Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.214

ОДНА ОБЩАЯ ОЦЕНКА В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. Саханенко

Аннотация. Получены оценки для точности, с которой случайную ломаную, построенную по суммам независимых разнораспределенных случайных величин, можно приблизить винеровским процессом. Все оценки явным образом зависят от моментов случайных величин, причем моменты могут быть достаточно общего вида. В случае одинаково распределенных величин впервые удалось построить оценку, которая явно зависит от общего распределения слагаемых и из которой одной немедленно следуют все результаты из знаменитых работ Комлоша, Майора, Тушнади, посвященных оценкам в принципе инвариантности.

Ключевые слова: принцип инвариантности, оценки скорости сходимости, оценки Комлоша — Майора — Тушнади, метод одного вероятностного пространства.

§ 1. Введение и первые результаты

1.1. Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — бесконечная последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(\cdot)$, и пусть

$$\mathbf{E}X = 0, \quad \mathbf{D}X = 1, \quad S_n := X_1 + \dots + X_n. \tag{1.1}$$

Рассматривается вопрос о построении такого винеровского процесса $W(\cdot)$, чтобы величина $\max\limits_{k \le n} |S_k - W(k)|$ была как можно меньше в некотором смысле. Такая задача является ключевой при изучении скорости сходимости в принципе инвариантности. Этому известному направлению посвящено большое количество публикаций, среди которых надо в первую очередь отметить работы Ю. В. Прохорова [1], А. В. Скорохода [2], А. А. Боровкова [3] (в них не предполагалась одинаковая распределенность величин $\{X_j\}$).

В случае одинаково распределенных величин $\{X_j\}$ качественный скачок в решении поставленной задачи сделан в работах Комлоша, Майора и Тушнади [4, 5]. Для удобства дальнейших ссылок приведем основные результаты из [5]. При этом в силу [6], не уменьшая общности, будем считать, что нужные нам процессы $W(\cdot)$ построены на том же вероятностном пространстве, что и первоначально заданные величины $\{X_j\}$ (см. замечание 3.2).

Теорема А. *Пусть справедливо условие* (1.1) *и*

$$\mathbf{E}e^{t_0|X|} < \infty \quad \text{\textit{при некотором} } t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–12131).

В этом случае можно построить такой винеровский процесс $W_F(\cdot)$, что верно следующее неравенство:

$$\forall n \geq 1 \ \forall x > 0 \quad \mathbf{P}[\max_{k \leq n} |S_k - W_F(k)| > C \log n + x] \leq K e^{-\lambda x}, \tag{1.3}$$

где постоянные C, K и λ зависят только от распределения F. В частности, $S_n - W_F(n) = O(\log n)$ п. н.

Будем говорить, что функция $H(\cdot)$ *принадлежит классу* $\mathscr{H}(x_0, \alpha)$, если

(a) $x_0 > 0$, $H(x_0) > 0$ и $H(\cdot)$ — четная неотрицательная функция;

(b) $\alpha > 2$ и функция $h_\alpha(x) := H(x)/x^\alpha$ не убывает при $x \geq x_0$;

(c) функция $h(x) := x^{-1} \log H(x)$ не возрастает при $x \geq x_0$.

Будем далее говорить, что функция $H(\cdot)$ *принадлежит подклассу* $\mathscr{H}_0(x_0, \alpha)$ *класса* $\mathscr{H}(x_0, \alpha)$, если дополнительно

(d) функция $H(x)$ непрерывна и не убывает при всех $x \geq 0$;

(e) $H(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Теорема B. *Пусть выполнено условие* (1.1) *и*

$$\mathbf{E} H(X) < \infty, \quad \text{где } H(\cdot) \in \mathscr{H}_0(x_0, \alpha) \text{ при } \alpha > 3. \tag{1.4}$$

Пусть число x удовлетворяет либо условию

$$K_n < x < C\sqrt{n \log n} \quad \text{при } H(K_n) = n, \tag{1.5}$$

либо более общему условию

$$x > K_n \quad \text{и} \quad x^2/\log H(x) < cn. \tag{1.6}$$

Тогда существует такой винеровский процесс $W_{x,n,H,F}(\cdot)$, что

$$\mathbf{P}[\max_{k \leq n} |S_k - W_{x,n,H,F}(k)| > x] \leq Kn/H(ax), \tag{1.7}$$

где постоянные a, c, C и K зависят только от распределения F и функции $H(\cdot)$.

Если же $H(x) = x^\alpha$ при некотором $\alpha > 3$, то правая часть в (1.7) *будет иметь вид $o(n)/x^\alpha$.*

Теорема C. *Если верны условия* (1.1) *и* (1.4), *то найдется такой винеровский процесс $W_{H,F}(\cdot)$, что*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|S_k - W_{H,F}(k)|}{K_n} \leq C_{H,F} < \infty \quad \text{п. н.}, \tag{1.8}$$

где K_n — решение уравнения $H(K_n) = n$.

Если же $H(x) = x^\alpha$ при некотором $\alpha > 3$, то в (1.8) *числа K_n можно заменить на $o(n^{1/\alpha})$.*

1.2. Приведенные результаты являются мощным инструментом при решении различных вероятностных задач. Однако они не свободны от недостатков. Во-первых, во всех этих теоремах все постоянные зависят от общего распределения F величин $\{X_j\}$ неявным образом. Этот факт автоматически делает невозможным применение этих результатов к произвольной схеме серий, в которой общие распределения случайных величин зависят от номера серии. Во-вторых, в теореме B рассматривается наиболее общая задача, однако оценка (1.7) не обладает достаточной точностью, чтобы из нее извлечь утверждение теоремы C. В третьих, функция $H(x) = e^{t_0|x|}$ из (1.2) удовлетворяет условию (1.4) при

$x_0 = \alpha/t_0$, и оценки (1.3) и (1.7) эквивалентны по точности при $H(x) = e^{t_0|x|}$, но в теореме B винеровский процесс $W_{x,n,H,F}(\cdot)$ зависит от числа x, что существенно снижает ценность неравенства (1.7) и не позволяет получить теорему A в качестве следствия теоремы B. Кроме того, ни одна из приведенных выше теорем не вытекает из другой, что доставляет дополнительное неудобство при использовании этих оценок.

Естественным образом возникает задача получить результат, из которого достаточно просто вытекали бы все приведенные выше теоремы из [5] и который не обладал бы перечисленными выше недостатками. Нам представляется, что следующее утверждение содержит оценку, отвечающую этим требованиям.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено условие* (1.1) *и при некотором* $\alpha > 2$ *функция* $H(\cdot)$ *принадлежит классу* $\mathscr{H}(x_0, \alpha)$. *Пусть числа* $\{y_n\}$ *таковы, что справедливы следующие условия:*

$$y_0 \ge x_0, \quad \mathbf{E}[H(X);\ |X| \ge y_0] \le h_\alpha^{2/\alpha}(y_0)/3, \tag{1.9}$$

$$\forall n > 0 \quad y_n \ge y_0 \quad \textit{и} \quad n\mathbf{E}[H(X);\ |X| \ge y_n] \le H(y_n). \tag{1.10}$$

Тогда при любом n *можно так построить винеровский процесс* $W_{n,y_n,H,F}(\cdot)$, *что*

$$\forall x \ge y_n\ \forall b \ge 1 \quad \mathbf{P}[\max_{k\le n} |S_k - W_{n,y_n,H,F}(k)| > C_{abs} bx] \le n\mathbf{P}[|X| > x] + \frac{n}{x^2 H^{bc(\alpha)}(x)} + \frac{n}{x^2 e^{bx/y_0}}, \tag{1.11}$$

где $c(\alpha) := (\alpha - 2)/\alpha$, $C_{abs} < \infty$ *— абсолютная постоянная.*

Легко убедиться, что при $H(x) = e^{t_0|x|}$ теорема 1 эквивалентна по точности теореме A. Для функции $H(\cdot)$ общего вида неравенство (1.11) при $b = 1/c(\alpha)$ эквивалентно по точности неравенству (1.7). Если же $b > 1/c(\alpha)$, то оценка (1.11) качественно точнее, чем (1.7). В частности, используя стандартную процедуру разбиения слагаемых на блоки (см. детали в п. 5.3), из теоремы 1 немедленно получаем следующее усиление теоремы C.

Следствие 1. *Пусть верны условия* (1.1), (1.9) *и* (1.10), *а числа* $r \ge c(\alpha)$ *и* $\{v_j\}$ *удовлетворяют условиям*

$$\forall j \ge 1 \quad v_{j+1} \ge v_j \ge y_j, \quad \sum_{j\ge1} \frac{1}{H^r(v_j)} < \infty, \quad \sum_{j\ge1} \mathbf{P}[|X| > v_j] < \infty.$$

В этом случае найдется такой винеровский процесс $W_{v_\bullet,H,F}(\cdot)$, *что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - W_{v_\bullet,y_\bullet,H,F}(n)|}{rv_n/c(\alpha) + y_0 \log n} \le 4C_{abs} < \infty \quad \textit{п. н.} \tag{1.12}$$

Подчеркнем, что в отличие от (1.8) постоянная в правой части (1.12) абсолютная. Условия теоремы 1 чуть слабее, чем у теоремы B, и (1.11) справедливо в более широкой области, чем (1.5) и (1.6), так как $y_n \le K_n$.

Кроме того, с точностью до абсолютной постоянной неравенство (1.11) явным образом зависит от вводимых в (1.9) и (1.10) характеристик y_0 и y_n используемой функции $H(\cdot)$ и распределения F величины X.

Отметим еще, что из (1.11) вытекает утверждение теоремы 3 работы [7] в случае, когда $d = 1$ и $n\mathbf{E}H(X) \ge 1$.

1.3. Основной целью данной статьи является получение более общих результатов, чем в приведенной теореме 1, причем для сумм разнораспределенных случайных величин. Эта задача будет сформулирована в § 2, и там же, после введения соответствующих обозначений и условий, будут приведены основной результат работы — теорема 2, а также несколько ее следствий.

Доказательству теоремы 2 посвящен § 3, а в § 5 проведен вывод всех следствий, сформулированных в § 2. Справедливость некоторых лемм, используемых в этих доказательствах, установлена в § 4.

Условимся, что в работе символы $\sum$ и sup будут использоваться только вместо $\sum\limits_{j=1}^{\infty}$ и $\sup\limits_{j}$.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за его полезные замечания.

§ 2. Основные результаты

2.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$\forall j \quad \mathbf{E}\xi_j = 0, \quad 0 < \mathbf{D}\xi_j < \infty \quad \text{и} \quad B^2 := \sum \mathbf{D}\xi_j \leq \infty. \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение случайную функцию $S(\cdot)$, полагая

$$S(t_k) := \sum_{j \leq k} \xi_j \quad \text{при } t_k := \sum_{j \leq k} \mathbf{D}\xi_j, \ k = 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

и доопределяя $S(\cdot)$ монотонно на каждом из интервалов $[t_{k-1}, t_k]$. Тем самым $S(\cdot)$ может быть как случайной ступенчатой функцией, так и непрерывной случайной ломаной. Отметим, что в дальнейшем не исключается также важный частный случай, когда $\xi_j \equiv 0$ при $j > n$, т. е. когда случайная функция $S(\cdot)$ построена по конечному числу величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Подчеркнем, что все введенные в этом пункте условия предполагаются выполненными до конца статьи. При этом, не уменьшая общности, считаем, что определенные выше величины $\{\xi_j\}$ заданы на достаточно богатом вероятностном пространстве т. е. что существует не зависящая от $\{\xi_j\}$ случайная величина ρ_0, которая имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

Условимся еще для функций $f(\cdot)$, определенных на достаточно широких промежутках, использовать следующее обозначение:

$$\|f\| \equiv \|f(\cdot)\| := \sup\{|f(t)| : t \in [0, B^2] \cap [0, \infty)\}. \tag{2.3}$$

2.2. Основной целью данной работы является получение в определенном смысле неулучшаемых оценок для точности, с которой процесс $S(\cdot)$ можно аппроксимировать специально подобранным процессом броуновского движения. Частным случаям именно этой задачи были посвящены упоминавшиеся во введении известные работы [1–3].

После работ [4, 5] следующее существенное продвижение в этой задаче было сделано в работах автора [8–11], где результаты из [4, 5], относящиеся к принципу инвариантности, были в той или иной форме обобщены на случай разнораспределенных величин. Отметим, что многие из результатов этих работ автора распространены на многомерный случай У. Айнмалем и А. Ю. Зайцевым (см., например, [7, 12–14]).

В данной работе исследования из [8] будут продолжены в другом направлении. Вместо близких к окончательным оценок в терминах $\sum \mathbf{E}H(\xi_j)$ для классов функций, содержащих функции $H(x) = |x|^\alpha$, постараемся получить достаточно простые оценки в терминах величин $\sum \mathbf{D}\xi_j$ и $\sup \mathbf{E}H(|\xi_j|)/\mathbf{D}\xi_j$ для более широких классов функций $H(\cdot)$, включающих все функции из определенных во введении классов $\mathscr{H}(x_0, \alpha)$.

Нам потребуются некоторые условия. Во-первых, будем предполагать существование такого числа y_0, что

$$\forall j \quad \sigma_j^2(y_0) := \mathbf{E}\big[\xi_j^2;\ |\xi_j| \geq y_0\big] \leq \mathbf{D}\xi_j/3, \quad \text{где } 0 < y_0 < \infty. \tag{2.4}$$

Во-вторых, нам потребуется такая функция $\lambda(\cdot) \geq 0$, что

$$\forall j\ \forall y \geq y_0 \quad E_j(y) := \lambda(y)\mathbf{E}[|\xi_j|^3 e^{\lambda(y)|\xi_j|};\ |\xi_j| \leq y] \leq 3\mathbf{D}\xi_j. \tag{2.5}$$

Подчеркнем, что все результаты работы существенно зависят от того, какой неслучайный уровень срезок y_0 и какая неслучайная функция $\lambda(\cdot)$ будут участвовать в условиях (2.4) и (2.5).

Введем обозначения

$$A(y) := \sum \mathbf{E}[|\xi_j|;\ |\xi_j| \geq y] \leq \sum \frac{\sigma_j^2(y)}{y}, \quad \beta^2(y) := \sum \frac{\sigma_j^4(y)}{\mathbf{D}\xi_j},\ \bar{\lambda}(y) := \sup_{u \geq y} \lambda(u). \tag{2.6}$$

В основе всех результатов данной статьи лежит

Теорема 2. *Пусть распределения случайных величин $\{\xi_j\}$, неслучайные y_o и функция $\lambda(\cdot) \geq 0$ удовлетворяют условиям (2.1), (2.4) и (2.5). В этом случае можно построить винеровский процесс $W(\cdot)$ таким образом, что для всех $x \geq 0$ и $z \geq 0$ будут справедливы неравенства*

$$\forall y \geq y_0 \quad \mathbf{P}[\|S - W\| \geq C_0 x + z + 2A(y_0) + 2y;\ \sup|\xi_j| \leq y] \\ \leq Q(x, y, z) := x^{-2}B^2 e^{-\bar{\lambda}(y)x} + 4e^{-z^2/\beta^2(y_0)}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{P}[\|S - W\| \geq C_0 x + z + 2A(y_0);\ \forall j\ |\xi_j| < y_0] \leq Q(x, y_0, z), \tag{2.8}$$

где $C_0 < \infty$ — абсолютная постоянная.

Более простой вид имеет

Следствие 2. *Пусть распределения случайных величин $\{\xi_j\}$, функция $\lambda(\cdot)$ и числа K_0 и y_0 удовлетворяют условиям (2.1), (2.5) и дополнительно*

$$0 < K_0 < \infty, \quad \sum \sigma_j^2(y_0) \leq K_0 y_0^2, \tag{2.9}$$

$$\forall j \quad y_0\bar{\lambda}(y_0)\sigma_j^2(y_0) \leq \mathbf{D}\xi_j/3, \quad y_0\bar{\lambda}(y_0) \geq 1. \tag{2.10}$$

Тогда для определенного в теореме 2 процесса $W(\cdot)$ при всех $y \geq y_0$ и $x \geq K_0 y_0$ верно неравенство

$$\mathbf{P}[\|S - W\| \geq 2C_0 x + 2y;\ \sup|\xi_j| \leq y] \leq x^{-2}B^2 e^{-\bar{\lambda}(y)x}. \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. Отметим, что при $y_0 = \infty$ утверждение (2.8) теоремы 2 также справедливо (см. замечание 3.1) и оно эквивалентно утверждениям доказанных ранее теорем 1 в [8, 10]. Как показано А. Ю. Зайцевым в [15], выполнение условия (2.5) при $\lambda(\infty) > 0$ эквивалентно классическому условию Бернштейна.

Таким образом, при $\lambda(\infty) > 0$ условие (2.5) является очень ограничительным. Возможность в теореме 2 использовать условие (2.5) при $y < \infty$ делает эту теорему существенно более удобной для применения по сравнению с упомянутыми результатами из [8, 10]. Тем более что правая часть в (2.7) и (2.8), а особенно в (2.11) имеет достаточно простой вид.

Замечание 2.2. Во всех случаях чем больше величины $\lambda(y)$ в (2.5), тем точнее оценки (2.7) и (2.8). Из монотонности функций, стоящих под знаком математического ожидания в левой части условия (2.5), вытекает, что, не уменьшая общности, в (2.5) функцию $\lambda(y)$ всегда можно заменять на $\bar{\lambda}(y)$.

Кроме того, нетрудно заметить, что

$$\forall j \ \forall \lambda > 0 \quad M_j(\lambda) := \lambda \mathbf{E}[|\xi_j|^3 e^{\lambda|\xi_j|};\ \lambda|\xi_j| \le 1] \le e\mathbf{E}\xi_j^2, \tag{2.12}$$

т. е. при $0 \le \lambda(y) \le 1/y$ условие (2.5) выполнено автоматически. Значит, второе ограничение в (2.10) не уменьшает общности. Однако вопрос о том, можно ли использовать в (2.5) числа $\lambda(y)$, много большие, чем $1/y$, существенно зависит от поведения хвостов распределений величин $\{\xi_j\}$.

Отметим, что выбор абсолютной постоянной в правой части условия (2.5) не принципиален. В данной работе мы выбрали эту константу равной 3 из желания, чтобы условие (2.5) автоматически выполнялось при $\lambda(y) = c/y$ в случае простой постоянной $c = 1$.

Замечание 2.3. Подчеркнем, что способ построения винеровского процесса в теореме 2 зависит только от выбора числа y_0, функции $\lambda(\cdot)$ и от вида распределений величин $\{\xi_j\}$, т. е. винеровский процесс один и тот же при всех x, y, z, что выгодно отличает теорему 2 от теоремы В и от утверждений, доказанных в § 6 работы [10]. Отметим, что платой за независимость процесса от y является появление слагаемого $2y$ в левой части неравенства (2.7). В частности, неравенство (2.7) в отличие от (2.8) теряет смысл при $y_0 = \infty$.

2.3. Распространим на случай разнораспределенных слагаемых приведенные во введении теорему 1 и следствие 1.

Следствие 3. *Предположим, что числа ε и x_ε, функция $H(\cdot)$ и распределения случайных величин $\{\xi_j\}$ удовлетворяют условиям*

$$H(\cdot) \in \mathscr{H}(x_0, \alpha), \quad 0 < \varepsilon \le c(\alpha) \equiv (\alpha - 2)/\alpha, \quad 0 < x_0 \le x_\varepsilon, \tag{2.13}$$

$$\forall j \quad G_j(x_\varepsilon) := \mathbf{E}[H(\xi_j);\ |\xi_j| \ge x_\varepsilon] \le x_\varepsilon^{-2} H^{1-\varepsilon}(x_\varepsilon)\mathbf{D}\xi_j/3. \tag{2.14}$$

Пусть выполнены условия (2.1) *и* (2.9), *причем $y_0 \ge x_\varepsilon$. В этом случае для построенного в теореме 2 процесса $W(\cdot)$ при всех $y \ge y_0$, $b \ge 1$ и $by \ge K_0 y_0$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}[\|S - W\| \ge C_{abs} by;\ \sup|\xi_j| \le y] \le \frac{B^2}{b^2 y^2 H^{b\varepsilon}(y)} + \frac{B^2}{b^2 y^2 e^{2by/x_\varepsilon}}. \tag{2.15}$$

Следствие 4. *Предположим, что выполнены условия* (2.1), (2.13) *и* (2.14). *Пусть неубывающая функция $v(\cdot)$ и число r таковы, что справедливы следующие предположения:*

$$\forall n \ge 1 \quad \sum_{j \le n} \sigma_j^2(v(t_n)) \le v^2(t_n), \quad v(0) \ge 0, \quad \sup v(t_j) = \sum \mathbf{D}\xi_j = \infty, \tag{2.16}$$

$$R_1 := \sum \mathbf{P}[|\xi_j| > v(t_j)] < \infty, \quad R_2 := \sum \frac{\mathbf{D}\xi_j}{H^r(v(t_j))} < \infty, \quad r \ge \varepsilon. \tag{2.17}$$

В этом случае найдется такой винеровский процесс $W_{v_\bullet,\varepsilon,H,F_\bullet}(\cdot)$, *что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n - W_{v_\bullet,\varepsilon,H,F_\bullet}(t_n)|}{rv(t_n)/\varepsilon + x_\varepsilon \log t_n} \le 4C_{abs} < \infty \quad \textit{п. н.}, \tag{2.18}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|S(t) - W_{v_\bullet,\varepsilon,H,F_\bullet}(t)|}{rv(t)/\varepsilon + x_\varepsilon \log t_n} \le 4C_{abs} \limsup_{n\to\infty} \frac{v(t_{n+1})}{v(t_n)} \quad \textit{п. н.} \tag{2.19}$$

Отметим, что приведенная во введении теорема 1 является простым частным случаем следствия 3, а следствие 1 немедленно вытекает из более общего следствия 4. Кроме того, следствие 1 несложно извлечь непосредственно из теоремы 1, для чего нужно внести несколько упрощений в доказательство следствия 4, которое приведено в самом конце § 5.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Из определения процесса $S(\cdot)$, приведенного в начале п. 2.1, нетрудно понять, что этот процесс можно представить в виде

$$S(t) = \sum \xi_j h_j(t) \quad \text{при всех } t \in [0, B^2] \cap [0, \infty), \tag{3.1}$$

где в качестве $\{h_j(\cdot)\}$ можно брать любые монотонные функции, для которых верны неравенства

$$\forall j \ge 1 \quad h_j(t') = 0 \le h_j(t'') \le 1 = h_j(t''') \quad \text{при } 0 \le t' \le t_{j-1} \le t'' \le t_j \le t'''.$$

Предположим теперь, что нам заданы случайные величины $\{\zeta_j\}$, у которых средние могут быть ненулевыми, но которые удовлетворяют условиям

$$\forall j \quad \lambda_0 \mathbf{E}[|\zeta_j|^3 e^{\lambda_0|\zeta_j|}] \le 6\mathbf{D}\zeta_j, \quad \mathbf{D}\zeta_j > 0 \quad \text{и} \quad \widetilde{B}^2 := \sum \mathbf{D}\zeta_j < \infty, \tag{3.2}$$

где $\lambda_0 \ge 0$. Введем обозначения:

$$Z(\cdot) := \sum(\zeta_j - \mathbf{E}\zeta_j)h_j(\cdot), \quad \tilde{\beta}_j := \sqrt{\mathbf{D}\xi_j} - \sqrt{\mathbf{D}\zeta_j}, \quad \tilde{\beta}^2 := \sum \tilde{\beta}_j^2. \tag{3.3}$$

Следующее утверждение будет доказано в п. 4.1.

Лемма 3.1. *Пусть независимые случайные величины* $\{\zeta_j\}$ *заданы на достаточно богатом вероятностном пространстве и удовлетворяют условиям* (3.2) *при* $\lambda_0 \ge 0$. *В этом случае существует такой винеровский процесс* $W(\cdot)$, *что справедливо неравенство*

$$\forall x, z \ge 0 \quad \mathbf{P}[\|Z - W\| \ge C_0 x + z] \le x^{-2}\widetilde{B}^2 e^{-\lambda_0 x} + 4e^{-z^2/(2\tilde{\beta}^2)}, \tag{3.4}$$

где $C_0 < \infty$ — *абсолютная постоянная.*

Замечание 3.1. Если условие (2.5) верно при $y = \infty$ и $\lambda_0 := \lambda(\infty) \ge 0$, то из леммы 3.1 при $\{\zeta_j \equiv \xi_j\}$ вытекает, что в теореме 2 неравенство (2.8) справедливо также, когда $y_0 = \infty$, $z = A(\infty) = 0$ и $Q(x, \infty, 0) = x^{-2}B^2 e^{-\lambda(\infty)x}$.

Таким образом, лемму 3.1 можно рассматривать как усиление теоремы 2 при $y_0 = \infty$.

Замечание 3.2. Подчеркнем, что при фиксированных числах λ_0 и $\{t_j\}$ способ построения винеровского процесса в лемме 3.1, как и в теореме 1 в [10], зависит только от вида функций распределения $\{F_j(\cdot)\}$ случайных величин $\{\zeta_j\}$.

В силу основного утверждения заметки А. В. Скорохода [6] это означает, что существует такая функция Ψ, что

$$W(\cdot) = \Psi(Z(\cdot), \rho, \lambda_0, F_\bullet),$$

где случайная величина ρ не зависит от $S(\cdot)$ и равномерно распределена на $[0, 1]$.

3.2. Введем следующие обозначения:

$$U := \max\{y_0, \sup|\xi_j|\}, \quad \nu := \inf\{m : |\xi_m| = U\}, \tag{3.5}$$

причем всегда полагаем, что $\nu = \infty$ в случае, когда $|\xi_j| < U$ при всех j. Из условия (2.4) следует, что

$$\forall j \ \forall u \geq y_0 \quad p_j(u) := \mathbf{P}[|\xi_j| < u] > 0. \tag{3.6}$$

Значит, при $u \geq y_0$ можно ввести в рассмотрение случайные величины со следующими распределениями:

$$\mathbf{P}[\zeta_{j,u,m} < x] = F_{j,u,m}(x) := \begin{cases} \mathbf{P}[\xi_j < x \mid |\xi_j| < u], & \text{если } j < m, \\ \mathbf{P}[\xi_j < x \mid |\xi_j| \leq u], & \text{если } j \geq m. \end{cases} \tag{3.7}$$

Подчеркнем, что в (3.7) и всюду далее в этом параграфе числа y_0, u и индекс m могут принимать любые из следующих значений:

$$u \geq y_0 > 0 \quad \text{и} \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}. \tag{3.8}$$

Предположим, что при каждом возможном значении u и m из (3.8) задана не зависящая от последовательности $\{\xi_j\}$ случайная величина $\xi_{u,m}$, которая имеет функцию распределения $F_{m,u,m}(\cdot)$. Условимся, что далее символ $I(A)$ обозначает индикатор события A, и введем в рассмотрение случайные величины:

$$\delta_j := (\xi_j - \xi_{U,j}) I(j = \nu) \quad \text{и} \quad \tilde{\zeta}_j := \xi_j I(j \neq \nu) + \xi_{U,j} I(j = \nu) = \xi_j - \delta_j \tag{3.9}$$

при $j = 1, 2, \dots$.

Лемма 3.2. *Если верно условие* (3.6), *то при всех возможных значениях u и m из* (3.8) *условное распределение последовательности $\{\tilde{\zeta}_j\}$ при условии, что $U = u$ и $\nu = m$, с вероятностью* 1 *совпадает с распределением последовательности независимых случайных величин $\{\zeta_{j,u,m}\}$, имеющих определенные в* (3.7) *функции распределения $\{F_{j,u,m}(\cdot)\}$.*

Это утверждение немедленно вытекает из определения (3.9).

При любых u и m из (3.8) введем в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} a_{u,m}(\cdot) := \sum \mathbf{E}\zeta_{j,u,m} h_j(\cdot), \quad Z_{u,m}(\cdot) := \sum (\zeta_{j,u,m} - \mathbf{E}\zeta_{j,u,m}) h_j(\cdot), \\ \tilde{a}(\cdot) := a_{U,\nu}(\cdot), \quad \widetilde{Z}(\cdot) := \sum \zeta_j h_j(\cdot) - \tilde{a}(\cdot). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Следующие вспомогательные леммы доказаны в п. 4.2.

Лемма 3.3. *Если выполнены условия* (2.1) *и* (2.4), *то верно предположение* (3.6) *и при всех возможных значениях u и m из* (3.8) *справедливы неравенства*

$$\forall j \quad \sigma^2_{j,u,m} := \mathbf{D}\zeta_{j,u,m} > 0, \quad B^2_{u,m} := \sum \mathbf{D}\zeta_{j,u,m} \leq B^2, \tag{3.11}$$

$$\|a_{u,m}\| \leq 2A(u), \quad \beta^2_{u,m} := \sum \left(\sqrt{\mathbf{D}\xi_j} - \sigma_{j,u,m}\right)^2 \leq \beta^2(u)/2, \tag{3.12}$$

где величины $A(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ определены в (2.6).

Лемма 3.4. *Если верны условия* (2.1), (2.4) *и* (2.5), *то при всех возможных значениях u и m из* (3.8) *имеет место неравенство*

$$\forall j \quad \lambda(u)\mathbf{E}g_{\lambda(u)}(\zeta_{j,u,m}) \le 6\mathbf{D}\zeta_{j,u,m}, \quad \text{где } g_\lambda(x) := |x|^3 e^{\lambda|x|}. \tag{3.13}$$

3.3. Поскольку требуемые неравенства (2.7) и (2.8), очевидно, верны при $B = \infty$, в этом параграфе считаем, что $B < \infty$, и будем рассматривать $S(\cdot)$ как случайный процесс, определенный на $[0, B^2]$, траектории которого с вероятностью 1 принадлежат некоторому сепарабельному подпространству $\mathscr{D}_0$ пространства всех функций, не имеющих разрывов второго рода. Здесь $\mathscr{D}_0$ рассматривается как пространство функций с введенной в (2.3) равномерной нормой и соответствующей борелевской σ-алгеброй. При этом предполагаем, что $\mathscr{D}_0$ содержит все непрерывные функции, так что с вероятностью 1 этому пространству принадлежат траектории любого стандартного винеровского процесса $W(\cdot)$, определенного на $[0, B^2]$.

Используя функцию Ψ из замечания 3.2, построим теперь случайные процессы, полагая

$$\begin{gathered} W_{u,m}(\cdot) := \Psi(Z_{u,m}(\cdot), \rho_{u,m}, \bar\lambda(u), F_{\bullet,u,m}), \\ W(\cdot) := \Psi(\widetilde{Z}(\cdot), \rho_0, \bar\lambda(U), F_{\bullet,U,\nu}), \end{gathered} \tag{3.14}$$

где случайная величина ρ_0 определена в конце п. 2.1, а величины $\rho_{u,m}$ также имеют равномерные распределения на $[0,1]$ и предполагаются не зависящими от величин $\{\zeta_{j,u,m}\}$, искусственно введенных в лемме 3.2.

Лемма 3.5. *Если верны условия* (2.1), (2.4) *и* (2.5), *то при всех возможных значениях u и m из* (3.8) *построенный в* (3.14) *процесс $W_{u,m}(\cdot)$ является стандартным винеровским. Кроме того,*

$$\forall x, z \ge 0 \quad P_{u,m}(x,z) := \mathbf{P}[\|Z_{u,m} - W_{u,m}\| \ge C_0 x + z] \le Q(x,u,z), \tag{3.15}$$

где функция $Q(x,u,z)$ определена в (2.7).

Доказательство. Из утверждения (3.13) леммы 3.3 вытекает, что условие (3.2) леммы 3.1 будет выполнено, если в лемме 3.1 положить $\lambda_0 = \bar\lambda(u)$ и заменить величины $\{\zeta_j\}$ на $\{\zeta_{j,u,m}\}$. Значит, после указанных замен останется справедливым и утверждение (3.4) этой леммы, которое примет вид

$$\forall x, z \ge 0 \quad P_{u,m}(x,z) \le x^{-2} B_{u,m}^2 e^{-\bar\lambda(u)x} + 4e^{-z^2/(2\beta_{u,m}^2)}. \tag{3.16}$$

Поскольку $B_{u,m} \le B$ и $\beta_{u,m} \le \beta(u) \le \beta(y_0)$ ввиду (3.11), (3.12) и (2.6), то (3.16) влечет (3.15). $\square$

Лемма 3.6. *Если верны условия* (2.1), (2.4) *и* (2.5), *то построенный в* (3.14) *процесс $W(\cdot)$ стандартный винеровский, не зависящий от случайных величин U и ν. Кроме того, при всех возможных значениях u и m из* (3.8)

$$\forall x, z \ge 0 \quad \widetilde{P}_{u,m}(x,z) := \mathbf{P}[\|\widetilde{Z} - W\| \ge C_0 x + z;\ U = u, \nu = m] \le Q(x,u,z). \tag{3.17}$$

Доказательство. Из леммы 3.2 и формулы (3.14) с учетом определений (3.10) нетрудно понять, что имеет место следующее важное свойство: при всех возможных значениях u и m из (3.8) условное совместное распределение пары процессов $(\widetilde{Z}(\cdot), W(\cdot))$ в пространстве $\mathscr{D}_0 \times \mathscr{D}_0$ при условии, что $U = u$ и $\nu = m$, с вероятностью 1 совпадает с совместным распределением в этом пространстве пары $(Z_{u,m}(\cdot), W_{u,m}(\cdot))$. В частности, из этого факта немедленно следует совпадение введенных в (3.15) и (3.17) вероятностей:

$$\forall u, m\ \forall x, z \geq 0 \quad \widetilde{P}_{u,m}(x,z) \equiv P_{u,m}(x,z). \tag{3.18}$$

Кроме того, из этого важного свойства вытекает, что при всех возможных значениях u и m из (3.8) условное распределение процесса $W(\cdot)$ в пространстве $\mathscr{D}_0$ при условии, что $U = u$ и $\nu = m$, с вероятностью 1 является распределением $\mathbf{W}$ в этом пространстве стандартного винеровского процесса, т. е. это условное распределение $\mathbf{W}$ одно и то же при всех возможных значениях u и m случайных величин U и ν. Эти свойства условных распределений и означают, что $W(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс, не зависящий от случайных величин U и ν.

Оценка (3.17) вытекает из (3.18) и (3.15). $\square$

3.4. Завершим вывод теоремы 2. Из (3.1), (3.9) и (3.10) имеем

$$S(\cdot) := \widetilde{Z}(\cdot) + \tilde{a}(\cdot) + \delta_\nu h_\nu(\cdot) \quad \text{при } h_\infty(\cdot) \equiv 0 = \delta_\infty. \tag{3.19}$$

Следовательно,

$$\|S - W\| \leq \|\widetilde{Z} - W\| + \|\tilde{a}\| + 2U\|h_\nu\|, \quad \text{где } \|a\| = \|a_{U,\nu}\| \leq 2A(y_0). \tag{3.20}$$

Второе неравенство в (3.20) доказано в (3.12).

Введем упрощенные обозначения

$$Q_{u,m}(x) := \mathbf{P}[\|S - W\| \geq x \mid U = u, \nu = m], \quad x_0 := C_0 x + z + 2A(y_0). \tag{3.21}$$

В этих обозначениях из определений (3.5) нетрудно извлечь, что

$$\mathbf{P}[\|S - W\| > x_0 \mid \forall j\ |\xi_j| < y_0] = Q_{u,\infty}(x_0), \tag{3.22}$$

$$Q_y := \mathbf{P}[\|S - W\| > x_0 + 2y;\ \sup|\xi_j| \leq y] \leq \sup_m \sup_{y_0 \leq u \leq y} Q_{u,m}(x_0 + 2y). \tag{3.23}$$

С другой стороны, из (3.20), (3.21) и (3.17) находим, что

$$\forall x, z \geq 0\ \ Q_{u,m}(x_0 + 2u\|h_m\|) \leq \widetilde{P}_{u,m}(x,z) \leq Q(x,u,z) \tag{3.24}$$

при всех возможных значениях u и m из (3.8). Поскольку $\|h_\infty\| = 0$ ввиду (3.19), из (3.22) и (3.24) получаем (2.8).

Далее, так как $\|h_m\| \leq 1$ при всех m, из (3.23) и (3.24) вытекает, что

$$Q_y \leq \sup_{y_0 \leq u \leq y} Q(x,u,z) = Q(x,y,z), \tag{3.25}$$

ибо $\bar{\lambda}(u) \geq \bar{\lambda}(y)$ при $u \leq y$. Из (3.23) и (3.25) немедленно следует (2.7).

§ 4. Доказательства вспомогательных лемм

4.1. Доказательство леммы 3.1 будет проведено в несколько этапов.

Лемма 4.1. *Если выполнено условие* (3.2), *то при* $\lambda = \lambda_0/24 \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\forall j \quad \mathbf{E}\big[\tilde{\xi}_j^2 e^{\lambda|\tilde{\xi}_j|}\big] \leq 3\mathbf{D}\tilde{\xi}_j, \quad \text{где } \tilde{\xi}_j := \zeta_j - \mathbf{E}\zeta_j. \tag{4.1}$$

Доказательство. Введенная в (3.13) функция $g_\lambda(\cdot)$ выпукла и четна при всех $\lambda \geq 0$. Следовательно,

$$g_{2\lambda}(\tilde{\xi}_j/2) = g_{2\lambda}((\zeta_j - \mathbf{E}\zeta_j)/2) \leq g_{2\lambda}(\zeta_j)/2 + g_{2\lambda}(-\mathbf{E}\zeta_j)/2$$

и $g_{2\lambda}(-\mathbf{E}\zeta_j) = g_{2\lambda}(\mathbf{E}\zeta_j) \leq \mathbf{E}g_{2\lambda}(\zeta_j)$. Значит, $\mathbf{E}g_{2\lambda}(\tilde{\xi}_j/2) \leq \mathbf{E}g_{2\lambda}(\zeta_j)$ и

$$\mathbf{E}g_\lambda(\tilde{\xi}_j) = 8\mathbf{E}g_{2\lambda}(\tilde{\xi}_j/2) \leq 8\mathbf{E}g_{2\lambda}(\zeta_j) \leq 8\mathbf{E}g_{\lambda_0}(\zeta_j) \quad \text{при } 2\lambda \leq \lambda_0. \tag{4.2}$$

Так как $e^{|x|} \leq 1 + |x|e^{|x|}$, из (4.2) имеем

$$\mathbf{E}\big[\tilde{\xi}_j^2 e^{\lambda|\tilde{\xi}_j|}\big] \leq \mathbf{E}\tilde{\xi}_j^2 + \lambda\mathbf{E}g_\lambda(\tilde{\xi}_j) \leq \mathbf{E}\tilde{\xi}_j^2 + 8\lambda\mathbf{E}g_{\lambda_0}(\zeta_j) \leq \mathbf{E}\tilde{\xi}_j^2 + 48\lambda\mathbf{D}\zeta_j/\lambda_0. \tag{4.3}$$

Отметим, что последнее неравенство в (4.3) вытекает из условия (3.2).

Поскольку $\mathbf{E}\tilde{\xi}_j^2 = \mathbf{D}\tilde{\xi}_j = \mathbf{D}\zeta_j$, из (4.3) вытекает справедливость (4.1) при $\lambda = \lambda_0/24$. □

Введем в рассмотрение функцию $T(\cdot)$, полагая $T(0) = 0$ и доопределяя ее последовательно при $k = 1, 2, \dots$ на промежутках $[t_{k-1}, t_k]$ как

$$T(t) - T(t_{k-1}) = d_k^2(t - t_{k-1}), \quad \text{где } d_k^2 := \mathbf{D}\zeta_k/\mathbf{D}\xi_k. \tag{4.4}$$

Так как $\mathbf{D}\xi_j > 0$ и $\mathbf{D}\zeta_j > 0$ при всех j в силу (2.1) и (3.2), функция $T(\cdot)$ непрерывна и строго возрастает, и мы можем определить обратную к ней непрерывную строго возрастающую функцию $T^{-1}(\cdot)$. Положим

$$\widetilde{S}(\cdot) := Z(T^{-1}(\cdot)) \quad \text{и} \quad \tilde{t}_k := T(t_k) \equiv \sum_{j \leq k} \mathbf{D}\zeta_j \quad \text{для всех } k \geq 0. \tag{4.5}$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнены все условия леммы* 3.1. *В этом случае существуют такой винеровский процесс $\widetilde{W}(\cdot)$ и такая абсолютная постоянная $c_0 > 0$, что неравенство*

$$c_0\mathbf{E}[\widetilde{\Delta}^2 e^{c_0\lambda_0\widetilde{\Delta}/24}] \leq \widetilde{B}^2 \equiv \sum \mathbf{D}\zeta_j \tag{4.6}$$

справедливо для величины $\widetilde{\Delta}$, определенной следующим образом:

$$\widetilde{\Delta} := \sup\{|\widetilde{S}(\tilde{t}) - \widetilde{W}(\tilde{t})| : 0 \leq \tilde{t} \leq \widetilde{B}^2\}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Из определений (3.3), (4.5) и (4.7) нетрудно извлечь, что

$$\forall k \geq 0 \quad \widetilde{S}(\tilde{t}_k) = Z(t_k) = \sum_{j \leq k} \tilde{\xi}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{D}\widetilde{S}(\tilde{t}_k) := \mathbf{D}Z(t_k) = \tilde{t}_k = \sum_{j \leq k} \mathbf{D}\zeta_j. \tag{4.8}$$

Сравнивая (2.2) и (4.8), нетрудно заметить, что если в определении процесса $S(\cdot)$ величины $\{\xi_j\}$ заменить на $\{\tilde{\xi}_j\}$, то получим процесс $\widetilde{S}(\cdot)$. Так как еще выполнено (4.1), имеем право воспользоваться утверждением теоремы 1 в [10] при $\{\xi_j := \tilde{\xi}_j\}$ и $\lambda := \lambda_0/24$. Из этой теоремы немедленно получим требуемое утверждение леммы 4.2. □

Лемма 4.3. *Если выполнены все условия леммы* 3.1, *то существует такая абсолютная постоянная $C_0 < \infty$, что*

$$\forall x \geq 0 \quad \mathbf{P}[\|Z - Y\| \geq C_0 x] \leq x^{-2}\widetilde{B}^2 e^{-\lambda_0 x} \quad \text{при } Y(\cdot) := \widetilde{W}(T(\cdot)). \tag{4.9}$$

Доказательство. Поскольку функция $T(\cdot)$ непрерывна и строго возрастает, полагая $\tilde{t} = T(t)$ в (4.7), получаем

$$\widetilde{\Delta} = \sup\{|\widetilde{S}(T(t)) - \widetilde{W}(T(t))| : 0 \le t \le B^2\} = \|Z - Y\|, \qquad (4.10)$$

так как $\widetilde{S}(T(\cdot)) = Z(\cdot)$ и $\widetilde{W}(T(\cdot)) = Y(\cdot)$ в силу определений из (4.5) и (4.9).

Используя неравенство Чебышёва, из оценки (4.6) имеем

$$\mathbf{P}[\widetilde{\Delta} \ge C_0 x] \le \frac{c_0 \mathbf{E}[\widetilde{\Delta}^2 e^{c_0\lambda_0\widetilde{\Delta}/24}]}{c_0(C_0x)^2 e^{c_0\lambda_0(C_0x)/24}} \le \frac{\widetilde{B}^2}{c_0 C_0^2 x^2 e^{\lambda_0 x c_0 C_0/24}} \le \frac{\widetilde{B}^2}{x^2 e^{\lambda_0 x}} \qquad (4.11)$$

при $C_0 := \max\{7, 24/c_0, 1/\sqrt{c_0}\}$. Из (4.10) и (4.11) немедленно вытекает утверждение леммы 4.3. $\square$

Определим непрерывный гауссовский процесс $W(\cdot)$ с независимыми приращениями, последовательно полагая $W(0) = 0$ и

$$W(t) - W(t_{k-1}) = (Y(t) - Y(t_{k-1}))/d_k \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, 2, \dots. \qquad (4.12)$$

Лемма 4.4. *Если выполнены все условия леммы* 3.1, *то* $W(\cdot)$ — *стандартный винеровский процесс. Если дополнительно* $\tilde{\beta} < \infty$, *то*

$$\forall z > 0 \quad \mathbf{P}[\|Y - W\| \ge z] \le 2\mathbf{P}[|W(\tilde{\beta}^2)| \ge z] \le 4e^{-z^2/(2\tilde{\beta}^2)}. \qquad (4.13)$$

Доказательство. Используя последовательно определения (4.12), (4.9), (4.4) и учитывая, что процесс $\widetilde{W}(\cdot)$ винеровский, получаем

$$\mathbf{D}[W(t) - W(t_{k-1})] = \mathbf{D}[Y(t) - Y(t_{k-1})]/d_k^2$$
$$= \mathbf{D}[\widetilde{W}(T(t)) - \widetilde{W}(T(t_{k-1}))]/d_k^2 = (T(t) - T(t_{k-1}))/d_k^2 = t - t_{k-1}$$

при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, процесс $W(\cdot)$ также винеровский. Далее, из (4.12) следует, что для процесса $\Delta(\cdot) := W(\cdot) - Y(\cdot)$ справедливо представление

$$\Delta(t) - \Delta(t_{k-1}) = (d_k - 1)(W(t) - W(t_{k-1})) \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, 2, \dots.$$

Значит, $\Delta(\cdot)$ — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями, причем

$$\mathbf{D}\Delta(B^2) = \sum (d_j - 1)^2 \mathbf{D}[W(t) - W(t_{j-1})] = \sum (d_j - 1)^2 (t - t_{j-1}) = \sum \tilde{\beta}_j^2 = \tilde{\beta}^2.$$

Следовательно, при $\tilde{\beta} < \infty$ из неравенства Леви имеем

$$\mathbf{P}[\|\widetilde{\Delta}\| \ge z] \le 2\mathbf{P}[|\Delta(B^2)| \ge z] = 2\mathbf{P}[|W(\tilde{\beta}^2)| \ge z].$$

Отсюда немедленно получаем (4.13). $\square$

Доказательство леммы 3.1. При $\tilde{\beta} < \infty$ нужно воспользоваться утверждениями лемм 4.3 и 4.4, а также учесть простое неравенство $\|Z - W\| \le \|Z - Y\| + \|Y - W\|$. При $\tilde{\beta} = \infty$ неравенство (3.4) также верно, ибо его правая часть больше 1. $\square$

4.2. В этом пункте докажем леммы 3.3 и 3.4. С целью упростить обозначения фиксируем значения чисел $u \ge y_0$, j и m, допуская, что $m = \infty$. Введем обозначения

$$\xi := \xi_j, \quad I := \begin{cases} I(|\xi| < u), & \text{если } j < m, \\ I(|\xi| \le u), & \text{если } j \ge m, \end{cases} \quad a_k := \mathbf{E}[\xi^k I], \qquad (4.14)$$

где $k = 0, 1, 2$. При выполнении условий (2.1) и (2.4)

$$\mathbf{E}\xi = 0, \quad \sigma^2 := \mathbf{D}\xi > 0, \quad \bar{a}_2 \le \sigma^2/3, \quad \text{где } \bar{a}_k := \mathbf{E}[\xi^k \bar{I}], \quad \bar{I} := 1 - I. \qquad (4.15)$$

Нетрудно понять, что из (4.14) и (4.15) вытекают соотношения

$$a_0 + \bar{a}_0 = 1, \quad a_1 + \bar{a}_1 = \mathbf{E}\xi = 0, \quad a_2 + \bar{a}_2 = \sigma^2 \le a_2 + \sigma^2/3. \qquad (4.16)$$

Лемма 4.5. *Если справедливы условия* (2.1) *и* (2.4), *то*

$$\bar{a}_0 \le 1/3, \quad a_0 \ge 2/3, \quad |a_1| \le \mathbf{E}[|\xi|\overline{I}], \tag{4.17}$$

$$a_1^2/a_0 \le \bar{a}_0\sigma^2/2, \quad 0 \le \delta := a_0\bar{a}_2 - \bar{a}_0 a_2 + a_1^2/a_0 \le a_0\bar{a}_2. \tag{4.18}$$

Доказательство. Дважды используя идею Чебышёва и учитывая (4.14) и (4.16), получаем

$$(2/3)\bar{a}_0 \le \bar{a}_0 a_2 \le \bar{a}_0 u^2 a_0 \le \bar{a}_2 a_0 \le a_0/3 = 1 - \bar{a}_0/3.$$

Отсюда немедленно вытекают первые два неравенства в (4.17) и оценка $\delta \ge 0$.

Так как $a_1 = -\bar{a}_1$ ввиду (4.16), верно и последнее неравенство в (4.17). Кроме того, из этого факта и неравенства Шварца имеем

$$a_1^2 = \left(-\bar{a}_1^2\right) = (\mathbf{E}[\xi\overline{I}\cdot\overline{I}])^2 \le \mathbf{E}[\xi^2\overline{I}^2]\mathbf{E}[\overline{I}^2] = \bar{a}_2\bar{a}_0 \le \bar{a}_0\sigma^2/3, \tag{4.19}$$

где использовано последнее условие в (4.15). Из (4.19) и (4.17) следует первая оценка в (4.18). Поскольку $a_0 a_2 \ge (2/3)^2\sigma^2$ ввиду (4.15) и (4.17), из (4.19) вытекает также неравенство $\delta \le a_0\bar{a}_2$. $\square$

Поскольку $a_0 > 0$, определено распределение величины $\zeta := \zeta_{j,u,m}$, причем в силу (3.7) и (4.14) это распределение совпадает с условным распределением случайной величины ξ при условии, что $I = 1$. Следовательно, для любой неотрицательной функции $g(\cdot)$

$$\mathbf{E}g(\zeta) = \mathbf{E}[g(\xi)I]/a_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta^k = a_k/a_0, \quad k = 0, 1, 2. \tag{4.20}$$

Лемма 4.6. *Если выполнены условия* (2.1) *и* (2.4), *то*

$$2\mathbf{D}\zeta \ge \mathbf{D}\xi/a_0 > 0, \quad \mathbf{D}\zeta \le \mathbf{D}\xi, \tag{4.21}$$

$$|\mathbf{E}\zeta_{j,u,m}| \le 2\mathbf{E}[|\xi_j|;\ |\xi_j| \ge u], \quad 2(\sqrt{\mathbf{D}\xi_j} - \sigma_{j,u,m})^2 \le \sigma_j^4(u)/\mathbf{D}\xi_j. \tag{4.22}$$

Доказательство. Из (4.17) и (4.20) вытекает первая оценка в (4.22), поскольку $|a_1|/a_0 \le 2|a_1|$. Далее, ввиду (4.20)

$$a_0\mathbf{D}\zeta = a_2 - a_1^2/a_0 = \sigma^2 - \bar{a}_2 - a_1^2/a_0 \ge \sigma^2 - \sigma^2/3 - \sigma^2/6 = \sigma^2/2, \tag{4.23}$$

что доказывает первое неравенство в (4.21). Исходя из (4.23) и применяя (4.18), нетрудно получить, что

$$0 \le \sigma^2 - \mathbf{D}\zeta = \delta/a_0 \le \bar{a}_2 \le \sigma_j^2(u) \le \sigma^2/3, \tag{4.24}$$

где использовано (2.4). Отсюда следует второе неравенство в (4.21). Поскольку $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{D}\zeta_{j,u,m} = \sigma_{j,u,m}^2$, из (4.24) имеем

$$(\sigma - \sigma_{j,u,m})^2 = \frac{(\sigma^2 - \mathbf{D}\zeta)^2}{(\sigma + \sigma_{j,u,m})^2} \le \frac{\sigma^4(u)}{\sigma^2(1 + \sqrt{1 - 1/3})^2} \le \frac{\sigma^4(u)}{2\sigma^2}.$$

Значит, получена и вторая оценка в (4.22). $\square$

Доказательство леммы 3.3. При $\zeta = \zeta_{j,u,m}$ из оценок (4.21) вытекают неравенства (3.11). Далее, $\|a_{u,m}\| \le \sum |\mathbf{E}\zeta_{j,u,m}|$ ввиду определения (3.10), поскольку $\|h_j\| \le 1$. Суммируя оценки в (4.22), получим неравенства (3.12), если воспользуемся определениями (2.6) величин $A(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$. $\square$

Доказательство леммы 3.4. Поскольку $I \le I(|\xi| \le u)$ в силу (4.14), из условия (2.5) при $y = u$ следует, что $\lambda(u)\mathbf{E}[g_{\lambda(u)}(\xi)I] \le 3\mathbf{D}\xi$. Отсюда и из (4.21) имеем

$$\lambda(u)\mathbf{E}g_{\lambda(u)}(\zeta) = \lambda(u)\mathbf{E}[g_{\lambda(u)}(\xi)I]/a_0 \le 3\mathbf{D}\xi/a_0 \le 3\cdot 2\mathbf{D}\zeta = 6\mathbf{D}\zeta.$$

Эта цепочка неравенств доказывает (3.13). $\square$

4.3. Рассмотрим некоторые свойства функций из класса $\mathscr{H}(x_0,\alpha)$. Ниже в этом пункте будем всюду предполагать, часто этого не оговаривая, что выполнено условие (2.13). Также будем использовать обозначения $h(x) = x^{-1}\log H(x)$ и $h_\gamma(x) = H(x)/x^\gamma$, введенные в § 1.

Лемма 4.7. *Если $x \ge x_\varepsilon$, то*

$$\forall b \ge 1 \quad H(bx) \ge b^\alpha H(x) \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{H^{1-\varepsilon}(x)} \le \frac{x_\varepsilon^2}{H^{1-\varepsilon}(x_\varepsilon)}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Из определения класса $\mathscr{H}(x_0,\alpha)$ вытекает, что если $0 \le \gamma \le \alpha$, то функция $h_\gamma(x)$ не убывает при $x \ge x_0$. При $\gamma = \alpha$ отсюда следует первое неравенство в (4.25). Но в этом случае функция

$$f_\varepsilon(x) := H(x)^{1-\varepsilon}/x^2 = h_\gamma^{1-\varepsilon}(x) \quad \text{при } 0 \le \gamma = 2/(1-\varepsilon) \le \alpha \tag{4.26}$$

также не убывает, когда $x \ge x_0$. Так как условие в (4.26) выполнено при $0 < \varepsilon \le c(\alpha)$, функция $1/f_\varepsilon(x)$ не возрастает для ε из (2.13). Из этого факта вытекает второе неравенство в (4.25). $\square$

Лемма 4.8. *Если $x \ge x_\varepsilon$, то*

$$\forall j \quad H^\varepsilon(y_0)\sigma_j^2(y_0) \le G_j(x_\varepsilon)x_\varepsilon^2/H^{1-\varepsilon}(x_\varepsilon) \quad \text{при } y_0 \ge x_\varepsilon. \tag{4.27}$$

Доказательство. Из идеи Чебышёва при $I_* := I(|\xi_j| \ge y_0)$ имеем

$$\xi_j^2 I_* \le \xi_j^2 I_* h_2(|\xi_j|)/h_2(y_0) = H(\xi_j)I_* y_0^2/H(y_0).$$

Домножая это соотношение на $H^\varepsilon(y_0)$ и переходя к математическим ожиданиям, находим, что

$$H^\varepsilon(y_0)\sigma_j^2(y_0) \le H^\varepsilon(y_0)G_j(y_0)y_0^2/H(y_0) \le G_j(x_\varepsilon)y_0^2/H^{1-\varepsilon}(y_0).$$

Отсюда и из второго неравенства в (4.25) при $x = y_0 \ge x_\varepsilon$ получаем (4.27). $\square$

Лемма 4.9. *Если $y \ge x \ge x_\varepsilon$ и $0 \le \lambda(y) \le \varepsilon h(y)/2$, то*

$$\lambda(y)g_{\lambda(y)}(x) \le (2e)^{-1}H(x)x_\varepsilon^2/H_{1-\varepsilon}(x_\varepsilon). \tag{4.28}$$

Доказательство. При сделанных предположениях $h(y) \le h(x)$ ввиду условия (c), а потому $2\lambda(y) \le \varepsilon h(x)$. Значит, из определения (3.2) функции $g_\lambda(\cdot)$ вытекает, что

$$2\lambda(y)x^3e^{\lambda(y)x} \le x^2e^{2\lambda(y)x-1} \le x^2e^{\varepsilon h(x)x-1} = x^2e^{\varepsilon\log H(x)-1} = e^{-1}x^2H^\varepsilon(x).$$

Отсюда и из второго неравенства в (4.25) следует (4.28). $\square$

Лемма 4.10. *Если $x \ge x_\varepsilon$ и $0 \le \lambda(y) \le \min\{1/x_\varepsilon, \varepsilon h(y)/2\}$, то*

$$\forall j \quad E_j(y) \le e\mathbf{E}\xi_j^2 + (2e)^{-1}G_j(x_\varepsilon)x_\varepsilon^2/H^{1-\varepsilon}(x_\varepsilon). \tag{4.29}$$

Доказательство. Из утверждения леммы 4.9 немедленно вытекает, что

$$\begin{aligned}&\overline{M}_j(y) := \lambda(y)\mathbf{E}[|\xi_j|^3e^{\lambda(y)|\xi_j|};\ x_\varepsilon \le |\xi_j| \le y]\\ &\le \mathbf{E}\bigl[(2e)^{-1}H(\xi_j)x_\varepsilon^2/H_{1-\varepsilon}(x_\varepsilon);\ x_\varepsilon \le |\xi_j|\bigr] = (2e)^{-1}G_j(x_\varepsilon)x_\varepsilon^2/H^{1-\varepsilon}(x_\varepsilon).\end{aligned} \tag{4.30}$$

При сделанных в лемме предположениях $\lambda(y)x_\varepsilon \le 1$, стало быть, при $\lambda = \lambda(y)$ интервалы, по которым берутся математические ожидания в (2.12) и (4.30), имеют общую точку x_ε. Значит, $E_j(y) \le M_j(\lambda(y)) + \overline{M}_j(y)$, т. е. левая часть в (4.29) не превосходит суммы правых частей в (2.12) и (4.30). $\square$

Лемма 4.11. *Если функция $H(\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{H}(x_0,\alpha)$, то $H(x) \geq 1$ при всех $x \geq x_0$.*

Доказательство. Если $\varepsilon_0 := H(x) < 1$, то $\varepsilon_0 \geq H(x_0) > 0$ ввиду условия (a). Но в этом случае $H(bx) \geq b^\alpha \varepsilon_0 > 1 > H(x) > 0$ при достаточно большом b в силу первого неравенства в (4.25). Значит, $h(bx) > 0 > h(x)$ по свойству логарифмов, что противоречит невозрастанию функции $h(\cdot)$. □

§ 5. Доказательства следствий

5.1. Доказательство следствия 2. Прежде всего заметим, что

$$z^2 \geq x^2 + K_0 y_0 x/3 \quad \text{при } z = x + K_0 y_0/6, \tag{5.1}$$

$$\beta^2(y_0) \leq \sum \frac{\sigma_j^2(y_0)}{3y_0\bar\lambda(y_0)} \leq \frac{K_0 y_0^2}{3y_0\bar\lambda(y_0)} = \frac{K_0 y_0}{3\bar\lambda(y_0)} \leq \frac{K_0 y_0}{3\bar\lambda(y)}. \tag{5.2}$$

Действительно, первая оценка в (5.2) получится, если в определение (2.6) величины $\beta^2(y)$ подставить неравенство из первого условия в (2.10). Вторая оценка в (5.2) вытекает из условия (2.9), а последнее неравенство в (5.2) очевидно, так как $\bar\lambda(y_0) \geq \bar\lambda(y)$.

Отметим еще, что $\beta^2(y_0) \leq \sum \mathbf{D}\xi_j/9 = B^2/9$ ввиду условия (2.4) и определения (2.6). Из этого факта, (5.1) и (5.2) находим, что

$$\frac{z^2}{\beta^2(y_0)} \geq \frac{x^2}{\beta^2(y_0)} + \frac{K_0 x y_0/3}{\beta^2(y_0)} \geq \frac{x^2}{B^2/9} + \frac{K_0 x y_0/3}{K_0 y_0/(3\bar\lambda(y))} = \frac{9x^2}{B^2} + \bar\lambda(y)x.$$

Так как $e^{-x} < 1/x$ при всех $x > 0$, то

$$4e^{-z^2/\beta^2(y)} \leq e^{-9x^2/B^2} e^{-\bar\lambda(y)x} < (4B^2)/(9x^2)e^{-\bar\lambda(y)x}. \tag{5.3}$$

Из определения (2.7) и (5.3) при z, введенном в (5.1), имеем

$$Q(3x/2,u,z) < \frac{B^2}{(3x/2)^2} e^{-\bar\lambda(y)(3x/2)} + \frac{4B^2}{9x^2} e^{-\bar\lambda(y)x} < \frac{B^2}{x^2} e^{-\bar\lambda(y)x}. \tag{5.4}$$

Заметим еще, что $A(y_0) \leq K_0 y_0$ в силу неравенств из (2.6) и (2.9). Поэтому

$$C_0(3x/2) + z + 2A(y_0) \leq 3C_0 x/2 + (x + K_0 y_0/6) + 2K_0 y_0 \leq 2C_0 x \tag{5.5}$$

при $x \geq K_0 y_0$ и $C_0 \geq 7$.

Подставляя оценки (5.4) и (5.5) в (2.7), получаем (2.11). □

5.2. Всюду в этом пункте предполагаются выполненными все условия следствия 3. При этом будем различать следующие три варианта, отличающиеся поведением величины $\varepsilon h(y) = (\varepsilon/y)\log H(y)$:

(A) $\varepsilon h(y)/2 < \lambda(y) = 1/y \leq 1/x_\varepsilon$, $\quad e^{-2\lambda(y)by} < e^{-b\varepsilon \log H(y)} = H^{-b\varepsilon}(y)$;
(B) $1/y \leq \lambda(y) = \varepsilon h(y)/2 \leq 1/x_\varepsilon$, $\quad e^{-2\lambda(y)by} = e^{-b\varepsilon \log H(y)} = H^{-b\varepsilon}(y)$;
(C) $1/y \leq \lambda(y) = 1/x_\varepsilon < \varepsilon h(y)/2$, $\quad e^{-2\lambda(y)by} = e^{-2by/x_\varepsilon}$.

Подчеркнем, что основным здесь является случай (B), но не удается обойтись без рассмотрения двух других вариантов.

Лемма 5.1. *Если выполнены предположения следствия* 3, *то верно условие* (2.5).

Доказательство. В случае (A) неравенство (2.5) очевидным образом вытекает из (2.12). В случаях (B) и (C) можем воспользоваться утверждением леммы 4.10. В итоге, подставляя (2.14) в (4.29), получаем

$$\forall j \quad E_j(y) \leq e\mathbf{E}\xi_j^2 + (2e)^{-1}\mathbf{D}\xi_j/3 < 3\mathbf{D}\xi_j.$$

Значит, неравенство (2.5) справедливо во всех возможных случаях. □

Лемма 5.2. *Если выполнены предположения следствия* 3, *то верно условие* (2.10).

Доказательство. Воспользуемся утверждением леммы 4.8. Подставляя (2.14) в (4.27), при всех j имеем

$$H^{\varepsilon}(y_0)\sigma_j^2(y_0) \le D\xi_j/3, \quad 3y_0\lambda(y_0)\sigma_j^2(y_0)/D\xi_j \le c^* := y_0\lambda(y_0)H^{-\varepsilon}(y_0). \tag{5.6}$$

Чтобы получить (2.10), надо показать, что $c^* \le 1$.

Если при $y = y_0$ имеет место случай (A), то $y_0\lambda(y_0) = 1$ и $H(y_0) \ge 1$ ввиду леммы 4.11. Значит, в этом случае $c^* \le 1$ в силу (5.6).

Если при $y = y_0$ имеем случай (B) или (C), то $2y_0\lambda(y_0) \le \varepsilon \log H(y_0)$ и

$$2c^* \le (\varepsilon \log H(y_0))H^{-\varepsilon}(y_0) = xe^{-x} \le e^{-1} < 2 \quad \text{при } x = \varepsilon \log H(y_0).$$

Таким образом, получаем (2.10) во всех случаях. $\square$

Доказательство следствия 3. Заметим прежде всего, что во всех случаях (A), (B) или (C)

$$e^{-2\lambda(y)by} \le \max\{H^{-b\varepsilon}(y), e^{-2by/x_\varepsilon}\} \le H^{-b\varepsilon}(y) + e^{-2by/x_\varepsilon}. \tag{5.7}$$

Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает, что выполнение условий следствия 3 достаточно для справедливости также всех условий следствия 2. Значит, можно воспользоваться утверждением (2.11) этого следствия. Подставляя (5.7) в (2.11), получаем (2.15). $\square$

5.3. Всюду в этом пункте предполагаем выполненными все условия следствия 4. При фиксированных числах ε и $r \ge \varepsilon$ положим

$$\begin{gathered} V(t) := v(t) + (\varepsilon x_\varepsilon/r)\log t, \quad N_0 := \min\{n : t_n \ge 1,\ v(t_n) \ge x_\varepsilon\}, \\ J_0 := \{n : 0 < n \le N_0\}, \quad T_0 := [0, t_{N_0}], \quad U_0 := V(t_{N_0}). \end{gathered} \tag{5.8}$$

Поскольку определенная выше функция $V(\cdot)$ неубывающая, при $l = 1, 2, \dots$ мы можем ввести обозначения

$$\begin{gathered} U_l := 2^l U_0, \quad N_l := \max\{n : V(t_n) \le U_l\}, \quad \bar{v}_l := V(t_{N_{l-1}+1})/V(t_{N_{l-1}}), \\ J_l := \{n : N_{l-1} < n \le N_l\},\ T_l := [t_{N_{l-1}}, t_{N_l}],\ \bar{v}(t) := \sup\{\bar{v}_l : t_{N_{l-1}} \le t\}. \end{gathered} \tag{5.9}$$

В частности, из (5.8) и (5.9) нетрудно найти, что

$$\forall l \ge 0\ \forall j \le N_l \quad U_l \ge v(t_{N_l}) \ge v(t_j), \quad U_l \ge (\varepsilon x_\varepsilon/r)\log t_j. \tag{5.10}$$

Лемма 5.3. *Если* $n \in J_l \ne \varnothing$ *при некотором* $l > 0$, *то*

$$\overline{U}_l := \sum_{k=0}^{l} U_k < 4V(t_{N_{l-1}+1}) \le 4V(t_n) \quad \text{и} \quad \overline{U}_l < 4V(t)\bar{v}(t)\ \forall t \in T_l. \tag{5.11}$$

Доказательство. Так как $U_k = 2^k U_0$, то $\overline{U}_l < 2^{l+1}U_0 = 4 \cdot 2^{l-1}U_0$. Чтобы из этого факта извлечь (5.11), надо воспользоваться неравенствами

$$V(t_{N_{l-1}+1}) > 2^{l-1}U_0, \quad \overline{U}_l/V(t) < 4V(t_{N_{l-1}+1})/V(t_{N_{l-1}}) = 4\bar{v}_l \le 4\bar{v}(t),$$

которые немедленно вытекают из определений (5.8) и (5.9). $\square$

Лемма 5.4. *Можно построить независимые винеровские процессы* $W_l(\cdot)$, $l = 1, 2, \dots$, *определенные на* $[0, \infty)$ *таким образом, что для величин*

$$\Delta_l := \sup\{|S(t_{N_{l-1}} + t) - S(t_{N_{l-1}}) - W_l(t)| : 0 \le t \le t_{N_l} - t_{N_{l-1}}\} \tag{5.12}$$

будут верны неравенства

$$\mathbf{P}[\Delta_l > C_{abs} U_l r/\varepsilon] \le \sum_{j \in J_l} \mathbf{P}[|\xi_j| > U_l] + \sum_{j \in J_l} \frac{\varepsilon^2 \mathbf{D}\xi_j}{r^2 U_l^2 H^r(U_l)} + \sum_{j \in J_l} \frac{\varepsilon^2 \mathbf{D}\xi_j}{r^2 U_l^2 t_{N_l}^2}. \tag{5.13}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что условия в следствии 4 подобраны таким образом, чтобы из них автоматически при всех n вытекала справедливость при $y_0 \ge v(t_n)$ и $K_0 = 1$ всех предположений следствия 3 для случайных величин $\{\xi_j, 1 \le j \le n\}$. Значит, при всех $l \ge 0$ условия следствия 3 тем более верны для случайных величин

$$\{\xi_{N_{l-1}+j}, 1 \le j \le N_l - N_{l-1} + 1\} \quad \text{при } y = y_0 = U_l \text{ и } b = r/\varepsilon \ge 1. \tag{5.14}$$

Заменяя в следствии 3 случайные величины $\{\xi_j\}$ величинами из (5.14), немедленно получим существование винеровского процесса $W_l(\cdot)$, удовлетворяющего (5.13), если заметим, что в рассматриваемом случае первоначальный процесс $S(t)$ надо заменить процессом $S(t_{N_{l-1}} + t) - S(t_{N_{l-1}})$. Еще надо использовать оценки (5.10), чтобы упростить правую часть в (5.13).

Поскольку множества J_l, $l \ge 0$, среди которых могут быть и пустые, попарно не пересекаются по построению в (5.9), при различных $l \ge 0$ наборы случайных величин из (5.14) взаимно независимы. Значит, винеровские процессы $W_l(\cdot)$, $l = 1, 2, \dots$, также можно выбирать взаимно независимыми. □

Лемма 5.5. *Существует такая случайная величина* $\widetilde{N}$, *что*

$$\mathbf{P}[\widetilde{N} < \infty] = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_l \le C_{abs} U_l r/\varepsilon \quad \textit{при всех } l > \widetilde{N}.$$

Доказательство. Складывая оценки (5.13) и учитывая обозначения R_1 и R_2 из (2.17), находим

$$\sum_{l \ge 1} \mathbf{P}[\Delta_l > C_{abs} U_l r/\varepsilon] \le R_1 + \frac{\varepsilon^2}{r^2 U_0}\Big(R_2 + \sum_{j > N_0} \mathbf{D}\xi_j / t_j^2\Big) < \infty. \tag{5.15}$$

При выводе последнего неравенства в (5.15) использована оценка

$$\sum_{j > N_0} \mathbf{D}\xi_j / t_j^2 = \sum_{j > N_0} (t_j - t_{j-1})/t_j^2 \le \int\limits_{t > t_{N_0}} dt/t^2 = 1/t_{N_0} < \infty.$$

Из (5.15) и закона нуля или единицы вытекает требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 4. Построим винеровский процесс $W(\cdot)$, полагая $W(0) := 0$ и определяя последовательно, когда $l = 1, 2, \dots$,

$$W(t) := W(t_{N_l}) + W_l(t - t_{N_l}) \quad \text{при } 0 \le t \le t_{N_l} - t_{N_{l-1}}. \tag{5.16}$$

Введем нормы разностей

$$\begin{aligned} \Delta(t) &:= \sup\{|S(\tau) - W(\tau)| : 0 \le \tau \le t\}, \\ \Delta_n &:= \max\{|S(t_k) - W(t_k)| : 1 \le k \le n\}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Если $J_l \neq \varnothing$ при некотором $l > 0$, то из определений (5.12), (5.16) и (5.17) с учетом лемм 5.3 и 5.5 вытекают следующие оценки:

$$\forall n \in J_l \quad \Delta_n \leq \Delta(t_{\widetilde{N}}) + C_{abs}(r/\varepsilon)\overline{U}_l < \Delta(t_{\widetilde{N}}) + 4C_{abs}rV(t_n)/\varepsilon,$$

$$\forall t \in T_l \quad \Delta(t) \leq \Delta(t_{\widetilde{N}}) + C_{abs}(r/\varepsilon)\overline{U}_l < \Delta(t_{\widetilde{N}}) + 4C_{abs}rV(t)\bar{v}(t)/\varepsilon.$$

Из этих неравенств следует, что при всех $n \geq \widetilde{N}$ и $t \geq t_{\widetilde{N}}$

$$\Delta_n < \Delta(t_{\widetilde{N}}) + 4C_{abs}rV(t_n)/\varepsilon \quad \text{и} \quad \Delta(t) < \Delta(t_{\widetilde{N}}) + 4C_{abs}rV(t)\bar{v}(t)/\varepsilon.$$

Отсюда немедленно получаем требуемые соотношения (2.18) и (2.19). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 2. С. 177–238.
2. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.
3. *Боровков А. А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 2. С. 217–234.
4. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. I // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1975. Bd 32, Heft 1/2. S. 111–133.
5. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. II // Z. Wahrsch. verw. Geb. 1976. Bd 34, Heft 1. S. 33–58.
6. *Скороход А. В.* Об одном представлении случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 3. С. 645–648.
7. *Зайцев А. Ю.* Оценки точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2007. Т. 351. С. 141–157.
8. *Саханенко А. И.* Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1983. Т. 3. С. 4–49.
9. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1985. Т. 5. С. 27–44.
10. *Саханенко А. И.* О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 19. С. 4–49.
11. *Саханенко А. И.* Оценки в принципе инвариантности в терминах срезанных степенных моментов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1355–1371.
12. *Einmahl U.* Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case // J. Multivariate Anal. 1989. V. 28, N 1. P. 20–68.
13. *Zaitsev A. Yu.* Multidimensional version of a result of Sakhanenko in the invariance principle for vectors with finite exponential moments. I // Теория вероятностей и ее применения. 2000. V. 45, N 4. P. 718–738.
14. *Зайцев А. Ю.* Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2009. Т. 364. С. 148–165.
15. *Зайцев А. Ю.* Оценки расстояния Леви — Прохорова в многомерной центральной предельной теореме для случайных векторов с конечными экспоненциальными моментами // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31, № 2. С. 246–265.

Статья поступила 25 марта 2011 г.

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
aisakh@mail.ru