Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.17

О ПОЧТИ ХОРОШИХ ТРОЙКАХ ВЕРШИН В РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

В. И. Белоусова, А. А. Махнев

Аннотация. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Тройка вершин (u,w,z) называется (*почти*) *хорошей*, если $d(u,w) = d(u,z) = 2$ и $\mu(u,w)+\mu(u,z) \leq 2k-4b_1+3$ (и $\mu(u,w)+\mu(u,z) = 2k-4b_1+4$). Если $k = 3b_1+\gamma$, $\gamma \geq -2$, тройка вершин (u,w,z) почти хорошая и $\Delta = [u]\cap[w]\cap[z]$, то либо $|\Delta| \leq 2$, либо Δ является 3-кликой и Γ — граф Клебша, либо Δ является 3-кликой, $k = 16, b_1 = 6$ и $v = 31$, либо Δ является 4-кликой и Γ — граф Шлефли.

Ключевые слова: реберно регулярный граф, граф Клебша, граф Шлефли, почти хорошая тройка вершин.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Для подграфа Δ пусть $X_i(\Delta)$ — множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.*

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Пара вершин u, w называется (*почти*) *хорошей*, если $d(u,w)=2$ и $\mu(u,w)$ равно $k-2b_1+1$ (равно $k-2b_1+2$). Тройка вершин (u,w,z) называется *(почти) хорошей*, если $w,z \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u,w)+\mu(u,z)$ не больше $2k-4b_1+3$ (равно $2k-4b_1+4$).

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется m-*лапой.* *Треугольным*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-Словенского проекта 2010–2011 гг., программы отделения математических наук РАН (09–Т–1–1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (09–С–1–1007) и с НАН Беларуси (09–С–1–1009).

графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин такой, что $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$*-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф Клебша (граф Шлефли) — это единственный сильно регулярный граф с параметрами (16,10,6,6) (с параметрами (27,16,10,8)).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1, предложение, лемма 1.9] доказано, что если Γ — связный реберно регулярный граф диаметра 2 с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geq -2$, то выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ содержит такую 3-коклику Δ, что любые ее две вершины образуют хорошие пары, то $\gamma \leq -1$ и Γ является шестиугольником, графом икосаэдра или реберным графом тривалентного графа без треугольников, имеющим диаметр больше 2;

(2) если некоторая вершина u графа Γ лежит в хорошей паре, то либо $\gamma \leq b_1 - 6$, либо $b_1 = 1$ и Γ — многоугольник, либо $b_1 = 2$ и Γ — граф икосаэдра или граф с $k = 4$ диаметра, большего 2;

(3) если $\gamma \geq 0$ и для некоторой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины, образующие хорошие пары с u, то $\gamma < b_1/2 - 2$.

Эти результаты были получены с помощью изучения вложения почти хороших троек вершин в Γ. В данной работе выяснено расположение почти хороших троек в графах с $k \geq 3b_1 - 2$.

Теорема. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), $k = 3b_1 + \gamma$ и $\gamma \geq -2$. Если (u, w, z) — почти хорошая тройка и $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ — непустой граф, то вершины w, z смежны и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $|\Delta| \leq 2$ *и* $\gamma \leq -1$;

(2) *подграф* Δ *является* 3*-кликой,* $b_1 = 6, k = 16$ *и* $v = 31$;

(3) *подграф* Δ *является* 3*-кликой,* $b_1 = 3$ *и* Γ *— граф Клебша;*

(4) *подграф* Δ *является* 4*-кликой,* $b_1 = 5$ *и* Γ *— граф Шлефли.*

С помощью указанной теоремы в [2–4] существенно уточнены верхние оценки из [1] для числа вершин в реберно регулярных графах с $k \geq 3b_1 - 2$.

Приведем сначала некоторые вспомогательные утверждения. Для вполне регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ) хорошо известно неравенство $\mu \geq k - 2b_1 + 1$.

Лемма 1. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *степень любой вершины в μ-подграфе из Γ не меньше $k - 2b_1$;*

(2) *вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит точно $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^{\perp} \cup w^{\perp}$;*

(3) *если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^{\perp} \cup w^{\perp}$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;*

(4) *если* $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ *содержит единственную вершину* z, *то* $\mu(u,z) = \mu(w,z)$.

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ-подграфе равна α. Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u,z)$, то $\mu(u,z) = \mu(w,z)$. Лемма доказана.

Пусть $w, z \in \Gamma_2(u)$. Пару вершин (u,w) назовем *почти хорошей*, если $\mu(u,w) = k - 2b_1 + 2$. Тройку вершин (u,w,z) назовем (*почти*) *хорошей*, если $\mu(u,w) + \mu(u,z)$ не больше $2k - 4b_1 + 3$ (равно $2k - 4b_1 + 4$). Свойства почти хороших троек вершин изучаются в следующих пяти леммах.

Лемма 2. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с* $k \geq 3b_1 - 3$, $\mu(u,w) + \mu(u,z) = 2k - 4b_1 + 4$ *для двух вершин* w, z *из* $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ *и* $\delta = |\Delta|$. *Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *вершины* w, z *несмежны,* $\delta \leq 1$ *и в случае* $\delta = 1$ *имеем* $k = 3b_1 - 3$;

(2) Δ *содержит две несмежные вершины,* $\delta = 2$ *и* $k \leq 3b_1 - 1$;

(3) *вершины* w, z *смежны,* Δ *является кликой и если* $\delta > 1$, *то либо*

(i) *подграф* Δ *содержит единственную вершину* d, *смежную с вершиной вне* $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, $\delta \leq 2$, $k \leq 3b_1 - 2$ *и для* $e \in \Delta(d)$ *подграф* $[d] \cup [e]$ *содержит* $[w] \cap [z] - [u]$, *а* $[d] \cap [e]$ *содержится в* $\{u,w,z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, *либо*

(ii) *подграф* Δ *не содержит вершин, смежных с вершиной вне* $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, *и для любых двух вершин* $d, e \in \Delta$ *подграф* $[d] \cap [e]$ *содержит* $\lambda - 1 + \gamma$ *вершин из* $\{u,w,z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, *где* $\gamma = |[w] \cap [z] - ([d] \cup [e])|$.

Доказательство. Это лемма 1.4 из [5].

Лемма 3. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф. Тогда*

(1) *если* Γ *содержит хорошую тройку* (u,w,z), *то* $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$;

(2) *если* $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geq 0$ *и* Γ *содержит хорошую пару* u, w, *то* $\mu(u,z) \geq b_1 + \gamma + 3$ *для любой вершины* $z \in [w] - [u]$, *и* $b_1 \geq 8$;

(3) *если* $k \geq 3b_1$, $b_1 \leq 6$ *и* Γ *содержит почти хорошую пару* (u,w), *то либо* $b_1 = 1$ *и* Γ — *граф* $K_{n \times 2}$, $n \geq 3$, *либо* $b_1 = 3$ *и* Γ — *граф Клебша, либо* $b_1 = 5$ *и* Γ — *граф Шлефли.*

Доказательство. Это лемма 1.5 из [5].

Лемма 4. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ), $b_1 = 7, k = 21 + \gamma$ *и* $\gamma \geq 0$. *Тогда* γ *нечетно и* Γ *не содержит почти хороших пар.*

Доказательство. Это лемма 1.6 из [5].

Лемма 5. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с* $k = 3b_1 - 1$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $b_1 \leq 5$ *и* Γ *содержит хорошую пару, то либо* $b_1 = 1$ *и* Γ *является* n-*угольником для* $n \geq 5$, *либо* $b_1 = 2$ *и* Γ *является графом икосаэдра;*

(2) *если* $b_1 \leq 6$ *и* Γ *содержит почти хорошую пару, то* $b_1 = 1$ *и* Γ — *четырехугольник.*

Доказательство. Утверждения леммы следуют из леммы 1.6 [2].

Лемма 6. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k = 3b_1 - 2$, $b_1 \leq 5$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит хорошую пару, то $b_1 = 2$ и Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников диаметра, большего 2;*

(2) *если Γ содержит почти хорошую пару, то либо $b_1 = 1$ и Γ — четырехугольник, либо $b_1 = 2$ и Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников (в частности, 3×3-решеткой), либо $b_1 = 4$ и Γ — треугольный граф $T(7)$.*

Доказательство. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k = 3b_1 - 2$. Тогда b_1 четно.

Пусть Γ содержит хорошую пару. Если $b_1 \leq 4$, то утверждение следует из леммы 2.1 [1]. Если же $b_1 = 5$, то $k = 13$, $\lambda = 7$ и число $k\lambda$ нечетно; противоречие.

Пусть Γ содержит почти хорошую пару (u, w). Если граф Γ сильно регулярен, то он имеет собственное значение -2. Поэтому Γ — полный многодольный граф $K_{n \times 2}$, $n \times n$-решетка, треугольный граф $T(n)$, граф Петерсена, граф Шрикханде, граф Клебша, граф Шлефли или один из трех графов Чанга. Среди этих графов $k = 3b_1 - 2$ только в 3×3-решетке и в треугольном графе $T(7)$.

Если диаметр Γ больше 2, то по следствию из [6] Γ — многоугольник, граф икосаэдра или реберный граф тривалентного графа без треугольников. Но в первых двух случаях $k = 3b_1 - 1$.

Пусть диаметр Γ равен 2, но Γ не является сильно регулярным графом. В случае $b_1 = 2$ по лемме 1.4 из [1] Γ — тривалентный граф без треугольников, реберный граф тривалентного графа без треугольников, граф икосаэдра или сильно регулярный граф.

В случае $b_1 = 4$ имеем $k = 10$ и ввиду теоремы из [7] граф Γ сильно регулярен. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть Γ является связным реберно регулярным графом с $k = 3b_1 + \gamma$, $\gamma \geq -2$. Если $\gamma \geq 0$, то теорема следует из предложения 1 в [5]. Если $\gamma = -1$, то теорема следует из теоремы 1 в [2].

Пусть до конца работы $k = 3b_1 - 2$. Тогда $\lambda = 2b_1 - 3$ и ввиду леммы 5 можно считать, что $b_1 \geq 6$. По следствию из [6] граф Γ имеет диаметр 2 и не более чем $2k$ вершин. Так как $\lambda = 2b_1 - 3$ и $k\lambda$ четно, то b_1 четно.

Лемма 7. *Пусть $b_1 \geq 6$ и $\mu(u, w) = \mu(u, z) = b_1 - 1$ для различных вершин $w, z \in \Gamma_2(u)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит вершину a, $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ содержит две вершины z_1, z_2, $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$ содержит две вершины w_1, w_2, $[a]$ содержит точно одну вершину e из $[u] - ([w] \cup [z])$ и либо $\Gamma_2(u) \subset w^{\perp} \cup z^{\perp}$, $v - k - 1 = 2b_1 + 2$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3, либо $\Gamma_2(u) - (w^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит точно одну вершину x, $\mu(a, x) = b_1 - 1$, $b_1 \geq 8$, $\{w_1, w_2, z_1, z_2\} \subset [x]$, для любой вершины p из $[a] \cap [w] \cap [z]$ число $|[p] \cap \{w_1, w_2, z_1, z_2\}|$ нечетно, $v - k - 1 = 2b_1 + 3$ и $b_1(b_1 + 1)$ делится на 3;*

(2) *$|[u] \cap [w] \cap [z]| = 0$, вершины w, z смежны, $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ содержит точно одну вершину z^*, $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$ содержит точно одну вершину w^*, вершины w^*, z^* не смежны, $[w^*]$ содержит $b_1/2 - 1$ вершин из $[u] \cap [z]$ и b_1 вершин из $[u] - [z]$, $\Gamma_2(u) \subset w^{\perp} \cup z^{\perp}$, $v - k - 1 = 2b_1 + 1$, b_1 делится на 6 и $\mu(u, y) > b_1$ для любой вершины y из $[w] \cap [z]$;*

(3) $|[u] \cap [w] \cap [z]| = 0$, *вершины* w, z *не смежны*, $b_1 + 3 \leq \mu(w, z) \leq 2b_1 - 3$, $\mu(u, y) \geq b_1$ *для любой вершины* $y \in \Gamma_2(u) - \{w, z\}$ *и либо* $\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cup z^\perp$, $v - k - 1 = 4b_1 - \mu(w, z)$, $b_1(\mu(w, z) + 1 - b_1)$ *делится на* 3, *либо* $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ *содержит точно одну вершину* x, $\mu(u, x) = b_1$, $v - k - 1 = 4b_1 - \mu(w, z) + 1$ *и* $b_1(\mu(w, z) - b_1)$ *делится на* 3.

Доказательство. Пусть $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит вершину a. Тогда по лемме 2.6 из [1] имеем $\{w_1, w_2, z_1, z_2\} \subset [x]$ и все утверждения из п. (1), кроме неравенства $b_1 \geq 8$, выполняются по лемме 2.3 из [1].

Пусть $b_1 = 6$ и $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит вершину x. Тогда для любой вершины $p \in [a] \cap [w] \cap [z]$ подграф $[a] \cap [p]$ содержит e, w, z, три вершины из $[a] \cap [w] \cap [z]$ и три вершины из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. Ввиду леммы 2.3 из [1] подграф $[p]$ содержит нечетное число вершин из $\{w_1, w_2, z_1, z_2\}$. Без ограничения общности, $p \in [w_1] - [w_2]$. Тогда $[p] - w^\perp$ содержит x, w_1, вершину из $[u] \cap [z]$ и три вершины из $[u] - ([w] \cup [z])$. Поэтому $\mu(u, p) = 6$; противоречие с леммой 1.4. Утверждение (1) доказано.

Пусть $|[u] \cap [w] \cap [z]| = 0$ и вершины w, z смежны. Тогда утверждение (2) следует из леммы 2.4 в [1].

Пусть $|[u] \cap [w] \cap [z]| = 0$ и вершины w, z не смежны. Если $\mu(w, z) = b_1 - 1$, то по предложению из [1] имеем $k = 3b_1 - 1$; противоречие. Так как $v \leq 2k$, то $v - k - 1 \leq k - 1$, поэтому $4b_1 - \mu(w, z) \leq 3b_1 - 3$, $\mu(w, z) \geq b_1 + 3$, и утверждение (3) следует из леммы 2.5 в [1].

Лемма 8. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с* $k = 16$, $b_1 = 6$. *Если* Γ *содержит хорошую пару, то* $v \leq 31$.

Доказательство. Пусть $k = 16$, $b_1 = 6$ и Γ содержит хорошую пару u, w. Если $v \geq 32$, то ввиду леммы 6 имеем $\mu(u, z) \geq 6$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$. По следствию из [6] $v = 32$. Положим $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp) = \{y_1, y_2, y_3\}$. Тогда $[y_i]$ содержит не более 2 вершин из $\{y_1, y_2, y_3\}$ и не менее 14 вершин из $([w] - [u]) \cup ([u] - [w])$. Поэтому можно считать, что число ребер между $[u]$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ не меньше 21, а число ребер между $[u]$ и $[w] - [u]$ не больше 70. Отсюда $[w] - [u]$ содержит не менее семи вершин z с $\mu(u, z) = 6$. По лемме 2 подграф $[z]$ содержит не более одной вершины из $[u] \cap [w]$ и не более одной вершины из $\{y_1, y_2, y_3\}$. Поэтому число ребер между $[w] - [u]$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ не больше 19, а число ребер между $[u] - [w]$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ не меньше 23. Отсюда $[w] - [u]$ содержит не менее девяти вершин z с $\mu(u, z) = 6$, число ребер между $[w] - [u]$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ не больше 15, а число ребер между $[u] - [w]$ и $\{y_1, y_2, y_3\}$ не меньше 27; противоречие.

Лемма 9. *Пусть* $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2k - 4b_1 + 4$ *для смежных вершин* w, z *из* $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ *и* $\delta = |\Delta|$. *Если* $\delta > 2$, *то либо* $\delta = b_1/2 = 3$, *либо* $b_1 \geq 8$ *и* $b_1/2 + 1 \leq \delta \leq b_1 - 3$.

Доказательство. Пусть $\delta > 2$. По лемме 2 подграф Δ является кликой, не содержащей вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$. Положим $\Sigma = [w] \cap [z] - [u]$, $\Delta = \{a_1, \ldots, a_\delta\}$. Для различных вершин a_i, a_j подграф $[a_i]$ содержит u, w, z, не менее $2b_1 - 2 - \delta$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более $b_1 - 2$ вершин из Σ, а подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит u, w, z, не менее $2b_1 - 4 - \delta$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не более $\delta - 2$ вершин из Σ.

Допустим, что $\delta \leq b_1/2$. Докажем сначала утверждение

(a) если $\delta = 3$, то $b_1 = 6$.

Пусть $3 = \delta \leq b_1/2 - 1$. Тогда $b_1 \geq 8$, $|\Sigma| = \lambda - \delta = 2b_1 - 6$ и для различных вершин a_i, a_j подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит не более одной вершины из Σ. Далее, $|\Sigma - [a_i]| \geq b_1 - 4$, поэтому $[a_2] \cap [a_3]$ содержит не менее $b_1 - 6$ вершин из $\Sigma - [a_1]$. Отсюда $b_1 - 6 \leq 1$; противоречие. Утверждение (a) доказано. Докажем утверждение

(b) если $\delta \geq 4$, то $\delta = b_1/2$.

Пусть $4 \leq \delta \leq b_1/2 - 1$. Тогда $b_1 \geq 10$, $|\Sigma| = \lambda - \delta \geq 3b_1/2 - 2$ и для различных вершин a_i, a_j подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит не более $b_1/2 - 3$ вершин из Σ. Далее, $|\Sigma - [a_i]| \geq b_1/2$, поэтому $|\Sigma - ([a_1] \cup [a_2])| \geq b_1 - 1$ и $[a_3] \cap [a_4]$ содержит не менее $b_1 - 5$ вершин из $\Sigma - ([a_1] \cup [a_2])$. Отсюда $b_1/2 - 3 \geq b_1 - 5$ и $b_1 \leq 4$; противоречие. Утверждение (b) доказано.

Пусть $\delta = b_1/2$ и $b_1 \geq 8$. Тогда $|\Sigma| = \lambda - \delta = 3b_1/2 - 3$ и для любых двух вершин a_i, a_j подграф $[a_i] \cap [a_j]$ содержит u, w, z и не более $b_1/2 - 2$ вершин из Σ. Докажем утверждение

(c) каждая вершина из Δ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из Σ.

Если $[a_1]$ содержит ровно $b_1 - 4$ вершин из Σ, то $|\Sigma - [a_1]| = b_1/2 + 1$ и $[a_2] \cap [a_3]$ содержит не менее $b_1/2 - 1$ вершин из $\Sigma - [a_1]$; противоречие.

Если $[a_1]$ содержит ровно $b_1 - 3$ вершин из Σ, то $|\Sigma - [a_2]| = b_1/2$ и $[a_2] \cap [a_3]$ содержит точно $b_1/2 - 2$ вершин из $\Sigma - [a_1]$. Поэтому $[a_2] \cap [a_3]$ не пересекает $\Sigma \cap [a_1]$ и $[a_2]$ содержит ровно $b_1/2 - 1$ вершин из $\Sigma - [a_1]$. Если $[a_2]$ и $[a_3]$ содержат по $b_1 - 2$ вершин из Σ, то $[a_2] \cup [a_3]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $\Sigma \cap [a_1]$; противоречие. Значит, Δ содержит не более одной вершины, смежной с $b_1 - 2$ вершинами из Σ, и мы можем считать, что $|[a_i] \cap \Sigma| = b_1 - 3$ для $i = 1, \ldots, \delta - 1$. Отсюда $[a_2] \cap [a_3]$ содержит u, w, z, $b_1/2 - 2$ вершин из $\Sigma - [a_1]$ и не менее $2b_1 - 2 - \delta = 3b_1/2 - 2$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$; противоречие. Утверждение (c) доказано. Докажем утверждение

(d) каждая вершина из Σ смежна не менее чем с $b_1/2 - 2$ вершинами из Δ.

Предположим, что 3 вершины a_1, a_2, a_3 из Δ не смежны с вершиной y из Σ. Ввиду леммы 2 для любых различных $i, j \in \{1, 2, 3\}$ подграф $[a_i] \cup [a_j]$ содержит $\Sigma - \{y\}$. Так как каждая из вершин a_1, a_2, a_3 смежна с $b_1 - 2$ вершинами из Σ, то $\Sigma - \{y\}$ содержит $b_1/2 - 2$ вершин из $[a_i] \cap [a_j]$ и по $b_1/2$ вершин из $[a_i] - [a_j]$, $[a_j] - [a_i]$; противоречие с тем, что $|\Sigma| = 3b_1/2 - 3$. Утверждение (*d*) доказано.

Теперь число ребер между Δ и Σ равно $b_1/2(b_1 - 2)$, но не меньше $(b_1/2 - 2)(3b_1/2 - 3)$. Отсюда $b_1^2 - 14b_1 + 24 \leq 0$ и $1 \leq b_1 \leq 6$; противоречие.

Итак, $\delta \geq b_1/2 + 1$.

Заметим, что $|\Gamma_2(u) \cap ([w] \cup [z])| = 2b_1 - 1 + \delta$, поэтому $2b_1 - 1 + \delta \leq v - k - 1 \leq 3b_1 - 3$ и $\delta \leq b_1 - 2$.

Допустим, что $b_1 - 2 = \delta$. Тогда $|[u] - ([w] \cup [z])| = 2b_1 - 4$, число ребер между Δ и $[u] - ([w] \cup [z])$ не меньше $(b_1 - 2)(b_1 - 4)$ и некоторая вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с $b_1/2 - 2$ вершинами из Δ. Поэтому $(b_1/2 - 2)(b_1 - 5) \leq 2b_1 - 5$ и $b_1 \leq 10$.

Пусть $b_1 = 10$. Тогда каждая вершина из Δ смежна точно с шестью вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$ и вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с тремя вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ. Далее, подграф $\Lambda = [u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda \cap [a_1], \Lambda \cap [a_2], \Lambda \cap [a_3]\}$. Поэтому $[a_4]$ содержит не менее двух вершин из некоторой компоненты разбиения; противоречие.

Пусть $b_1 = 8$ и вершина e из $[u] - ([w] \cup [z])$ смежна с t вершинами $a_1, \ldots, a_t$ из Δ. Если $t = 4$, то подграф $\Lambda = [u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda \cap [a_i] \mid i \in \{1, \ldots, 4\}\}$; противоречие с тем, что $|[u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})| = 11$. Если $t = 3$, то Λ не имеет разбиения $\{\Lambda \cap [a_i] \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$, поэтому по крайней мере 2 вершины из $\{a_1, a_2, a_3\}$, скажем a_1, a_2, смежны с четырьмя вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $[a_3]$ содержит по 3 вершины из $\Sigma-([a_1]\cup[a_2])$ и 6 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$. Противоречие с тем, что снова Λ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i] \mid i\in\{1,2,3\}\}$. Итак, каждая вершина из Δ смежна с четырьмя вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$ и каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с двумя вершинами из Δ. Отсюда каждая вершина из Δ смежна с четырьмя вершинами из Σ. Для вершин e_2, e_3 из $[a_1]\cap[u]-([w]\cup[z])$ и для $[e_i]\cap\Delta=\{a_1,a_i\}$ подграф $[a_3]$ содержит 3 вершины из $\Sigma-[a_1]$ и не менее двух вершин из $\Sigma-[a_2]$; противоречие.

Пусть $b_1=6$. Тогда $k=16, \lambda=9$ и $v=32$; противоречие с леммой 8.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия леммы* 9 *и* $\delta>3$. *Тогда каждая вершина из* Δ *смежна по крайней мере с* $\delta-2$ *вершинами из* $[u]-([w]\cup[z])$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1\geq 14$;

(2) *в подграфе* $[u]-([w]\cup[z])$ *нет вершин, смежных с четырьмя вершинами из* Δ;

(3) $b_1\geq 18$;

(4) *если каждая вершина из* $[u]-([w]\cup[z])$ *смежна не более чем с тремя вершинами из* Δ, *то* $b_1\leq 16$.

Доказательство. Пусть $\delta>3$. Заметим, что каждая вершина из Δ смежна не более чем с $2b_1-1-\delta$ вершинами из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и по крайней мере с $\delta-2$ вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$.

Пусть $b_1=8$. Тогда $\delta=5$, $k=22, \lambda=13$ и v делится на 3. Поэтому $v=45$; противоречие с тем, что $v\leq 2k$.

Пусть $b_1=10$. Тогда $\delta\in\{6,7\}$, $k=28, \lambda=17$ и v делится на 3. Поэтому $\delta=6$, $v=54$ и $\Gamma_2(u)\subset[w]\cup[z]$. Далее, $|[u]-([w]\cup[z])|=14$, $|\Sigma|=11$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше 24. Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1,a_2,a_3 из Δ. Если вершина a_1 смежна с четырьмя вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то $[a_1]$ содержит 6 вершин из Σ. Тогда $[a_2]\cap[a_3]$ содержит e,u,w,z, 8 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и 5 вершин из Σ, поэтому подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,2,3\}\}$; противоречие. Если вершина a_1 смежна с шестью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то снова подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,\dots,3\}\}$. Значит, каждая вершина a_i для $i\in\{1,2,3\}$ смежна с пятью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $\Lambda-([a_1]\cup[a_2]\cup[a_3])$ содержит единственную вершину e'. Если для $j>3$ подграф $[a_j]$ не содержит e', то $[a_j]$ содержит 2 вершины в одном из подграфов $\Lambda\cap[a_i]$, $i\in\{1,2,3\}$. Значит, вершина e' смежна с a_4,a_5,a_6. Как и выше, каждая вершина a_j для $j\in\{4,5,6\}$ смежна с пятью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. Снова подграф $[a_4]$ содержит 2 вершины в одном из подграфов $\Lambda\cap[a_i]$, $i\in\{1,2,3\}$; противоречие.

Итак, в $[u]-([w]\cup[z])$ нет вершин, смежных с тремя вершинами из Δ. Поэтому число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не больше 28, $[u]-([w]\cup[z])$ содержит не менее десяти вершин, смежных с парами вершин из Δ, и окрестность некоторой вершины a_5 из Δ содержит 4 вершины e_i из $[u]-([w]\cup[z])$, смежные с парами вершин $\{a_5,a_i\}$ из Δ. Если $[a_5]$ содержит точно 4 вершины из $[u]-([w]\cup[z])$, то $|\Sigma-[a_5]|=5$ и $[a_2]\cap[a_3]$ содержит u,w,z, 5 вершин из $\Sigma-[a_5]$, вершину из $\Sigma-[a_1]$ и не менее восьми вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$. Отсюда $[a_i]$ содержит 6 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$ и число ребер между Δ и $[u]-([w]\cup[z])$ не меньше 32; противоречие. Если $[a_5]$ содержит точно 5 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, то $|\Sigma-[a_5]|=4$, можно считать, что a_1 смежна не более чем с пятью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $[a_2]\cap[a_3]$ содержит u, w, z, 4 вершины из $\Sigma-[a_5]$, 2 вершины из $\Sigma-[a_1]$ и не менее восьми вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$. Отсюда $[a_i]$ содержит 6 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$ для $i\in\{2,3,4\}$ и число ребер между Δ и $[u]-([w]\cup[z])$ не меньше 30; противоречие. Если $[a_5]$ содержит 6 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$, то $\{a_1,\dots,a_4\}$ содержит 2 вершины, скажем a_1,a_2, смежные точно с четырьмя вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $[a_1]\cap[a_2]$ содержит u,w,z, 3 вершины из $\Sigma-[a_5]$ и 12 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$; противоречие.

Пусть $b_1=12$. Тогда $\delta\in\{7,8,9\}$, $k=34$ и $\lambda=21$. Рассмотрим сначала случай $\delta=7$. Тогда $|[u]-([w]\cup[z])|=17$, $|\Sigma|=14$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше 35. Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1,a_2,a_3 из Δ. Если вершина a_1 смежна с пятью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то $[a_1]$ содержит 8 вершин из Σ. Тогда $[a_2]\cap[a_3]$ содержит e,u,w,z, 11 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и 6 вершин из Σ, поэтому подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,\dots,3\}\}$; противоречие. Если вершина a_1 смежна с семью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то снова подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,\dots,3\}\}$. Значит, каждая вершина a_i для $i\in\{1,2,3\}$ смежна с шестью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $\Lambda-([a_1]\cup[a_2]\cup[a_3])$ содержит единственную вершину e'. Противоречие с тем, что $[a_4]$ содержит 2 вершины в одном из подграфов $\Lambda\cap[a_i]$, $i\in\{1,\dots,3\}$.

Пусть $\delta=8$. Тогда $|[u]-([w]\cup[z])|=18$, $|\Sigma|=13$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше 48. Ясно, что в $[u]-([w]\cup[z])$ нет вершин, смежных с четырьмя вершинами из Δ. Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1,a_2,a_3 из Δ. Тогда $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ содержит не более двух вершин, не принадлежащих $[a_1]\cup[a_2]\cup[a_3]$. Противоречие с тем, что $[a_4]\cap[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ содержит не менее двух вершин в одном из подграфов $[a_1]$, $[a_2]$ или $[a_3]$.

Пусть $\delta=9$. Тогда $|[u]-([w]\cup[z])|=19$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше 63. Поэтому некоторая вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с четырьмя вершинами из Δ. Противоречие с тем, что число ребер между $[e]\cap\Delta$ и $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ не меньше 24. Утверждение (1) доказано.

Если некоторая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с четырьмя вершинами из Δ, то $4(\delta-3)\le b_1+\delta-3$, поэтому $3b_1/2+3\le 3\delta\le b_1+9$ и $b_1\le 12$; противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть $b_1=14$. Тогда $8\le\delta\le 11$, $k=40,\lambda=25$ и v делится на 3. Если $\delta=11$, то $v\ge 81$; противоречие.

Пусть $\delta=8+i$. Тогда $|[u]-([w]\cup[z])|=20+i$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше $(8+i)(6+i)$. Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1,a_2,a_3 из Δ. Если $i>0$, то $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ содержит не более двух вершин, не принадлежащих $[a_1]\cup[a_2]\cup[a_3]$, поэтому $[a_4]\cap[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ содержит не менее двух вершин в одном из подграфов $[a_1]$, $[a_2]$ или $[a_3]$.

Значит, $\delta=8$. Если вершина a_1 смежна точно с шестью вершинами из $[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$, то $|\Sigma-[a_1]|=7$ и $[a_2]\cap[a_3]$ содержит e,u,w,z, 7 вершин из $\Sigma-[a_1]$ и не менее 14 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$. В этом случае подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,\dots,3\}\}$; противоречие. Если вершина a_1 смежна с восемью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$, то снова подграф $\Lambda=[u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i]\mid i\in\{1,\dots,3\}\}$. Значит, каждая вершина a_i для $i\in\{1,2,3\}$ смежна с семью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $\Lambda-([a_1]\cup[a_2]\cup[a_3])$ содержит единственную вершину. Противоречие с тем, что $[a_4]$ содержит 2 вершины в одном из подграфов $\Lambda \cap [a_i]$, $i \in \{1, \dots, 3\}$.

Пусть $b_1 = 16$. Тогда $9 \le \delta \le 13$, $k = 46, \lambda = 29$ и v делится на 3. Если $\delta = 13$, то $v \ge 93$; противоречие.

Пусть $\delta = 9 + i$. Тогда $|[u] - ([w] \cup [z])| = 23 + i$ и число ребер между $[u]-([w]\cup[z])$ и Δ не меньше $(9+i)(7+i)$. Если $i > 0$, то $[u]-([w]\cup[z])$ содержит вершину, смежную с четырьмя вершинами из Δ; противоречие с утверждением (2).

Значит, $\delta = 9$. Пусть вершина e из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна с тремя вершинами a_1, a_2, a_3 из Δ. Если вершина a_1 смежна точно с семью вершинами из $[u] - ([w] \cup [z] \cup \{e\})$, то $|\Sigma - [a_1]| = 8$ и $[a_2] \cap [a_3]$ содержит e, u, w, z, 8 вершин из $\Sigma - [a_1]$ и не менее 17 вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$. В этом случае подграф $\Lambda = [u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i] \mid i \in \{1, \dots, 3\}\}$; противоречие. Если вершина a_1 смежна с девятью вершинами из $[u] - ([w] \cup [z])$, то снова подграф $\Lambda = [u]-([w]\cup[z]\cup\{e\})$ имеет разбиение $\{\Lambda\cap[a_i] \mid i \in \{1, \dots, 3\}\}$. Значит, каждая вершина a_i для $i \in \{1, 2, 3\}$ смежна с семью вершинами из $[u]-([w]\cup[z])$. В этом случае $\Lambda - ([a_1] \cup [a_2] \cup [a_3])$ содержит единственную вершину. Противоречие с тем, что $[a_4]$ содержит 2 вершины в одном из подграфов $\Lambda \cap [a_i]$, $i \in \{1, \dots, 3\}$. Утверждение (3) доказано.

Если каждая вершина из $[u]-([w]\cup[z])$ смежна не более чем с тремя вершинами из Δ, то $\delta(\delta-2) \le 3(b_1+\delta-2)$. Отсюда $\delta^2-5\delta-3b_1+6 \le 0$ и $\delta < 5/2+\sqrt{3b_1}$, поэтому $b_1^2 - 18b_1 + 9 < 0$ и $b_1 \le 16$. Лемма, а вместе с ней и теорема в случае $k = 3b_1 - 2$ доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Махнев А. А., Падучих Д. В.* Новая оценка для числа вершин реберно регулярных графов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. С. 46–61.
2. *Махнев А. А., Чуксина Н. В.* О хороших парах вершин в реберно регулярных графах с $k = 3b_1 - 1$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 53–67.
3. *Исакова М. М., Махнев А. А.* О числе вершин в реберно регулярных графах с $k \ge 3b_1$ // Тр. 40-й Всерос. молодежной конф. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2009. С. 16–18.
4. *Махнев А. А., Токбаева А. А.* О числе вершин в реберно регулярных графах с $k = 3b_1-2$ // Тр. 40-й Всерос. молодежной конф. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2009. С. 32–35.
5. *Махнев А. А., Чуксина Н. В.* О реберно регулярных графах, в которых каждая вершина лежит не более чем в одной хорошей паре // Владикавказск. мат. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 53–67.
6. *Минакова И. М., Махнев А. А.* Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомельск. гос. ун-та. 2000. Т. 16. С. 145–154.
7. *Васильев С. А., Махнев А. А.* О вполне регулярных графах с $b_1 = 4$ // Изв. Гомельск. гос. ун-та. 2006. Т. 22. С. 101–108.

Статья поступила 1 декабря 2008 г.

Белоусова Вероника Игоревна, Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
makhnev@imm.uran.ru