\Delta v'|^2 \, dx, \tag{3.25}$$

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla v'', \nabla v) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} |\nabla v'|^2 \, dx. \tag{3.26}$$

Заметим, что для функционалов $\Phi[w](t)$ и $\mathrm{J}[w](t)$ справедливы следующие неравенства, вытекающие из формул (3.19), (3.20):

$$\Phi[w](t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\Delta u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\Delta v|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx, \tag{3.27}$$

$$\mathrm{J}[w](t) = \int\limits_{\Omega} |\Delta u'|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} |\Delta v'|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u'|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla v'|^2 \, dx. \tag{3.28}$$

С учетом равенств (3.23)–(3.28) из (3.22) получим первое энергетическое равенство

$$\Phi'' - \mathrm{J} = \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx. \tag{3.29}$$

Займемся выводом второго энергетического равенства. С этой целью рассмотрим следующий функционал:

$$\psi(h) \equiv \int\limits_{\Omega} \mathscr{F}(x, h) \, dx, \quad \mathscr{F}(x, h) = \int\limits_{0}^{h} ds \, s\kappa(x, s), \quad h = \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}. \tag{3.30}$$

Заметим, что для всех $u, v \in \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ имеем $h(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega)$.

Справедлива (см. [11])

Лемма 2. *Пусть функция* $\kappa(x,s)$ *удовлетворяет условиям* (i), (ii). *Тогда функционал* $\psi(h)$*, определенный формулой* (3.30) *и такой, что*

$$\psi(h) : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1, \quad p = q + 2,$$

дифференцируем по Фреше и его производная Фреше

$$\psi'_f(h) : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$$

равна

$$\psi'_f(h) = N_{s\kappa(x,s)}(h) \quad \text{для всех } h(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega) \text{ и почти всех } x \in \Omega,$$

где $N_{s\kappa(x,s)}$ *— оператор Немыцкого, порожденный каратеодориевой функцией* $s\kappa(x,s)$.

Теперь в качестве $z \in \mathbb{B}$ в равенстве (3.18) возьмем производную по времени от самого решения $z = w' = (u', v') \in \mathbb{B}$. Тогда с учетом (3.28) после интегрирования по «частям» получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathrm{J}(t) = \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})[(\nabla u', \nabla u) + (\nabla v', \nabla v)] \, dx. \tag{3.31}$$

Рассмотрим отдельно интеграл в правой части равенства (3.31). Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})[(\nabla u', \nabla u) + (\nabla v', \nabla v)] \, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{1/2} \, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} dx \, \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^h s\kappa(x, s) \, ds. \quad (3.32)$$

Таким образом, из (3.30)–(3.32) вытекает равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathrm{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} dx \, \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}).$$

Следовательно, приходим ко второму энергетическому равенству

$$\mathrm{E}(t) \equiv \int\limits_{\Omega} \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \, dx - \frac{1}{2} \mathrm{J}(t) = \mathrm{E}(0). \quad (3.33)$$

Потребуем теперь выполнения следующего условия на начальные данные:

$$\mathrm{E}(0) \equiv \int\limits_{\Omega} \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}) \, dx - \frac{1}{2} \mathrm{J}(0) \geq 0. \quad (3.34)$$

Тогда из (3.33) при условии (3.34) получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{F}(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) \, dx \geq \frac{1}{2} \mathrm{J}(t).$$

Воспользовавшись неравенством из условия (iii), получим неравенство

$$\frac{\theta}{2} \mathrm{J}(t) \leq \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx. \quad (3.35)$$

Из (3.35) и неравенства (3.29) следует неравенство

$$\Phi'' - \mathrm{J} - \frac{\theta}{2} \mathrm{J} = \int\limits_{\Omega} \kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2}) [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2] \, dx - \frac{\theta}{2} \mathrm{J} \geq 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \mathrm{J} \leq \Phi''.$$

Отсюда и из (3.21) получим, что

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 \geq 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{при } \theta > 2. \quad (3.36)$$

Теперь потребуем выполнение еще одного условия на начальные данные задачи (2.7)–(2.10):

$$\Phi'(0) > 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_0 \, dx + \int\limits_{\Omega} \Delta v_1 \Delta v_0 \, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_0) \, dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla v_1, \nabla v_0) \, dx > 0. \quad (3.37)$$

Поскольку по определению (3.19) $\Phi(t) \geq 0$, из неравенства (3.36) приходим к неравенству

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha \frac{(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} \geq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right] \geq 0 \Rightarrow \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \geq \frac{\Phi'(0)}{\Phi^\alpha(0)} = c_3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\Phi^{1-\alpha} \geq c_3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}(0)} - \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}} \geq c_3(\alpha-1)t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\Phi^{\alpha-1}(0)} - c_3(\alpha-1)t$$

$$\Rightarrow \Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - c_3(\alpha-1)t\right]^{1/(\alpha-1)}}. \quad (3.38)$$

Следовательно, найдется такой момент времени $\mathrm{T}_0 \in [0, \mathrm{T}_1]$, что

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\alpha-1}\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{4}{\theta-2}\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}, \quad \theta > 2. \quad (3.39)$$

Наша задача — доказать, что для любых начальных данных $w_0(x), w_1(x) \in \mathbb{B}$ величина $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(w_0, w_1)$ положительна, т. е. доказать локальную во времени разрешимость задачи (2.7)–(2.10) в сильном обобщенном смысле определения 2.

§ 4. Локальная разрешимость

Перепишем систему уравнений (2.7)–(2.10) в операторном виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{A}w = \mathrm{B}(w), \quad w(0) = w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}, \quad w'(0) = w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbb{A}w = (\Delta^2 u - \Delta u, \Delta^2 v - \Delta v)^t, \quad (4.2)$$

$$\mathrm{B}(w) \equiv -(\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u), \operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v))^t. \quad (4.3)$$

Прежде всего докажем, что оператор

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \otimes \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

обратим, причем обратный оператор A^{-1} липшиц-непрерывен с постоянной Липшица, равной 1.

С этой целью воспользуемся следующим вариантом теоремы Браудера — Минти (см., например, [12]).

Теорема (Браудера — Минти). *Пусть оператор $\mathbb{A}$, действующий из банахова пространства $\mathbb{W}$ в сильно сопряженное $\mathbb{W}^*$, радиально-непрерывный, сильно монотонный и коэрцитивный. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{W}^* \to \mathbb{W}$, который является липшиц-непрерывным.*

В формулировке теоремы участвуют три понятия, для которых мы для полноты изложения приведем следующие определения.

Определение 3. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется *радиально-непрерывным*, если

$$\phi(s) = \langle \mathbb{A}(w_1 + s w_2), w_2 \rangle \in \mathbb{C}[0,1] \quad (4.4)$$

для всех $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}$ и $\mathbb{W}^*$.

Определение 4. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется *сильно монотонным*, если существует такая постоянная $m > 0$, что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(w_1) - \mathbb{A}(w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq m\|w_1 - w_2\|^2 \quad (4.5)$$

для всех $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$, где $\|\cdot\|$ — норма в банаховом пространстве $\mathbb{W}$.

Определение 5. Оператор $\mathbb{A} : \mathbb{W} \to \mathbb{W}^*$ называется *коэрцитивным*, если существует такая функция

$$\gamma(s) : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+, \quad \lim_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

что имеет место неравенство

$$\langle \mathbb{A}(w), w\rangle \geq \gamma(\|w\|)\|w\| \quad \text{для всех } w \in \mathbb{W}. \tag{4.6}$$

Проверим, что оператор $\mathbb{A}$, определенный формулой (4.2), радиально-непрерывный, сильно монотонный и коэрцитивный как оператор, действующий из $\mathbb{W} = \mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \otimes \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ в $\mathbb{W}^* = \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$, т. е. что он удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера — Минти.

(I) Оператор $\mathbb{A}$ в силу линейности радиально-непрерывен.

(II) Докажем, что оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ сильно монотонный. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}(w_1) - \mathbb{A}(w_2), w_1 - w_2\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2\,dx \\ &+ \int_\Omega |\Delta u_1 - \Delta u_2|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta v_1 - \Delta v_2|^2\,dx \\ &\geq \int_\Omega |\Delta u_1 - \Delta u_2|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta v_1 - \Delta v_2|^2\,dx = \|w_1 - w_2\|^2,\end{aligned}$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена норма в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}$, $w_2 = (u_2, v_2) \in \mathbb{B}$. Таким образом, оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ сильно монотонен с постоянной $m = 1$.

(III) Коэрцитивность оператора $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ вытекает из (II).

Стало быть, в силу теоремы Браудера — Минти оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определенный формулой (4.2), обратим, причем обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ липшиц-непрерывен. Нетрудно также доказать, что постоянная Липшица для оператора $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ равна 1, т. е. имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}^{-1}(z_1) - \mathbb{A}^{-1}(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\|_* \quad \text{для всех } z_1, z_2 \in \mathbb{B}^*. \tag{4.7}$$

В связи с обратимостью оператора $\mathbb{A}$ введем новую функцию

$$g = \mathbb{A}w, \tag{4.8}$$

тогда приходим к следующей задаче, эквивалентной исходной:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1} g), \quad g(0) = g_0 = \mathbb{A}w_0 \in \mathbb{B}^*, \quad g'(0) = g_1 = \mathbb{A}w_1 \in \mathbb{B}^*, \tag{4.9}$$

которая в классе $g(x,t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0,\mathrm{T}]; \mathbb{B}^*)$ эквивалентна интегральному уравнению

$$g(t) = g_0 + \int_0^t ds\, G(g)(s), \tag{4.10}$$

где

$$G(g)(s) = g_1 + \int_0^s d\sigma \mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1} g)(\sigma). \tag{4.11}$$

Будем искать решение интегрального уравнения (4.10) в банаховом пространстве $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{B}^*)$. С этой целью введем замкнутое, ограниченное и выпуклое множество

$$\mathbb{V}_r \equiv \{g \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{B}^*) : |||g||| \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]} \|g\|_*(t) \le r\} \tag{4.12}$$

при некоторых $r > 0$ и $\mathrm{T} > 0$. Рассмотрим следующую операторную задачу:

$$g = \mathbb{H}(g), \quad \mathbb{H}(g) \equiv g_0 + \int\limits_0^t ds\, G(g)(s), \tag{4.13}$$

где $G(g)(s)$ определена формулой (4.11). Докажем, что $\mathbb{H}$ действует из $\mathbb{V}_r$ в $\mathbb{V}_r$ при достаточно большом $r > 0$ и достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Нам необходимо получить оценку для оператора $\mathrm{B}(\cdot)$ по норме банахова пространства $\mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \otimes \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{B}(w)\|_* \le c_4 \|\mathrm{B}(w)\|_{\mathbb{F}^*} \le c_5 \|\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u)\|_{-1,p'} \\
+ c_5 \|\operatorname{div}(\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v)\|_{-1,p'} \\
\le c_6 \|\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla u\|_{p'} + c_6 \|\kappa(x, \sqrt{|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2})\nabla v\|_{p'} \\
\le c_7 + c_7 \|[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{(p-1)/2}\|_{p'} = c_7 + c_7 \left(\int\limits_\Omega [|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2]^{p/2}\, dx \right)^{(p-1)/p} \\
= c_7 + c_7 \|w\|_{\mathbb{F}}^{p-1} \le c_7 + c_8 \|w\|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Итак, получена оценка

$$\|\mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g)\|_* \le c_7 + c_8 \|\mathbb{A}^{-1}g\|^{p-1} \le c_7 + c_8 \|g\|_*^{p-1}, \tag{4.14}$$

где использована липшиц-непрерывность оператора $\mathbb{A}^{-1}$ с постоянной Липшица, равной 1. Получим оценку для оператора $\mathbb{H}(g)$, определенного формулой (4.13). Действительно,

$$|||\mathbb{H}(g)||| \le \|g_0\|_* + \mathrm{T}^2[c_7 + c_8 |||g|||^{p-1}]. \tag{4.15}$$

Если выберем $r > 0$ настолько большим, что выполнено неравенство $\|g_0\|_* \le r/2$, а $\mathrm{T} > 0$ настолько малым, что $\mathrm{T}^2[c_7 + c_8 |||g|||^{p-1}] \le r/2$, то $|||\mathbb{H}(g)||| \le r$ для всех $g \in \mathbb{V}_r$, т. е. $\mathbb{H} : \mathbb{V}_r \to \mathbb{V}_r$.

Докажем, что оператор $\mathbb{H}(g)$ является сжимающим на $\mathbb{V}_r$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $r > 0$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
|||\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)||| \le \mathrm{T}^2 |||\mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_1) - \mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_2)||| = \mathrm{T}^2 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]} \|\mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_1) - \mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_2)\|_* \\
\le \mathrm{T}^2 c_9 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]} \|\mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_1) - \mathrm{B}(\mathbb{A}^{-1}g_2)\|_{\mathbb{F}^*} \le \mathrm{T}^2 c_9 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\mathrm{T}]} \mu(\mathrm{R}) \|\mathbb{A}^{-1}g_1 - \mathbb{A}^{-1}g_2\|_{\mathbb{F}} \\
\le \mathrm{T}^2 c_9 c_{10} \mu(c_{10}\mathrm{R}^*) |||g_1 - g_2|||,
\end{aligned}$$

где c_{10} — наилучшая постоянная вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$. Пусть $\mathrm{R}^* \equiv \max\{|||g_1|||, |||g_2|||\}$. Поскольку $g_1, g_2 \in \mathbb{V}_r$, то $\mathrm{R}^* \le r$ и поэтому из последней цепочки неравенств получим следующую оценку:

$$|||\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)||| \le \mathrm{T}^2 c_9 c_{10} \mu(c_{10} r) |||g_1 - g_2|||.$$

Если выберем $\mathrm{T} > 0$ настолько малым, что $\mathrm{T}^2 c_9 c_{10} \mu(c_{10} r) \leq 1/2$, то придем к оценке

$$|||\mathbb{H}(g_1) - \mathbb{H}(g_2)||| \leq \frac{1}{2} |||g_1 - g_2||| \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in \mathbb{V}_r. \tag{4.16}$$

Значит, оператор $\mathbb{H}(g)$, определенный формулой (4.13), является сжимающим на $\mathbb{V}_r$ оператором. Таким образом, операторное уравнение (4.13) имеет единственное решение $g \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{B}^*)$.

Докажем теперь, что решение $g(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{B}^*)$ интегрального уравнения (4.10) может быть продолжено на такой максимальный интервал $[0, \mathrm{T}_0)$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$, либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство $\limsup\limits_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \|g\|_*(t) = +\infty$. Действительно, рассмотрим норму $\psi(\mathrm{T}) \equiv \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in [0, \mathrm{T}]} \|g(t)\|_*(t)$. Функция $\psi(\mathrm{T})$ неубывающая. Стало быть, при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$ функция $\psi(\mathrm{T})$ имеет либо конечный, либо бесконечный предел. Предположим, что $\psi(\mathrm{T})$ имеет конечный предел при $\mathrm{T} \uparrow \mathrm{T}_0$. Пусть $\mathrm{T}' \in (0, \mathrm{T}_0)$. Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$g(\mathrm{T}') = g_0 + \int\limits_0^{\mathrm{T}'} ds\, G(g)(s), \tag{4.17}$$

где $G(g)(s)$ определено формулой (4.11), и

$$g(\mathrm{T}' + t) = g(\mathrm{T}') + \int\limits_{\mathrm{T}'}^{\mathrm{T}'+t} ds\, G(g)(s), \quad t > 0. \tag{4.18}$$

Введем функцию $q(t) = g(\mathrm{T}' + t)$ и сделаем замену переменных $\sigma = s - \mathrm{T}'$ в последнем интеграле. Тогда получим уравнение

$$g(t) = g(\mathrm{T}') + \int\limits_0^t d\sigma\, G(g)(\sigma), \quad t > 0. \tag{4.19}$$

Заметим, что

$$\|g\|_*(\mathrm{T}') \leq C < +\infty, \quad \mathrm{T}' \in (0, \mathrm{T}_0). \tag{4.20}$$

Уравнение (4.19) имеет вид (4.10). Поэтому найдется такой момент времени $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*(\mathrm{T}')$, что существует решение уравнения (4.19) на интервале $t \in (0, \mathrm{T}^*)$. В силу (4.20) функция $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}^*(\mathrm{T}')$ имеет минимум, больший нуля, который снова обозначим через T^*. В качестве T' возьмем величину $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$. Таким образом, получаем, что существует решение задачи (4.19) на интервале $t \in (0, \mathrm{T}^*)$. Подставив выражение для $v(\mathrm{T}')$ из уравнения (4.17) в уравнение (4.19), получим

$$g(t_0) = g_0 + \int\limits_0^{t_0} ds\, G(g)(s), \quad t_0 = \mathrm{T}' + t, t \in (0, \mathrm{T}^*). \tag{4.21}$$

Стало быть, в силу предыдущего существует единственное решение задачи (4.21) при $t_0 \in (0, \mathrm{T}' + \mathrm{T}^*)$. Ввиду выбора $\mathrm{T}' = \mathrm{T}_0 - \mathrm{T}^*/2$ имеем $t_0 \in (0, \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}^*/2)$. Таким образом, используя указанный алгоритм продолжения во времени, приходим к выводу, что $\mathrm{T}_0 = +\infty$. Полученное противоречие с условием, что

$T_0 < +\infty$, доказывает предельное равенство $\lim\limits_{T\uparrow T_0} \psi(T) = +\infty$. Отсюда сразу получаем, что $\limsup\limits_{t\uparrow T_0} \|g\|_*(t) = +\infty$.

Докажем, что решение $g \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{B}^*)$ на самом деле принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. С этой целью воспользуемся так называемым «бутстэп»-методом. Прежде всего докажем, что $g \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. Действительно, имеет место неравенство

$$\|\mathbb{H}(g)(t_1) - \mathbb{H}(g)(t_2)\|_* \leq \|\|G(g)(t)\|\||t_1 - t_2| \to 0$$

при $t_1 \to t_2$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Но тогда в силу операторного равенства (4.13) получим, что $g(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. Заметим, что в силу условия (iv) функция $B(\mathbb{A}^{-1}g)(t)$ принадлежит $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. Действительно, имеет место неравенство

$$\|\mathbb{A}^{-1}g(t_1) - \mathbb{A}^{-1}g(t_2)\| \leq \|g(t_1) - g(t_2)\|_* \to 0$$

при $t_1 \to t_2$. Значит, $\mathbb{A}^{-1}g(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. В силу условия (iv) имеем

$$\|B(\mathbb{A}^{-1}g)(t_1) - B(\mathbb{A}^{-1}g)(t_2)\|_* \leq c_{11}(T)\|\mathbb{A}^{-1}g(t_1) - \mathbb{A}^{-1}g(t_2)\| \to 0$$

при $t_1 \to t_2$ для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$. Стало быть,

$$\mathbb{H}(g)(t) = g_0 + g_1 t + \int\limits_0^t ds \int\limits_0^s d\sigma \gamma(\sigma), \quad \gamma(\sigma) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}^*).$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что $\mathbb{H}(g)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. В силу операторного равенства (4.13) получим, что $g(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B}^*)$. Отсюда ввиду цепного правила для производных Фреше следует, что $w(t) = \mathbb{A}^{-1}g(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{B})$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены свойства* (i)–(iii). *Тогда для любых* $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}$, $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}$ *найдется такое* $T_0 = T_0(w_0, w_1) > 0$, *что существует сильное обобщенное решение задачи* (2.7)–(2.10) *класса* $w(x, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; \mathbb{B})$, *понимаемое в смысле определения* 2, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$. *В последнем случае имеет место следующее предельное равенство:*

$$\limsup_{t\uparrow T_0} \|\mathbb{A}w\|_*(t) = +\infty, \quad \mathbb{A}w \equiv (\Delta^2 u - \Delta u, \Delta^2 v - \Delta v)^t. \tag{4.22}$$

Замечание 3. Обсудим выражение (4.22). Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}w\|_*(t) &= \sup_{z\in\mathbb{B}, \|z\|\leq 1} |\langle \mathbb{A}w, z\rangle| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{B}, \|z\|\leq 1} \left| \int\limits_\Omega (\nabla z_0, \nabla u_0)\, dx + \int\limits_\Omega (\nabla z_1, \nabla u_1)\, dx + \int\limits_\Omega \Delta z_0 \Delta u_0\, dx + \int\limits_\Omega \Delta z_1 \Delta u_1\, dx \right| \\ &\leq 2 \sup_{z\in\mathbb{B}, \|z\|\leq 1} \Phi^{1/2}[z](t)\Phi^{1/2}[w] \leq c_{12}\Phi^{1/2}[w](t),\end{aligned} \tag{4.23}$$

где $\Phi^{1/2}[w](t)$ определено формулой (3.19). Заметим, что справедлива оценка снизу

$$\|\mathbb{A}w\|_*(t)\|w\|(t) \geq \langle \mathbb{A}w(t), w(t)\rangle = 2\Phi[w](t). \tag{4.24}$$

С другой стороны,

$$\|w\|^2 = \left[\int\limits_\Omega |\Delta u|^2\,dx + \int\limits_\Omega |\Delta v|^2\,dx\right]^{1/2},$$

поэтому из определения (3.19) вытекает оценка сверху

$$\|w\|^2(t) \le 2\Phi[w](t),$$

откуда и из (4.24) получим неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t)\|\mathbb{A}w\|_*(t) \ge 2\Phi[w](t) \Rightarrow \|\mathbb{A}w\|_*(t) \ge \sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t). \tag{4.25}$$

Тем самым из неравенств (4.23) и (4.25) следует двустороннее неравенство

$$\sqrt{2}\Phi^{1/2}[w](t) \le \|\mathbb{A}w\|_*(t) \le c_{12}\Phi^{1/2}[w](t).$$

Итак, выражение (4.22) эквивалентно выражению

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \Phi[w](t) = +\infty, \tag{4.26}$$

где функционал $\Phi[w](t)$ определен формулой (3.19).

Таким образом, из теоремы 1 и результатов § 3 вытекает следующая основная теорема настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(iii) *и для начальных данных задачи* $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{B}$, $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathbb{B}$ *выполнены условия*

$$\int\limits_\Omega \mathscr{F}\left(x, \sqrt{|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2}\right)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\Delta u_1|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\Delta v_1|^2\,dx$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u_1|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v_1|^2\,dx \ge 0, \quad \mathscr{F}(x,h) = \int\limits_0^h ds\, s\kappa(x,s),$$

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0)\,dx + \int\limits_\Omega (\nabla v_1, \nabla v_0)\,dx + \int\limits_\Omega \Delta u_1 \Delta u_0\,dx + \int\limits_\Omega \Delta v_1 \Delta v_0\,dx > 0.$$

Тогда для момента времени T_0 *разрушения решения, фигурирующего в теореме* 1, *выполнены следующие оценки* $\mathrm{T}_0 \in (0, \mathrm{T}_1]$:

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{\alpha - 1}\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{4}{\theta - 2}\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} \quad \text{при некотором } \theta > 2,$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\Delta u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\Delta v_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla v_0|^2\,dx,$$

$$\Phi'(0) = \int\limits_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0)\,dx + \int\limits_\Omega (\nabla v_1, \nabla v_0)\,dx + \int\limits_\Omega \Delta u_1 \Delta u_0\,dx + \int\limits_\Omega \Delta v_1 \Delta v_0\,dx.$$

§ 5. Заключение

Отметим, что в данной работе рассмотрены пространственно локализованные «источники», описываемые функцией $\kappa(x,s)$, в плазме. Это важно с физической точки зрения, поскольку в реальной плазме источники действительно локализованы. Заметим, что аналогично выводу рассмотренного в данной работе уравнения можно вывести и уравнение нелинейных ионно-звуковых волн в «замагниченной» плазме, однако это уравнение четвертого порядка по времени и с нелинейным эллиптическим оператором при второй производной по времени. Насколько нам известно, такие уравнения еще не исследовались.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митидиери Э. Л., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 234.
2. *Levine H. A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathscr{F}(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V. 51. P. 371–386.
3. *Levine H. A.* Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathscr{F}(u)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192. P. 1–21.
4. *Калантаров В. К., Ладыженская О. А.* Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // Зап. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1977. Т. 69. С. 77–102.
5. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
7. *Галактионов В. А., Похожаев С. И.* Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1819—1846.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. М.: Наука, 1992.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Физическая кинетика. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2001. Т. 10.
10. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
11. *Gasinski L., Papageorgiou N. S.* Nonlinear analisys. New York: Chapman and Hall, 2005. (Ser. Math. Anal. Appl.; V. 9).
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Статья поступила 4 января 2010 г.

Корпусов Максим Олегович
Кафедра математики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, Москва 119899
korpusov@gmail.com