Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.233.5

СОСТОЯТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. И. Саханенко, Ю. Ю. Линке

Аннотация. Рассматривается модель линейной регрессии в случае, когда независимые переменные измеряются с ошибками, а дисперсии основных наблюдений зависят от основного неизвестного параметра. В случае нормально распределенных повторяющихся регрессоров предложен и изучен новый класс двухшаговых оценок основного неизвестного параметра. Найдены условия состоятельности и асимптотической нормальности оценок первого шага и условия асимптотической нормальности оценок второго шага. Разобран вопрос о том, при каких условиях эти оценки имеют минимальную асимптотическую дисперсию.

Ключевые слова: линейная регрессия, ошибки в независимых переменных, повторяющиеся регрессоры, зависимость дисперсий от параметра, двухшаговые оценки, состоятельная оценка, асимптотически нормальная оценка.

§ 1. Введение

1.1. Пусть при $n = 1, 2, \dots$ даны наблюдения $\{Y_{ni},\ i = 1, \dots, n\}$, представимые в виде

$$Y_{ni} = \beta_n x_{ni} + \varepsilon_{ni} \quad \text{при } \mathbf{E}\varepsilon_{ni} = 0 \text{ и } \mathbf{D}\varepsilon_{ni} < \infty, \tag{1}$$

где β_n — подлежащий оцениванию основной неизвестный параметр, $\{\varepsilon_{ni}\}$ — случайные ошибки с неизвестными распределениями, а $\{x_{ni}\}$ — числа, которые назовем *коэффициентами*.

Если коэффициенты $\{x_{ni}\}$ заданы, то поставленная задача является одной из простейших задач линейной регрессии (см., например, [1, 2]) и при ее решении обычно используются оценки вида

$$\beta^*_{no} = \sum c_{ni} Y_{ni} \Big/ \sum c_{ni} x_{ni} \tag{2}$$

при некоторых специально подобранных константах $\{c_{ni}\}$. (Условимся, что в (2) и далее символ $\sum$ без индексов используется вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$, т. е. только когда суммирование ведется по переменной i от 1 до n.) В частности, полагая $c_{ni} = x_{ni}$ в (2), получим знаменитую оценку наименьших квадратов, которая будет оптимальна в некотором смысле, когда величины $\{\varepsilon_{ni}\}$ имеют одинаковые дисперсии (см. подробности в [1–3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00285).

Если же дисперсии величин $\{\varepsilon_{ni}\}$ являются функциями от β_n и $\{x_{ni}\}$, то задача получения асимптотически нормальных оценок с минимальными асимптотическими дисперсиями оказывается более трудной. Для решения такого рода задач авторы в [4] предложили в качестве оценок параметра β_n использовать статистики вида

$$\beta_{no}^{**} = \sum \gamma_{ni}(\beta_{no}^{*}, x_{ni}) Y_{ni} \Big/ \sum \gamma_{ni}(\beta_{no}^{*}, x_{ni}) x_{ni} \tag{3}$$

при некоторых специально подбираемых функциях $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$, где оценка первого шага β_{no}^{*} задается соотношением (2). В [4] показано, что при естественных дополнительных предположениях оценки из (3) асимптотически нормальны и асимптотически оптимальны в некотором смысле (см. замечание 4.1).

1.2. Однако на практике часто встречаются ситуации, когда точные значения коэффициентов $\{x_{ni}\}$ неизвестны (см., например, [1, 2]). В этих случаях естественно предполагать, что для любого $n = 1, 2, \dots$ даны дополнительные наблюдения $\{X_{ni},\ i = 1, \dots, n\}$, представимые в виде

$$X_{ni} = x_{ni} + \delta_{ni} \quad \text{при } \mathbf{E}\delta_{ni} = 0 \text{ и } \mathbf{D}\delta_{ni} < \infty, \tag{4}$$

причем случайные ошибки $\{\delta_{ni}\}$ также могут иметь неизвестные распределения.

На первый взгляд, в этих ситуациях естественно заменить в формулах (2) и (3) коэффициенты $\{x_{ni}\}$ наблюдениями $\{X_{ni}\}$ и использовать модифицированные таким образом оценки β_{no}^{*} и β_{no}^{**}. Но в новых условиях эти оценки останутся состоятельными только в специальных случаях (см. подробности в [5] и в приводимом ниже в п. 2.4 примере).

1.3. С целью обойти эту принципиальную трудность в работе [6] авторами построен и исследован новый класс двухшаговых явных оценок, специально рассчитанных на наличие случайных ошибок в коэффициентах (самую интересную из изученных в [6] ситуаций напомним в замечании 2.3).

Однако у оценок из [6] есть один недостаток: при их построении предполагается, что распределения величин $\{X_{ni}\}$ известны точно. Но на практике это требование трудно выполнимо, поскольку требует бесконечного числа опытов. Значительно чаще будет выполнено следующее

Предположение 1.1. *При каждом n наблюдаются независимые случайные векторы $(Y_{ni}, X_{nki},\ k = 1, \dots, m_{ni})$, где $i = 1, \dots, n$ и $m_{ni} \geq 2$, причем эти векторы состоят из независимых компонент, первая из которых удовлетворяет условиям* (1). *Кроме того, при всех n и i величины $\{X_{nki},\ k = 1, \dots, m_{ni}\}$ имеют одинаковые нормальные распределения со средним x_{ni}.*

Замечание 1.2. Например, если Y_{ni} — урожай с i-го участка, а x_{ni} — среднее содержание некоторого химического вещества в почве на этом участке, то предположение 1.1 означает, что мы предлагаем взять на участке более одной пробы почвы и измерить в них содержание интересующего нас химического вещества. Здесь наше предложение проще и экономически более оправдано, чем стандартный подход (см., например, [3]), когда предлагается продублировать всю выборку, т. е. рядом засеять несколько участков равной площади и на каждом взять по одной пробе почвы, считая, что истинное содержание x_{ni} этого химического вещества на соседних участках одинаково.

В этом примере величина $\delta_{nki} := X_{nki} - x_{ni}$ характеризует суммарные погрешности, возникающие как при проведении химических анализов, так и из-за того, что почва в разных местах участка может различаться по химическому составу.

Поскольку $m_{ni} \geq 2$, можно ввести следующие обозначения:

$$\overline{X}_{ni} = \frac{1}{m_{ni}} \sum_{k=1}^{m_{ni}} X_{nki}, \quad S_{ni}^2 = \frac{1}{m_{ni}(m_{ni}-1)} \sum_{k=1}^{m_{ni}} (X_{nki} - \overline{X}_{ni})^2. \tag{5}$$

Таким образом, S_{ni}^2 — это несмещенная оценка для $\mathbf{D}\overline{X}_{ni}$.

В настоящей работе, как и в [4–9], оценки для интересующего нас параметра β_n строятся в два этапа. На первом шаге предлагаем выбрать некоторые дифференцируемые функции $\{c_{ni}(\cdot)\}$ и ввести оценку β_{ns}^*, полагая

$$\beta_{ns}^* = \frac{\sum c_{ni}(\overline{X}_{ni}) Y_{ni}}{\sum c_{ni}(\overline{X}_{ni})\overline{X}_{ni} - \sum S_{ni}^2 c_{ni}'(\overline{X}_{ni})}. \tag{6}$$

Затем мы должны подобрать дифференцируемые по второму аргументу функции $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ и определить оценку

$$\beta_{ns}^{**} = \frac{\sum \gamma_{ni}(\beta_{ns}^*, \overline{X}_{ni}) Y_{ni}}{\sum \gamma_{ni}(\beta_{ns}^*, \overline{X}_{ni})\overline{X}_{ni} - \sum S_{ni}^2 \gamma_{ni}'(\beta_{ns}^*, \overline{X}_{ni})}. \tag{7}$$

Подчеркнем, что в (7) и далее в случае функций двух переменных штрихом обозначается дифференцирование по последней переменной.

Одна из задач данной работы — изучить поведение введенных двухшаговых оценок. Основная же цель настоящей статьи заключается, по мнению авторов, в продолжении начатой в [4–9] разработки некоторого метода исследования асимптотически нормальных оценок параметров в задачах регрессии в случаях, когда дисперсии «основных» наблюдений зависят от неизвестных параметров, а коэффициенты (называемые часто «независимыми переменными») измеряются со случайными погрешностями. Наш интерес к простейшей одномерной модели регрессии вызван тем, что для этой модели можно наглядно продемонстрировать идеи нашего подхода, не затеняя их громоздкими матричными обозначениями.

Различные постановки регрессионных задач при наличии ошибок в коэффициентах, а также комментарии и обсуждения проблем, возникающих при оценивании, можно найти, например, в [1–3, 10–15]. Некоторые (близкие по постановке) модели регрессии со случайными ошибками в коэффициентах в случае, когда дисперсии не зависят от неизвестного параметра, указаны в [6]. В [6] также можно найти ссылки на работы, в которых предполагается зависимость дисперсий наблюдений от неизвестного параметра (но при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах) и применяются некоторые двухшаговые процедуры. Более подробную библиографию можно найти в указанных работах, а также в [16–18].

1.4. Детальное исследование свойств классов оценок (6) и (7) будет проведено в § 2, 3. Кроме того, в п. 2.4 проведен сравнительный анализ свойств некоторого естественного аналога классической оценки наименьших квадратов и частного случая предлагаемой в данной работе оценки.

Вопрос выбора функций $\{c_{ni}(\cdot)\}$ и $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ обсудим в § 4. Доказательства всех результатов из § 2–4 отнесены в § 5, 6.

Всюду в работе считаем, что пределы берутся при $n \to \infty$, если только не оговорено противное, а сходимость $\eta_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ означает, что распределение случайной величины η_n слабо сходится к стандартному нормальному закону. Всегда считаем, что $0/0 = 0$ и $c/0 = \infty$ при $c > 0$.

§ 2. Свойства оценок первого шага

2.1. С целью иметь возможность одновременно изучать несколько постановок задач далее в работе будем считать выполненным общее

Предположение 2.1. *При каждом n наблюдаются независимые случайные векторы (X_{ni}, Y_{ni}, Z_{ni}), $i = 1, \dots, n$, которые состоят из независимых компонент, удовлетворяющих условиям* (1) *и* (4). *Изучаются оценки β^*_{nz} и β^{**}_{nz}, которые определяются по формулам* (6) *и* (7), *если в последних величины $\overline{X}_{ni}$ и S_{ni} заменить на X_{ni} и Z_{ni} соответственно:*

$$\beta^*_{nz} = \frac{\sum c_{ni}(X_{ni})Y_{ni}}{\sum c_{ni}(X_{ni})X_{ni} - \sum Z^2_{ni}c'_{ni}(X_{ni})}, \tag{8}$$

$$\beta^{**}_{nz} = \frac{\sum \gamma_{ni}(\beta^*_{nz}, X_{ni})Y_{ni}}{\sum \gamma_{ni}(\beta^*_{nz}, X_{ni})X_{ni} - \sum Z^2_{ni}\gamma'_{ni}(\beta^*_{nz}, X_{ni}).} \tag{9}$$

При всех n и i величины $\{X_{ni}\}$ имеют нормальные распределения и

$$0 \le \mathbf{E}Z^4_{ni} < \infty, \quad \mathbf{E}Z^2_{ni} = \sigma^2_{ni} := \mathbf{D}\delta_{ni} \equiv \mathbf{D}X_{ni}. \tag{10}$$

Замечание 2.2. Пусть при всех n, i задана случайная величина Y_{ni}, удовлетворяющая (1). В этом случае предположение 2.1 выполнено, если при каждых n и i справедливо одно из следующих трех условий:

(A_o) x_{ni} известно, т. е. $\sigma_{ni} = 0$; в этом случае полагаем $X_{ni} = x_{ni}$ и $Z_{ni} = 0$;

(A_σ) задана не зависящая от Y_{ni} случайная величина X_{ni}, которая удовлетворяет (4) и имеет нормальное распределение с известной дисперсией σ^2_{ni}; в этом случае полагаем $Z_{ni} = \sigma_{ni}$;

(A_s) при $m_{ni} \ge 2$ задан не зависящий от Y_{ni} случайный вектор (X_{nki}, $k = 1, \dots, m_{ni}$), компоненты которого независимы и имеют одинаковое нормальное распределение, а величины $X_{ni} = \overline{X}_{ni}$ и $Z^2_{ni} = S^2_{ni}$ определены в (5).

Действительно, справедливость (10) в первых двух случаях очевидна, а в последнем случае этот факт вытекает из леммы Фишера, в силу которой случайная величина $\sigma^{-2}_{ni}(m_{ni}-1)S^2_{ni}$ имеет χ^2-распределение с $m_{ni}-1$ степенями свободы и не зависит от X_{ni}. В частности, в случае (A_s)

$$\mathbf{E}S^4_{ni} = (m_{ni}+1)\sigma^4_{ni}/(m_{ni}-1) = (m_{ni}+1)(\mathbf{D}X_{n1i}/m_{ni})^2/(m_{ni}-1).$$

Замечание 2.3. Из предыдущего замечания вытекает, что предположение 2.1 включает в себя несколько из упоминавшихся во введении случаев. Во-первых, самый интересный случай, когда выполнено предположение 1.1, во-вторых, рассмотренный в работе [6] случай, когда условие (A_σ) верно при всех i, в третьих, изученное в [4] обобщение классического случая, когда все $X_{ni} = x_{ni}$ известны.

2.2. Ключевую роль в дальнейшем (см. подробности в п. 3.3) играют следующие обозначения:

$$\check{v}_{ni} := c_{ni}(X_{ni})X_{ni} - Z^2_{ni}c'_{ni}(X_{ni}), \quad u_{ni}(t) := c_{ni}(X_{ni})Y_{ni} - t\check{v}_{ni}. \tag{11}$$

Для корректного определения оценок β^*_{nz} и β^{**}_{nz} необходимо

Предположение 2.4. *При всех n оценка β^*_{nz} определена по формуле* (8), *все функции $\{c_{ni}(\cdot)\}$ дифференцируемы, $\sum \mathbf{E}c^2_{ni}(X_{ni}) < \infty$ и*

$$\forall\, n \quad \mathbf{A}_{nc} := \sum x_{ni}\mathbf{E}c_{ni}(X_{ni}) \ne 0, \quad \mathbf{d}^2_{nv} := \sum \mathbf{D}\check{v}_{ni}/\mathbf{A}^2_{nc} \to 0. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 2.1 *и* 2.4. *В этом случае оценка* β^*_{nz} *определена с вероятностью, стремящейся к* 1. *Если дополнительно при некоторых неслучайных* $\kappa_n > 0$

$$\mathbf{d}_{nc}/\kappa_n \to 0, \quad \text{где } \mathbf{d}^2_{nc} := \sum \mathbf{D}u_{ni}(\beta_n)/\mathbf{A}^2_{nc}, \tag{13}$$

то

$$(\beta^*_{nz} - \beta_n)/\kappa_n \xrightarrow{p} 0 \tag{14}$$

и, в частности, $\mathbf{P}(|\beta^*_{nz} - \beta_n| > \kappa_n) \to 0$.

Замечание 2.5. Если выполнено предположение 2.4, то оценка β^*_{nz} не определена в единственном случае: когда знаменатель в (8) обращается в нуль. В этом случае также останется неопределенной и оценка β^{**}_{nz}. Кроме того, при выполнении приводимого ниже предположения 3.1 последняя оценка не определена в случае, когда знаменатель в (9) равен нулю.

2.3. Приведем теперь простые достаточные условия для асимптотической нормальности оценки β^*_{nz}.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.4, *а случайные величины* $\{u_{ni}(\beta_n)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга. В этом случае*

$$\big(\beta^*_{nz} - \beta_n\big)/\mathbf{d}_{nc} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1). \tag{15}$$

Если дополнительно $\sum x^2_{ni}(\mathbf{E}c_{ni}(X_{ni}))^2/\mathbf{A}^2_{nc} \to 0$, *то*

$$\frac{\beta^*_{nz} - \beta_n}{d^*_{nz}} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d^*_{nz} := \Big(\sum u^2_{ni}(\beta^*_{nz})\Big)^{1/2} \Big/ \sum \check{v}_{ni}. \tag{16}$$

Поскольку d^*_{nz} является статистикой, сходимость (16) может быть полезной при построении доверительных интервалов и проверке гипотез, как и аналогичная сходимость (27) из § 3.

2.4. В качестве примера проведем сравнительный анализ свойств следующих двух оценок:

$$\beta^*_{no} = \frac{\sum X_{ni}Y_{ni}}{\sum X^2_{ni}} \quad \text{и} \quad \beta^*_{nz} = \frac{\sum X_{ni}Y_{ni}}{\sum X^2_{ni} - \sum Z^2_{ni}}. \tag{17}$$

Здесь β^*_{no} — оценка, получающаяся после подстановки выборки $\{X_{ni}\}$ в обычную оценку наименьших квадратов. Эту оценку иногда называют *обычной* ОНК (см., например, [2]), хотя она и не является в точности оценкой наименьших квадратов (β^*_{no} не минимизирует $\sum \varepsilon^2_{ni}$), а β^*_{nz} — это предлагаемая в настоящей работе модификация оценки β^*_{no}, которая является частным случаем оценки (8) при $\{c_{ni}(x) \equiv x\}$.

В этом пункте всюду считаем, что выполнено

Предположение 2.6. *Верно предположение* 2.1, *при всех* n *числа* $\sigma_{ni} \equiv \sigma_n > 0$ *не зависят от* i, *а распределения величин* $\{\varepsilon_{ni}\}$ *и* Z^2_{ni}/σ^2_n *не зависят ни от* n, *ни от* i. *Кроме того, число* $\beta_n = \beta \neq 0$ *не зависит от* n, *и*

$$\mathbf{D}\varepsilon_{11} > 0, \quad 0 < c \le \inf_{n,i} |x_{ni}| \le \sup_{n,i} |x_{ni}| \le C < \infty, \quad \sigma_n/n^{1/4} \to 0. \tag{18}$$

Следствие 1. *Если верно предположение* 2.6, *то сходимость* (15) *имеет место при*

$$\mathbf{d}^2_{nc} = \frac{\left(\mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta^2\sigma^2_n\right)\left(A_{nx} + n\sigma^2_n\right) + \beta^2 n\mathbf{E}Z^4_{n1}}{A^2_{nx}}, \quad \text{где } A_{nx} := \sum x^2_{ni}. \tag{19}$$

Рассмотрим для сравнения свойства оценки β^*_{no}.

Лемма 2.7. *Пусть выполнено предположение* 2.6. *Тогда*

$$\beta^*_{no} + \beta n\sigma^2_n/A_{no} \xrightarrow{p} \beta \quad \text{при } A_{no} := A_{nx} + n\sigma^2_n. \tag{20}$$

В частности, оценка β^*_{no} состоятельна тогда и только тогда, когда $\sigma_n \to 0$.

Замечание 2.8. Пусть выполнено предположение 2.6, причем дисперсии $\sigma^2_n \equiv \sigma^2 > 0$ также не зависят от n. В этом случае из следствия 1 и леммы 2.7 вытекает, что определенная в (17) оценка β^*_{nz} состоятельна и асимптотически нормальна, в то время как оценка β^*_{no} даже не состоятельна.

Таким образом, при наличии случайных ошибок в коэффициентах даже в самом простом случае рекомендуемые нами оценки имеют очевидное преимущество перед «естественными», на первый взгляд, оценками, которые получаются при подстановке в классические оценки наблюдений $\{X_{ni}\}$ вместо неизвестных коэффициентов $\{x_{ni}\}$.

§ 3. Свойства оценок второго шага

3.1. Сначала введем ряд ограничений.

Предположение 3.1. *При всех n оценка β^{**}_{nz} определена по формуле* (9), $\sum \mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n, X_{ni}) < \infty$, *а все функции $\{\gamma_{ni}(\beta_n, \cdot)\}$ дифференцируемы по второму аргументу. Кроме того, при всех n и i существуют случайные величины $K_{ni} = K_{ni}(\beta_n, X_{ni})$, $L_{ni} = L_{ni}(\beta_n, X_{ni})$ и числа p_n, q_n и $\kappa_n > 0$ такие, что при всех t_1 и t_2 из отрезка $[\beta_n - \kappa_n, \beta_n + \kappa_n]$ с вероятностью 1 выполнены условия*

$$|\gamma_{ni}(t_1, X_{ni}) - \gamma_{ni}(t_2, X_{ni})| \le K_{ni}|t_1 - t_2|^p, \quad 0 < p = p_n \le 1,$$
$$|\gamma'_{ni}(t_1, X_{ni}) - \gamma'_{ni}(t_2, X_{ni})| \le L_{ni}|t_1 - t_2|^q, \quad 0 < q = q_n \le 1.$$

Далее будем использовать обозначения

$$K^2_{noi} = \mathbf{E}K^2_{ni}\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta^2_n\mathbf{E}\big[K^2_{ni}\delta^2_{ni}\big] \quad \text{и} \quad L^2_{noi} = \beta^2_n\mathbf{E}Z^4_{ni}\mathbf{E}L^2_{ni}, \tag{21}$$

$$V_{ni}(t) := \gamma_{ni}(t, X_{ni})X_{ni} - Z^2_{ni}\gamma'_{ni}(t, X_{ni}), \quad \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet] := \sum x_{ni}\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}),$$

$$U_{ni}(t_1, t_2) := \gamma_{ni}(t_1, X_{ni})Y_{ni} - t_2 V_{ni}(t_1), \quad \mathbf{B}^2_n[\gamma_\bullet] := \sum \mathbf{D}U_{ni}(\beta_n, \beta_n). \tag{22}$$

Самым важным условием в работе является

Предположение 3.2. *Верны предположения* 2.1, 2.4 *и* 3.1, *а условие* (13) *выполнено при $\kappa_n > 0$ из предположения* 3.1. *Кроме того, при некоторых неслучайных $A_n \ne 0$ и $B_n > 0$*

$$\sum \frac{\mathbf{D}V_{ni}(\beta_n)}{A^2_n} + \frac{\mathbf{d}^p_{nc}}{|A_n|}\sum \mathbf{E}|K_{ni}X_{ni}| + \frac{\mathbf{d}^q_{nc}}{|A_n|}\sum \sigma^2_{ni}\mathbf{E}L_{ni} \to 0, \tag{23}$$

$$\frac{\mathbf{d}^{2p}_{nc}}{B^2_n}\Big(\sum K^{2/(2-p)}_{noi}\Big)^{2-p} + \frac{\mathbf{d}^{2q}_{nc}}{B^2_n}\Big(\sum L^{2/(2-q)}_{noi}\Big)^{2-q} \to 0. \tag{24}$$

Потребуется также условие

$$\alpha^2_{n1}(A_n) := \sum x^2_{ni}(\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}))^2/A^2_n \to 0. \tag{25}$$

Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 3. *Пусть случайные величины* $\{U_{ni}(\beta_n,\beta_n)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 3.2 *выполнено при* $A_n = \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]$ *и* $B_n = \mathbf{B}_n[\gamma_\bullet]$. *В этом случае оценка* β^{**}_{nz} *определена с вероятностью, стремящейся к* 1, *и имеет место сходимость*

$$(\beta^{**}_{nz} - \beta_n)/\mathbf{d}_n[\gamma_\bullet] \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } \mathbf{d}_n[\gamma_\bullet] := \mathbf{B}_n[\gamma_\bullet]/\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]. \tag{26}$$

Если дополнительно $\alpha^2_{n1}(\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]) \to 0$, *то*

$$\frac{\beta^{**}_{nz} - \beta_n}{d^{**}_{nz}} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d^{**}_{nz} := \Big(\sum U^2_{ni}(\beta^*_{nz},\beta^*_{nz})\Big)^{1/2} \Big/ \sum V_{ni}(\beta^*_{nz}). \tag{27}$$

3.2. Выделим особо два важных частных случая теоремы 3. Положим

$$\rho_{ni} := \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) - \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}), \quad \check{\gamma}_{ni} := \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\delta_{ni} - Z^2_{ni}\gamma'_{ni}(\beta_n, X_{ni}).$$

$$A_{n\gamma} := \sum \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})x_{ni}, \quad B^2_{n\gamma} := \sum \gamma^2_{ni}(\beta_n, x_{ni})\mathbf{D}\varepsilon_{ni}. \tag{28}$$

Ниже в лемме 3.8 будет показано, что

$$\mathbf{E}\check{\gamma}_{ni} = 0, \quad \mathbf{D}\check{\gamma}_{ni} = \sigma^2_{ni}\mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n, X_{ni}) + \mathbf{E}(\gamma'_{ni}(\beta_n, X_{ni}))^2\mathbf{E}Z^4_{ni}. \tag{29}$$

Следствие 2. *Пусть предположение* 3.2 *верно при* $A_n = \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]$ *и* $B^2_n = \beta^2_n \sum \mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}$, *а случайные величины* $\{\check{\gamma}_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, и пусть* $\alpha^2_{n2} := \max_i \mathbf{D}\varepsilon_{ni}/\big(\beta^2_n\mathbf{D}\delta_{ni}\big) \to 0$. *Тогда*

$$(\beta^{**}_{nz} - \beta_n)/\check{d}_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } \check{d}^2_n := \beta^2_n \sum \mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}/\mathbf{A}^2_n[\gamma_\bullet] \sim \mathbf{d}^2_n[\gamma_\bullet].$$

Если дополнительно $\alpha^2_{n1}(\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]) \to 0$, *то выполнено и* (27).

Следствие 3. *Пусть случайные величины* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\varepsilon_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 3.2 *верно при* $A_n = A_{n\gamma}$ *и* $B_n = B_{n\gamma}$. *Пусть, кроме того,*

$$\alpha^2_{n3} := \sum \frac{\mathbf{E}\rho^2_{ni}\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta^2_n\mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}}{B^2_{n\gamma}} \to 0, \quad \alpha_{n4} := \sum \frac{x_{ni}\mathbf{E}\rho_{ni}}{A_{n\gamma}} \to 0. \tag{30}$$

В этом случае

$$(\beta^{**}_{nz} - \beta_n)/d_{n\gamma} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d^2_{n\gamma} := B^2_{n\gamma}/A^2_{n\gamma} \sim \mathbf{d}^2_n[\gamma_\bullet]. \tag{31}$$

Если дополнительно $\alpha^2_{n1}(A_{n\gamma}) \to 0$, *то верно и* (27).

При проверке условий из (30) может быть полезной простая

Лемма 3.3. *Пусть верно предположение* 2.1, *а дифференцируемые по второму аргументу функции* $\{\gamma_{ni}(\beta_n,\cdot)\}$ *таковы, что*

$$C_1 := \sup_{n,i} \frac{\mathbf{E}\rho^2_{ni}\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta^2_n\mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}}{\sigma^2_{ni}} < \infty, \quad C_2 := \sup_n d^2_{n\gamma} \sum \frac{x^2_{ni}(\mathbf{E}\rho_{ni})^2}{\sigma^2_{ni}} < \infty$$

и $c_o := \inf_{n,i} \gamma^2_{ni}(\beta_n, x_{ni}) > 0$. *В этом случае условие*

$$\alpha^2_{n5} := \sum \mathbf{D}\delta_{ni} \Big/ \sum \mathbf{D}\varepsilon_{ni} \to 0 \tag{32}$$

достаточно для справедливости всех утверждений из (30).

Замечание 3.4. В целом ряде задач величины $\{\varepsilon_{ni}\}$ — погрешности, характеризующие некоторое изучаемое явление природы. Величины $\{\delta_{ni}\}$ — средние погрешности, возникающие в результате работы аппаратуры, используемой для измерения коэффициентов.

При такой интерпретации условие (32) означает, что погрешности, добавленные аппаратурой в ходе измерений, существенно меньше погрешностей, возникающих в «основных» измерениях изучаемого явления. Подчеркнем, что $\mathbf{d}_n[\gamma_\bullet] = d^2_{n\gamma}$, если все $\delta_{ni} = 0$, т. е. следствие 3 и лемма 3.3 содержат условия, при которых распределения случайных величин $\{\delta_{ni}\}$ не влияют на асимптотику величин $\mathbf{d}_n[\gamma_\bullet]$.

Обратно, $\mathbf{d}_n[\gamma_\bullet] = \check{d}^2_n$, если все $\varepsilon_{ni} = 0$. Таким образом, следствие 2 содержит условия, при которых предлагаемые нами оценки остаются асимптотически нормальными даже в казалось бы противоестественном случае, когда поведение асимптотической дисперсии определяется исключительно погрешностями, возникающими при работе измерительной аппаратуры. В конце замечания 4.6 имеется пример, показывающий, что такая ситуация действительно возможна в случае использования наших оценок.

3.3. В заключение параграфа приведем несколько полезных свойств величин, которые играют ключевую роль в приведенных выше утверждениях.

Замечание 3.5. В основе изучения оценок β^*_{nz} и β^{**}_{nz} лежат представления

$$\beta^*_{nz} - \beta_n = \sum u_{ni}(\beta_n) \Big/ \sum \check{v}_{ni}, \quad \beta^{**}_{nz} - \beta_n = \sum U_{ni}(\beta^*_{nz}, \beta_n) \Big/ \sum V_{ni}(\beta^*_{nz}), \tag{33}$$

которые немедленно вытекают из определений (8), (9), (11) и (22). Для понимания поведения входящих в это равенство сумм независимых случайных величин полезны следующие утверждения, которые доказаны в п. 5.2.

Лемма 3.6. *Если выполнено предположение* 2.4, *то при всех* n, *больших некоторого* n_1, *для любого* i

$$\mathbf{E}c^2_{ni}(X_{ni}) + \mathbf{E}\check{v}^2_{ni} < \infty. \tag{34}$$

Если же верно предположение 3.2, *то при всех* n, *больших некоторого* n_2, *для любого* i *имеет место* (34) *и справедливы следующие неравенства:*

$$\mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n, X_{ni}) + \mathbf{E}V^2_{ni}(\beta_n) < \infty, \quad K^2_{noi} + L^2_{noi} < \infty. \tag{35}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\check{c}_{ni} := c_{ni}(X_{ni})\delta_{ni} - Z^2_{ni}c'_{ni}(X_{ni}), \quad \sigma^2_{ni+} := \mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta^2_n\mathbf{D}\delta_{ni}, \\ G^2_{ni}[\gamma_{ni}] := \sigma^2_{ni+}\mathbf{D}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) + \beta^2_n\mathbf{E}(\gamma'_{ni}(\beta_n, X_{ni}))^2\mathbf{E}Z^4_{ni}.\end{gathered} \tag{36}$$

Лемма 3.7. *Пусть справедливо предположение* 2.1, *а дифференцируемая функция* $c_{ni}(\cdot)$ *такова, что верно условие* (34). *Тогда*

$$\mathbf{E}\check{c}^2_{ni} = \sigma^2_{ni}\mathbf{E}c^2_{ni}(X_{ni}) + \mathbf{E}(c'_{ni}(X_{ni}))^2\mathbf{E}Z^4_{ni}, \quad \mathbf{E}\check{c}_{ni} = 0, \tag{37}$$

$$\mathbf{E}\check{v}_{ni} = x_{ni}\mathbf{E}c_{ni}(X_{ni}), \quad \mathbf{D}\check{v}_{ni} \le 2x^2_{ni}\mathbf{D}c_{ni}(X_{ni}) + 2\mathbf{D}\check{c}_{ni} < \infty, \tag{38}$$

$$\mathbf{E}u_{ni}(\beta_n) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{D}u_{ni}(\beta_n) = \mathbf{E}c^2_{ni}(X_{ni})\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta^2_n\mathbf{D}\check{c}_{ni} < \infty. \tag{39}$$

Лемма 3.8. *Пусть выполнено предположение* 2.1, *а дифференцируемая по второй переменной функция* $\gamma_{ni}(\beta_n,\cdot)$ *такова, что верно первое условие в* (35). *Тогда имеют место равенства* (29) *и*

$$\mathbf{E}V_{ni}(\beta_n)=x_{ni}\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni}),\quad \mathbf{D}V_{ni}(\beta_n)\le 2x_{ni}^2\mathbf{D}\gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni})+2\mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}<\infty,$$

$$\mathbf{E}U_{ni}(\beta_n,\beta_n)=0,\quad \mathbf{D}U_{ni}(\beta_n,\beta_n)=\mathbf{E}\gamma_{ni}^2(\beta_n,X_{ni})\mathbf{D}\varepsilon_{ni}+\beta_n^2\mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}<\infty.$$

Кроме того,

$$\mathbf{D}U_{ni}(\beta_n,\beta_n)=\sigma_{ni+}^2(\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni}))^2+G_{ni}^2[\gamma_{ni}]<\infty. \tag{40}$$

Замечание 3.9. Всюду в работе β_n — неизвестный параметр. Неизвестными могут быть также числа $\{x_{ni}\}$ и $\{\sigma_{ni}\}$ и распределения величин $\{\varepsilon_{ni}\}$ или по крайней мере некоторые их параметры. Таким образом, большинство условий во всех утверждениях работы — это ограничения на величины, содержащие неизвестные параметры. Понятно, что в случае практического применения этих утверждений мы должны проверять выполнение их условий при всех возможных значениях всех неизвестных параметров (т. е. так же, как это всегда делается в математической статистике (см., например, [19]).

§ 4. О выборе функций, определяющих оценки

4.1. Из основного утверждения (26) теоремы 3 вытекает, что наша оценка β_{ns}^{**} тем точнее, чем меньше ее асимптотическая дисперсия $\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]$. Естественным образом возникает задача минимизации величины $\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]$, которой мы сейчас и займемся. Как следует из лемм 3.6 и 3.8, с учетом определений (22) и (26), не уменьшая общности, можно считать, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{B}_n^2[\gamma_\bullet]=\sum\sigma_{ni+}^2\bar{\gamma}_{ni}^2(\beta_n)+\sum G_{ni}^2[\gamma_{ni}]\quad\text{при } \bar{\gamma}_{ni}(\beta_n):=\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni}),$$

$$\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]=\sum x_{ni}\bar{\gamma}_{ni}(\beta_n)\ne 0\quad\text{и}\quad \mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]=\mathbf{B}_n^2[\gamma_\bullet]/\mathbf{A}_n^2[\gamma_\bullet]<\infty. \tag{41}$$

С целью исключить из рассмотрения вырожденные случаи далее будем предполагать, что

$$\forall\, i\quad \sigma_{ni+}>0\quad\text{и}\quad x_{ni_o}\ne 0 \text{ для некоторого } \ i_o. \tag{42}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (41) *и* (42). *В этом случае*

$$\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]\ge\mathbf{d}_{n,min}^2:=\Big(\sum x_{ni}^2/\sigma_{ni+}^2\Big)^{-1}. \tag{43}$$

При этом равенство в (43) *возможно тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, i\quad \gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni})=\bar{\gamma}_{ni}(\beta_n)=C_nx_{ni}/\sigma_{ni+}^2\quad \textit{п. н.}, \tag{44}$$

где $C_n\ne 0$ *одна и та же при всех* i.

Следствие 4. *Пусть справедливы условия* (41) *и* (42), *а все случайные величины* $\{X_{ni}\}$ *имеют невырожденные нормальные распределения. Тогда для выполнения равенства в* (43) *необходимо и достаточно, чтобы при всех* i *и* x *имели место следующие представления:*

$$\sigma_{ni+}^2=C_{n\sigma}x_{ni}/w_{noi}(\beta_n)>0,\quad \gamma_{ni}(\beta_n,x)=C_{n\gamma}w_{noi}(\beta_n)\ne 0, \tag{45}$$

где функции $\{w_{noi}(\beta_n)\}$ *зависят только от* β_n, *а числа* $C_{n\sigma} \neq 0$ *и* $C_{n\gamma} \neq 0$ *одни и те же при всех* i.

Замечание 4.1. В работе [4] разбирался важный случай, когда

$$\forall\, n, i \quad \mathbf{D}\varepsilon_{ni} = \sigma_n^2 / w_{ni}(\beta_n, x_{ni}) \quad \text{при } w_{ni}(\beta_n, x_{ni}) > 0, \tag{46}$$

где $\{w_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ — известные функции, а истинное значение параметра $\sigma_n^2 > 0$ может быть неизвестным. Если верно (46) и $X_{ni} = x_{ni}$ п. н., то функции

$$\gamma_{ni}(t, X_{ni}) = X_{ni} w_{ni}(t, X_{ni}), \tag{47}$$

очевидно, удовлетворяют условию (44), так как в этом случае $\sigma_{ni+}^2 = \mathbf{D}\varepsilon_{ni}$.

Значит, при выполнении (46) и (47) в случае вырожденных распределений величин $\{X_{ni}\}$ имеется равенство в (43), т. е. теорема 4 содержит в качестве следствия один из результатов работы [4] о минимизации $d_{n\gamma}^2$.

4.2. В этом пункте приведем две леммы, которые содержат тождества, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 4.2. *Если верно* (41), *то* $\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet] = \mathbf{A}_n[\bar\gamma_\bullet]$, $\mathbf{B}_n^2[\bar\gamma_\bullet] = \sum \sigma_{ni+}^2 \bar\gamma_{ni}^2(\beta_n)$,

$$\mathbf{A}_n^2[\gamma_\bullet]\big(\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet] - \mathbf{d}_n^2[\bar\gamma_\bullet]\big) = \sum G_{ni}^2[\gamma_{ni}] \geq \sum \sigma_{ni+}^2 \mathbf{D}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) \geq 0. \tag{48}$$

Подчеркнем, что функции $\{\bar\gamma_{ni}(\beta_n)\}$ не зависят от величин $\{X_{ni}\}$. Таким образом, из (48) вытекает, что функции, минимизирующие асимптотическую дисперсию $\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet] \geq \mathbf{d}_n^2[\bar\gamma_\bullet]$, следует искать среди функций вида $\{\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) = \bar\gamma_{ni}(\beta_n)\}$, которые не зависят от наблюдений!

Лемма 4.3. *Если справедливы условия* (41) *и* (42), *то*

$$\mathbf{A}_n^2[\gamma_\bullet]\big(\mathbf{d}_n^2[\bar\gamma_\bullet] - \mathbf{d}_{n,\min}^2\big) \sum \sigma_{ni+}^2 \big(\bar\gamma_{ni}(\beta_n) - \bar c_{n\gamma} x_{ni} / \sigma_{ni+}^2\big)^2 \geq 0, \tag{49}$$

где $\bar c_{n\gamma} := \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]\mathbf{d}_{n,\min}^2 \neq 0$.

4.3. Сделаем несколько замечаний, касающихся практических рекомендаций по использованию приведенных выше результатов.

Замечание 4.4. Из следствия 4 вытекает, что при невырожденных распределениях величин $\{X_{ni}\}$ оптимальный в изучаемом смысле выбор функций $\{\gamma_{ni}(\beta_n, \cdot)\}$ возможен только в случаях, когда величины σ_{ni+}^2 имеют очень частный вид. В остальных же ситуациях невозможно найти оптимальное решение, как нам представляется, по той причине, что в рассматриваемой нами задаче кроме основного параметра β_n имеется еще слишком много мешающих параметров, включая $\{x_{ni}\}$, $\{\sigma_{ni}\}$ и $\{\mathbf{D}\varepsilon_{ni}\}$.

Отметим, что если минимизировать асимптотическую дисперсию $\mathbf{d}_{nc}^2$ из теоремы 2, то в следствии 4 получится еще более узкий класс оптимальных решений, поскольку множество асимптотических дисперсий $\mathbf{d}_{nc}^2$ является подклассом дисперсий $\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]$, соответствующим функциям $\{\gamma_{ni}(\beta_n, \cdot) = c_{ni}(\cdot)\}$, которые на самом деле не зависят от β_n.

Замечание 4.5. Если оптимальный выбор функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ невозможен, то возникает вопрос о поиске «приближенно» оптимальных в некотором смысле решений. Такую возможность нам открывают следствие 3 и лемма 3.3, в которых приведены условия, гарантирующие справедливость (31). Ведь если (31) выполнено, то вместо оптимизации $\mathbf{d}_n^2[\gamma_\bullet]$ можно рассмотреть более простую задачу о минимизации $d^2_{n\gamma}$, которая уже решалась в [4, 5] (см. замечание 4.1). В частности, если (46) верно, то можно рекомендовать использовать оценки β^{**}_{nz} с функциями $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ из (47).

Еще раз отметим, что для справедливости (31) необходимы достаточно жесткие условия такие, как (30) или (32), о практическом смысле которых сказано в замечании 3.4. Подчеркнем, что, с другой стороны, предлагаемые в данной работе оценки могут обладать достаточно хорошими свойствами и в случаях, когда упомянутые условия не выполнены. Однако в этих случаях мы уже не можем утверждать, что наши оценки с функциями из (47) оптимальны в том смысле, о котором шла речь в теореме 4.

Замечание 4.6. В качестве оценки первого шага можно рекомендовать использовать модифицированную оценку наименьших квадратов β^*_{nz} из (17). В крайнем случае, когда у нас нет надежной информации о виде дисперсий величин $\{\varepsilon_{ni}\}$ и $\{\delta_{ni}\}$, этой оценкой можно и ограничиться (и не вводить β^{**}_{nz}).

Отметим два свойства оценки β^*_{nz} из (17), справедливые при выполнении условий следствия 1. С одной стороны, соотношение (31) означает, что $\mathbf{d}^2_{nc} \sim \mathbf{D}\varepsilon_{11}/A_{nx}$. Но из (19) следует, что для этого необходимо и достаточно условие $\sigma_n \to 0$. С другой стороны, эта оценка асимптотически нормальна, даже когда $\sigma_n \to \infty$, лишь бы $\sigma_n/n^{1/4} \to 0$. Более того, из (19) вытекает, что

$$\mathbf{d}^2_{nc} \sim \beta^2\big(1 + \mathbf{E}Z^4_{n1}/\sigma^4_n\big)/n, \quad \text{если} \;\; \sigma_n \to \infty. \tag{50}$$

Подчеркнем, что правая часть в (50) не зависит от $\mathbf{D}\varepsilon_{11}$. Таким образом, приведен обещанный в замечании 3.4 пример, показывающий возможность ситуации из следствия 2, когда поведение асимптотической дисперсии определяется исключительно погрешностями, возникающими при работе измерительной аппаратуры, но наши оценки тем не менее асимптотически нормальны.

§ 5. Вспомогательные утверждения

5.1. В этом пункте считаем выполненным предположение 2.1 и рассматриваем дифференцируемую функцию $c_{ni}(\cdot)$ при некоторых фиксированных n и i. При этом используются следующие упрощенные обозначения:

$$\begin{gathered}\delta := \delta_{ni}, \quad \sigma := \sigma_{ni}, \quad g(\delta) := c_{ni}(x_{ni} + \delta) \equiv c_{ni}(X_{ni}),\\ \breve{g}(\delta) := \delta g(\delta) - \sigma^2 g'(\delta), \quad h^2(\delta) := \sigma^2 g^2(\delta) + \sigma^4 (g'(\delta))^2.\end{gathered} \tag{51}$$

Лемма 5.1. *Пусть $\mathbf{E}g^2(\delta) < \infty$. Тогда $\mathbf{E}\breve{g}^2(\delta) = \mathbf{E}h^2(\delta)$.*

Доказательство. Если $\sigma = 0$, то $\breve{g}(\delta) = h(\delta) = 0$, что доказывает утверждение леммы. Пусть далее $\sigma > 0$. Обозначим через φ плотность распределения случайной величины δ и заметим, что $\sigma^2\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Нетрудно проверить, что функции из (51) связаны следующим соотношением:

$$\breve{g}^2(x)\varphi(x) + \sigma^2\psi'(x) = h^2(x)\varphi(x), \quad \text{где } \psi(x) := xg^2(x)\varphi(x). \tag{52}$$

Интегрируя (52), немедленно получаем, что при любых $a > 0$

$$\mathbf{E}\{\breve{g}^2(\delta) : |\delta| < a\} + \sigma^2\psi(a) - \sigma^2\psi(-a) = \mathbf{E}\{h^2(\delta) : |\delta| < a\}. \tag{53}$$

С другой стороны, из условий леммы имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{|x|}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^\infty g^2(x)\varphi(x)\,dx = \mathbf{E}g^2(\delta) < \infty.$$

Поскольку $\int\limits_1^\infty dx/|x| = \infty$, найдутся такие числа $\{a_k > 0\}$, что

$$a_k \to \infty \quad \text{и} \quad \psi(a_k) - \psi(-a_k) \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{54}$$

Переходя теперь в тождестве (53) к пределу при $a = a_k$ и $k \to \infty$ и используя (54), находим, что $\mathbf{E}\check{g}^2(\delta) = \mathbf{E}h^2(\delta)$ и в случае, когда $\sigma > 0$. $\square$

Из (36) и (51) вытекает, что

$$\check{c}_{ni} := g(\delta)\delta - Z_{ni}^2 g'(\delta) \equiv \check{g}(\delta) - g'(\delta)\check{Z} \quad \text{при } \check{Z} := Z_{ni}^2 - \sigma^2. \tag{55}$$

Лемма 5.2. *Если* $\mathbf{E}g^2(\delta) < \infty$, *то* $\mathbf{E}Z_{ni}^4\mathbf{E}(g'(\delta))^2 \le \mathbf{E}\check{c}_{ni}^2$ *и справедливо первое равенство в* (37).

Доказательство. Поскольку величины δ и $\check{Z}$ независимы, из (10) и (55) получаем

$$\mathbf{E}\check{Z} = 0, \quad \mathbf{E}\check{Z}^2 = \mathbf{D}\check{Z} = \mathbf{E}Z_{ni}^4 - \sigma^4, \quad \mathbf{E}_\delta \check{c}_{ni}^2 = \check{g}^2(\delta) + (g'(\delta))^2\mathbf{E}\check{Z}^2, \tag{56}$$

где символ $\mathbf{E}_\delta$ означает условное математическое ожидание относительно δ. Так как все функции в последнем равенстве в (56) неотрицательны, беря от них математические ожидания, имеем

$$\mathbf{E}\check{c}_{ni}^2 = \mathbf{E}\check{g}^2(\delta) + \mathbf{E}(g'(\delta))^2\mathbf{E}\check{Z}^2 = \mathbf{E}h^2(\delta) + \mathbf{E}(g'(\delta))^2\big(\mathbf{E}Z_{ni}^4 - \sigma^4\big). \tag{57}$$

Здесь также использовалось утверждение леммы 5.1. Из (51) и (57) следует первое равенство в (37). $\square$

Из (11), (1) и (4) вытекают следующие представления:

$$\check{v}_{ni} = g(\delta)x_{ni} + \check{c}_{ni}, \quad u_{ni}(\beta_n) = g(\delta)\varepsilon_{ni} - \beta_n\check{c}_{ni}. \tag{58}$$

Нам также потребуется элементарное неравенство

$$\mathbf{E}|\xi_1 \pm \xi_2|^2 \le 2\mathbf{E}\xi_1^2 + 2\mathbf{E}\xi_2^2. \tag{59}$$

Лемма 5.3. *Если верно условие* (34), *то* $D_{ni}^2 < \infty$ *и* $E_{ni}^2 < \infty$, *где*

$$D_{ni}^2 := \mathbf{E}[\delta^2 g^2(\delta)] + \mathbf{E}Z_{ni}^4\mathbf{E}(g'(\delta))^2, \quad E_{ni}^2 := \mathbf{E}g^2(\delta)\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta_n^2 D_{ni}^2. \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку $\check{c}_{ni} = \check{v}_{ni} - g(\delta)x_{ni}$ и $g(\delta)\delta = \check{c}_{ni} + Z_{ni}^2 g'(\delta)$ в силу (55) и (58), из (59) последовательно получаем

$$\mathbf{E}\check{c}_{ni}^2 \le 2\mathbf{E}\check{v}_{ni}^2 + 2x_{ni}^2\mathbf{E}g^2(\delta), \quad \mathbf{E}[g^2(\delta)\delta^2] \le 2\mathbf{E}\check{c}_{ni}^2 + 2\mathbf{E}Z_{ni}^4\mathbf{E}(g'(\delta))^2. \tag{61}$$

Далее, из (34) и первого неравенства в (61), следует, что $\mathbf{E}\check{c}_{ni}^2 < \infty$. Отсюда и леммы 5.2 находим, что $\mathbf{E}Z_{ni}^4\mathbf{E}(g'(\delta))^2 < \infty$. Из этих фактов и последнего неравенства в (61) получаем, что $\mathbf{E}[g^2(\delta)\delta^2] < \infty$.

Таким образом, доказана ограниченность всех слагаемых в определении (60) величин D_{ni}^2 и E_{ni}^2. $\square$

Лемма 5.4. *Если* $D_{ni}^2 < \infty$, *то* $\mathbf{E}\check{c}_{ni} = \mathbf{E}\check{g}(\delta) = 0$. *Если дополнительно* $\mathbf{E}g^2(\delta) < \infty$, *то верны все соотношения в* (38).

Доказательство. В лемме 6.14 из [8] показано, что $\mathbf{E}[\delta g(\delta)] = \sigma^2\mathbf{E}g(\delta)$ при более слабом условии, чем $D_{ni}^2 < \infty$, когда $\sigma > 0$. Значит, $\mathbf{E}\check{g}(\delta) = 0$ при $\sigma > 0$. Но $\check{g}(\delta) = 0$, если $\sigma = 0$. Следовательно, всегда $\mathbf{E}\check{g}(\delta) = 0$ при $D_{ni}^2 < \infty$.

Легко видеть, что существуют математические ожидания у всех слагаемых, определяющих $\check{c}_{ni}$ в (55). Поскольку еще $\mathbf{E}\check{Z} = 0$, то $\mathbf{E}\check{c}_{ni} = \mathbf{E}\check{g}(\delta) = 0$.

Наконец, если выполнены все условия леммы, то существуют вторые моменты у всех слагаемых, определяющих величину $\check{v}_{ni}$ из (58). Значит,

$$\mathbf{E}\check{v}_{ni} = x_{ni}\mathbf{E}g(\delta) + \mathbf{E}\check{c}_{ni}, \quad \mathbf{D}\check{v}_{ni} \le 2x_{ni}^2\mathbf{D}g(\delta) + 2\mathbf{D}\check{c}_{ni}. \tag{62}$$

Последнее неравенство в (62) следует из (59) при $\xi_1 = x_{ni}[g(\delta) - \mathbf{E}g(\delta)]$ и $\xi_2 = \check{c}_{ni} - \mathbf{E}\check{c}_{ni}$. Поскольку $\mathbf{E}\check{c}_{ni} = 0$, из (62) вытекает (38). $\square$

Лемма 5.5. *Если* $E_{ni}^2 < \infty$, *то справедливы оба равенства в* (39).

Доказательство. Если $\beta_n = 0$, то $u_{ni}(\beta_n) = c_{ni}(X_{ni})\varepsilon_{ni}$ и равенства (39) легко проверяются непосредственно.

Далее, если $\beta_n \neq 0$, то из условия $E_{ni}^2 < \infty$ вытекает, что $D_{ni}^2 < \infty$. Значит, $\mathbf{E}\check{c}_{ni} = 0$ при $\beta_n \neq 0$ в силу леммы 5.4. Кроме того, в этих условиях из (55) и (58) следует, что у всех слагаемых, определяющих величины $\check{c}_{ni}$ и $u_{ni}(\beta_n)$, есть вторые моменты. Так как $\mathbf{E}\varepsilon_{ni} = 0$, из второго представления в (58) получаем справедливость (39). □

5.2. Доказательство леммы 3.6. Из сходимости $\mathbf{d}_{nv} \to 0$ вытекает, что $\mathbf{d}_{nv} < \infty$ начиная с некоторого n_1. Этот факт и определение в (12) влекут (34). Аналогично для вывода (35) остается заметить, что из сходимостей к нулю в (23) и (24) следует конечность левых частей в (23) и (24) начиная с некоторого n_2. □

Доказательство леммы 3.7. Это утверждение следует из лемм 5.3–5.5. □

Доказательство леммы 3.8. Если в лемме 5.2 функцию $c_{ni}(X_{ni})$ заменить на $\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})$, то $\check{c}_{ni}$, $\check{v}_{ni}$ и $u_{ni}(\beta_n)$ превратятся соответственно в $\check{\gamma}_{ni}$, $V_{ni}(\beta_n)$ и $U_{ni}(\beta_n, \beta_n)$ и получаем все требуемые утверждения. □

Лемма 5.6. *Если выполнено предположение* 3.2 *и* $n \geq n_2$, *то*

$$\mathbf{E}U_{ni}(t, \beta_n) = 0 \quad \textit{при } |t - \beta_n| \leq \kappa_n.$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением леммы 5.5 при

$$c_{ni}(X_{ni}) = \gamma_{ni}(t, X_{ni}) - \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}), \quad u_{ni}(\beta_n) = U_{ni}(t, \beta_n) - U_{ni}(\beta_n, \beta_n). \tag{63}$$

В силу предположения 3.1 в этом случае

$$|c_{ni}(X_{ni})| \leq K_{ni}|t - \beta_n| \leq \kappa_n K_{ni}, \quad |c'_{ni}(X_{ni})| \leq L_{ni}|t - \beta_n| \leq \kappa_n L_{ni}. \tag{64}$$

Из (64) и (21) находим, что

$$E_{ni}^2 \equiv \mathbf{E}c_{ni}^2(X_{ni})\mathbf{D}\varepsilon_{ni} + \beta_n^2\mathbf{E}\big[c_{ni}^2(X_{ni})\delta_{ni}^2\big] + \beta_n^2\mathbf{E}Z_{ni}^4\mathbf{E}(c'_{ni}(X_{ni}))^2 \leq \kappa_n^2\big(K_{noi}^2 + L_{noi}^2\big). \tag{65}$$

В (65) определение (60) величин E_{ni}^2 переписано без использования сокращенных обозначений $g(\delta) = c_{ni}(X_{ni})$ и $\delta = \delta_{ni}$ из (51).

Так как $n \geq n_2$, то $E_{ni}^2 < \infty$ в силу (35) и (65). Теперь из леммы 5.5 находим, что $\mathbf{E}u_{ni}(\beta_n) = 0$ при $u_{ni}(\beta_n)$ из (63). Отсюда следует утверждение леммы, поскольку $\mathbf{E}U_{ni}(\beta_n, \beta_n) = 0$ ввиду леммы 3.8. □

§ 6. Доказательства основных результатов

6.1. В этом параграфе, не уменьшая общности, всюду считаем выполненными предположения 2.1 и 2.4 и рассматриваем $n \geq n_2 \geq n_1$. При $A_{nc} \neq 0$ мы можем ввести следующие обозначения:

$$u_{ni} := u_{ni}(\beta_n)/A_{nc}, \quad v_{ni} := (\check{v}_{ni} - \mathbf{E}\check{v}_{ni})/A_{nc}. \tag{66}$$

В этом случае первое представление из (33) можно переписать в виде

$$\beta_{nz}^* - \beta_n = u_n/(1 + v_n) \quad \text{при } u_n := \sum u_{ni} \text{ и } v_n := \sum v_{ni}. \tag{67}$$

Из определений (66), (67), (12) и (13) вытекает, что

$$\mathbf{E}u_n = \mathbf{E}v_n = 0, \quad \mathbf{D}u_n = \mathbf{d}_{nc}^2, \quad \mathbf{D}v_n = \mathbf{d}_{nv}^2. \tag{68}$$

При выводе (68) учли также первое равенство в (39).

Доказательство теоремы 1. В силу (67) случайная величина β^*_{nz} не определена, лишь когда $1 + v_n = 0$. Но из (12) и (68) с учетом неравенства Чебышёва немедленно следует, что

$$\mathbf{P}[1 + v_n = 0] \le \mathbf{P}[|v_n| > 1/2] \le \mathbf{D}v_n/(1/2)^2 = 4\mathbf{d}^2_{nv} \to 0,$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Далее, из (12), (13) и (68) вытекает, что $\mathbf{D}v_n \to 0$ и $\mathbf{D}(u_n/\kappa_n) \to 0$. Следовательно, $v_n \xrightarrow{p} 0$ и $u_n/\kappa_n \xrightarrow{p} 0$. Но из последних сходимостей и представления (67) получаем справедливость соотношения (14). $\square$

6.2. Приведем теперь частный случай теоремы 2 из [9], которая потребуется для вывода теоремы 3. Положим

$$\tau_{ni} := \varepsilon_{ni} - \beta_n\delta_{ni}, \quad \varphi_{n1i}(t) = \gamma_{ni}(t, X_{ni})\tau_{ni}, \quad \varphi_{n2i}(t) = \beta_n Z^2_{ni}\gamma'_{ni}(t, X_{ni}),$$
$$\psi_{n3i}(t) = \gamma_{ni}(t, X_{ni})X_{ni}, \quad \psi_{n4i}(t) = -Z^2_{ni}\gamma'_{ni}(t, X_{ni}). \tag{69}$$

Из (1), (4) и (22) нетрудно извлечь, что

$$U_{ni}(t, \beta_n) = \varphi_{n1i}(t) + \varphi_{n2i}(t), \quad V_{ni}(t) = \psi_{n3i}(t) + \psi_{n4i}(t). \tag{70}$$

Нам потребуются также следующие обозначения:

$$\overline{\varphi}_{nki} := \sup\{|\phi_{nki}(t_2) - \phi_{nki}(t_1)|/|t_2 - t_1|^{p_k} : \beta_n - \kappa_n \le t_1 < t_2 \le \beta_n + \kappa_n\}$$
$$\text{при} \quad k = 1, 2; \quad p_1 = p; \quad p_2 = q, \tag{71}$$
$$\overline{\psi}_{nri} := \sup\{|\phi_{nri}(t_2) - \phi_{nri}(t_1)|/|t_2 - t_1|^{q_r} : \beta_n - \kappa_n \le t_1 < t_2 \le \beta_n + \kappa_n\}$$
$$\text{при} \quad r = 1, 2; \quad q_1 = p; \quad q_2 = q. \tag{72}$$

Предположение 6.1. *Верны предположения* 2.1, 2.4 *и* 3.1, *а условие* (13) *выполнено при* $\kappa_n > 0$ *из предположения* 3.1. *Кроме того, при некоторых неслучайных* $A_n \ne 0$ *и* $B_n \ne 0$

$$\alpha_{n6} := \sum V_{ni}(\theta_n)/A_n \xrightarrow{p} 1, \quad \sum_{r=1}^{2} \mathbf{d}^{q_r}_{nc} \sum \mathbf{E}\overline{\psi}_{nri}/A_n \to 0, \tag{73}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \mathbf{d}^{2p_k}_{nc} \left(\sum \left(\mathbf{E}\overline{\varphi}^2_{nki}\right)^{\frac{1}{2-p_k}}\right)^{2-p_k} / B^2_n \to 0. \tag{74}$$

Еще потребуется обозначение

$$\Delta_{ni}(t) := \mathbf{E}(U_{ni}(t, \beta_n) - U_{ni}(\beta_n, \beta_n)). \tag{75}$$

Теорема 5. *Если выполнено предположение* 6.1, *то справедливы следующие утверждения:*

1) *случайные величины* β^*_{nz}, β^{**}_{nz} *и* $\sum \Delta_{ni}(\beta^*_{nz})$ *определены с вероятностями, стремящимися к* 1;

2) *условие*

$$\sum U_{ni}(\beta_n, \beta_n)/B_n + \sum \Delta_{ni}(\beta^*_{nz})/B_n \Rightarrow \mathscr{N}(0, 1) \tag{76}$$

необходимо и достаточно для сходимости

$$(\beta^{**}_{nz} - \beta_n)/d_n \Rightarrow \mathscr{N}(0, 1) \quad \text{при } d_n = B_n/A_n; \tag{77}$$

3) *если выполнено* (76) *и*

$$\alpha_{n7}^2 := \sum U_{ni}^2(\beta_n, \beta_n)/B_n^2 \xrightarrow{p} 1, \quad \alpha_{n8}^2 := \sum V_{ni}^2(\beta_n)/A_n^2 \xrightarrow{p} 0, \tag{78}$$

то также имеет место сходимость (27).

Доказательство. Ввиду представлений (33) и (77) имеем право воспользоваться результатами из работы [9] при $l_0 = l = 2$, $m = 2$, $\theta_n = \beta_n$, $\theta_n^* = \beta_{nz}^*$, $\theta_n^{**} = \beta_{nz}^{**}$, $d_n^*(\theta_n^{**}) = d_{nz}^{**}$, $d_{nu} = \mathbf{d}_{nc}$, $d_{nv} = \mathbf{d}_{nv}$. При этом вместо условия (18) из [9] используем более простое условие (см. соотношение (74)) из замечания 2 в [9].

Нетрудно проверить непосредственно, что утверждения 1–3 теоремы 5 вытекают из более общих утверждений, содержащихся соответственно в замечании 1, теореме 2 и следствии 1 работы [9]. $\square$

6.3. Для вывода теоремы 3 нам потребуется ряд вспомогательных лемм.

Лемма 6.2. *Пусть* $A_n = \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]$ *и верно предположение* 3.2. *Тогда* $\alpha_{n6} \xrightarrow{p} 1$. *Если еще справедливо условие* (25), *то* $\alpha_{n8}^2 \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. При указанном A_n из (73) и (22) имеем

$$\mathbf{E}\alpha_{n6} = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_{n9}^2 := \mathbf{D}\alpha_{n6} \sum \mathbf{D}V_{ni}(\beta_n)/A_n^2 \to 0 \tag{79}$$

ввиду (23). Значит, $\mathbf{E}(\alpha_{n6}-1)^2 \to 0$ и $\alpha_{n6} \xrightarrow{p} 1$ благодаря неравенству Чебышёва.

Из определений в (78), (79) и (25) получаем

$$\mathbf{E}\alpha_{n8}^2 = \sum \mathbf{E}V_{ni}^2(\beta_n)/A_n^2 = \alpha_{n9}^2 + \alpha_{n1}^2(A_n). \tag{80}$$

Но если выполнено дополнительное условие (25), то из (79) и (80) находим, что $\mathbf{E}\alpha_{n8}^2 \to 0$, а потому $\alpha_{n8}^2 \xrightarrow{p} 0$. $\square$

Лемма 6.3. *Пусть* $A_n = \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]$. *Тогда из справедливости предположения* 3.2 *вытекает справедливость предположения* 6.1.

Доказательство. Из (69) и (71) с учетом предположения 3.1 имеем

$$\overline{\varphi}_{n1i} \le K_{ni}|\tau_{ni}|, \quad \overline{\varphi}_{n2i} \le |\beta_n| S_{ni}^2 L_{ni}, \quad \overline{\psi}_{n1i} \le K_{ni}|X_{ni}|, \quad \overline{\psi}_{n2i} \le Z_{ni}^2 L_{ni}. \tag{81}$$

Из этих неравенств, определений (21), (69) и предположения 2.1

$$\mathbf{E}\overline{\varphi}_{n1i}^2 \le 2K_{noi}^2, \quad \mathbf{E}\overline{\varphi}_{n2i}^2 \le L_{noi}^2, \quad \mathbf{E}\overline{\psi}_{n2i} \le \sigma_{ni}^2 \mathbf{E}L_{ni}. \tag{82}$$

Подставляя соотношения (81) и (82) в (83) и (84), нетрудно заметить, что левая часть во втором соотношении в (73) не превосходит левой части в (23), а левая часть в (74) не превосходит удвоенной левой части в (24).

Из этих фактов с учетом первого утверждения предыдущей леммы вытекает, что предположение 3.2 влечет справедливость предположения 6.1. $\square$

Лемма 6.4. *Если случайные величины* $\{U_{ni}(\beta_n, \beta_n)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, то*

$$\sum U_{ni}(\beta_n, \beta_n)/B_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{и} \quad \alpha_{n7}^2 \xrightarrow{p} 1 \text{ при } B_n = \mathbf{B}_n[\gamma_\bullet].$$

Доказательство. Поскольку $B_n^2 = \sum \mathbf{D}U_{ni}(\beta_n, \beta_n)$ в силу определения (22), данное утверждение содержит известное свойство условия Линдеберга, доказательство которого можно найти, например, в [20, гл. 8].

Лемма 6.5. *Если верно предположение* 3.2, *то* $\sum \Delta_{ni}(\beta^*_{nz})/B_n \xrightarrow{p} 0$.

Доказательство. Из леммы 5.6 и обозначения (75) вытекает, что при $n \geq n_2$ для всех i имеем $\Delta_{ni}(t) = 0$ при $|t - \beta_n| \leq \kappa_n$. Следовательно,

$$\mathbf{P}[\exists i\ \Delta_{ni}(\beta^*_{nz}) \neq 0] \leq \mathbf{P}[|\beta^*_{nz} - \beta_n| > \kappa_n] \to 0,$$

где еще использовано последнее утверждение теоремы 1. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $A_n = \mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]$, $B_n = \mathbf{B}_n[\gamma_\bullet]$, выполнено предположение 3.2, а случайные величины $\{U_{ni}(\beta_n, \beta_n)\}$ удовлетворяют условию Линдеберга. Из лемм 6.3–6.5 вытекает, что в этом случае справедливы также предположение 6.1 и условие (76). Поскольку при выбранных A_n и B_n соотношения (26) и (77) совпадают, из утверждений 1 и 2 теоремы 5 вытекают соответствующие утверждения теоремы 3.

Если еще верно условие (25), то в силу лемм 6.2 и 6.4, имеют место обе сходимости в (78). Из утверждения 3 теоремы 5 немедленно следует сходимость (27). $\square$

6.4. Докажем остальные результаты из § 3. При выводе следствий 2 и 3 потребуется следующая очевидная

Лемма 6.6. *Если случайные величины* $\{\eta_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга и* $\sum \mathbf{E}(\eta'_{ni} - \eta_{ni})^2 / \sum \mathbf{D}\eta_{ni} \to 0$, *то случайные величины* $\{\eta'_{ni}\}$ *также удовлетворяют условию Линдеберга и* $\sum \mathbf{D}\eta'_{ni} \sim \sum \mathbf{D}\eta_{ni}$.

Доказательство следствия 2. Воспользуемся равенством

$$U_{ni}(\beta_n, \beta_n) + \beta_n \check{\gamma}_{ni} = \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni})\varepsilon_{ni} = \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\varepsilon_{ni} + \rho_{ni}, \tag{83}$$

которое следует из (28), (69) и (70). Из леммы 6.6 при $\eta_{ni} = -\beta_n \check{\gamma}_{ni}$ и $\eta'_{ni} = U_{ni}(\beta_n, \beta_n)$ вытекает, что случайные величины $\{U_{ni}(\beta_n, \beta_n)\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, поскольку в силу (83)

$$\frac{\sum \mathbf{E}(\eta'_{ni} - \eta_{ni})^2}{\sum \mathbf{D}\eta_{ni}} = \frac{\sum \mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n, X_{ni})\mathbf{D}\varepsilon_{ni}}{\beta^2_n \sum \mathbf{D}\check{\gamma}_{ni}} \leq \alpha^2_{n2} \to 0. \tag{84}$$

При выводе (84) учли, что $\mathbf{D}\check{\gamma}_{ni} \geq \mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n, X_{ni})\mathbf{D}\delta_{ni}$ в силу (29). Таким образом, утверждение следствия вытекает из теоремы 3. $\square$

Доказательство следствия 3. Из (83) при $\eta_{ni} = \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\varepsilon_{ni}$ и $\eta'_{ni} = U_{ni}(\beta_n, \beta_n)$ имеем

$$B^2_{n\gamma} = \sum \mathbf{D}\eta_{ni}, \quad \sum \mathbf{E}(\eta'_{ni} - \eta_{ni})^2 / B^2_{n\gamma} = \alpha^2_{n3}. \tag{85}$$

Поскольку случайные величины $\{\eta_{ni}\}$ удовлетворяют условию Линдеберга, из (30) и (85) следует, что можно воспользоваться утверждением леммы 6.6. Из этой леммы, теоремы 3 и (30) вытекает (31), так как

$$\frac{\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]}{A_{n\gamma}} = 1 + \alpha_{n4} \to 1 \quad \text{и} \quad \frac{d^2_{n\gamma}}{\mathbf{d}^2_n[\gamma_\bullet]} = (1 + \alpha_{n4})^2 \frac{\sum \mathbf{D}\eta_{ni}}{\sum \mathbf{D}\eta'_{ni}} \to 1. \tag{86}$$

Поскольку $\alpha^2_{n1}(\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]) \sim \alpha^2_{n1}(A_{n\gamma})$ в силу первого соотношения в (86), сходимость (27) также вытекает из теоремы 3. $\square$

Доказательство леммы 3.3. Из неравенства Коши — Буняковского и определения (31) имеем

$$\alpha^2_{n4} \leq \frac{\left(\sum x^2_{ni}(\mathbf{E}\rho_{ni})^2/\sigma^2_{ni}\right)\left(\sum \sigma^2_{ni}\right)}{A^2_{n\gamma}} = d^2_{n\gamma}\Big(\sum x^2_{ni}(\mathbf{E}\rho_{ni})^2/\sigma^2_{ni}\Big)\frac{\sum \sigma^2_{ni}}{B^2_{n\gamma}}.$$

Таким образом, $\alpha_{n4}^2 \le C_2\alpha_{n5}^2/c_o$, поскольку $B_{n\gamma}^2 \ge c_o\sum\sigma_{ni}^2$. Из последнего факта и (30) получаем также, что $\alpha_{n3}^2 \le C_1\alpha_{n5}^2/c_o$. $\square$

6.5. Докажем теперь оставшиеся утверждения из § 2.

Доказательство теоремы 2. Это утверждение — частный случай теоремы 3 в случае, когда функции $\gamma_{ni}(t, X_{ni}) = c_{ni}(X_{ni})$ не зависят от своего первого аргумента, а $\beta_{nz}^{**} = \beta_{nz}^*$. В этом случае предположение 3.1 выполняется автоматически при $K_{ni} = L_{ni} = 0$ и $\kappa_n = \infty$. $\square$

При выводе следствия 1 потребуется

Лемма 6.7. *Пусть при каждом n величины $\{\eta_{ni}, i = 1, \dots, n\}$ независимы и*

$$\forall\, n, i \quad \mathbf{E}\eta_{ni} = 0, \quad \eta_{ni}^2 \le \mathbf{D}\eta_{ni}\xi_{ni}^2, \quad \sum\mathbf{D}\eta_{ni} = 1, \quad \max_i \mathbf{D}\eta_{ni} \to 0,$$

причем $\mathbf{E}\xi_{11}^2 < \infty$, а распределения величин $\{\xi_{ni}\}$ не зависят от n и i. Тогда последовательность величин $\{\eta_{ni}\}$ удовлетворяет условию Линдеберга.

Доказательство вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\sum\mathbf{E}\left\{\eta_{ni}^2;\ \eta_{ni}^2 > \varepsilon\right\} \le \sum\mathbf{D}\eta_{ni}\mathbf{E}\left\{\xi_{ni};\ \mathbf{D}\eta_{ni}\xi_{ni}^2 > \varepsilon\right\}$$
$$\le \sum\mathbf{D}\eta_{ni}\mathbf{E}\big\{\xi_{ni}^2;\ (\max_i \mathbf{D}\eta_{ni})\xi_{ni}^2 > \varepsilon\big\} = \mathbf{E}\big\{\xi_{11}^2;\ \xi_{11}^2 > \varepsilon/(\max_i \mathbf{D}\eta_{ni})\big\} \to 0.$$

Доказательство следствия 1. Это утверждение извлечем из теоремы 2 при $c_{ni}(X_{ni}) = X_{ni}$ и $\mathbf{E}X_{ni}^2 = x_{ni}^2 + \sigma_n^2$. В условиях следствия 1 величина $\alpha := \mathbf{E}Z_{n1}^4/\sigma_n^4$ конечна, не зависит от n, i и $\alpha \ge 1$. Из этих фактов, (18) и лемм 3.6, 3.7 следует, что справедливы соотношения

$$A_{nc} = A_{nx} \ge nc^2, \quad \mathbf{D}\check{v}_{ni} \le 2x_{ni}^2\sigma_n^2 + 2\sigma_n^2\big(x_{ni}^2 + \sigma_n^2\big) + 2\alpha\sigma_n^4 \le 4\sigma_n^2\big(C^2 + \alpha\sigma_n^2\big),$$

$$u_{ni}(\beta) = (x_{ni} + \delta_{ni})\varepsilon_{ni} - \beta x_{ni}\delta_{ni} - \beta\delta_{ni}^2 + \beta Z_{ni}^2, \quad \mathbf{E}u_{ni}(\beta) = 0, \tag{87}$$
$$\mathbf{D}u_{ni}(\beta) = \big(\mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta^2\sigma_n^2\big)\big(x_{ni}^2 + \sigma_n^2\big) + \beta^2\sigma_n^4\alpha > 0.$$

Значит, $\sum\mathbf{D}\check{v}_{ni}/A_{nc}^2 \le 4\sigma_n^2\big(C^2 + \alpha\sigma_n^2\big)/(c^2 n) \to 0$ ввиду последнего условия в (18). Таким образом, выполнено условие (12).

Из предположения 2.6 вытекает, что справедливы следующие представления: $\varepsilon_{ni} = \sqrt{\mathbf{D}\varepsilon_{11}}\xi_{n\varepsilon i}$, $\delta_{ni} = \sigma_n\xi_{n\delta i}$, $Z_{ni}^2 = \sigma_n^2\xi_{nsi}^2$, где векторы $\{\xi_{n\varepsilon i}, \xi_{n\delta i}, \xi_{nsi}^2\}$ одинаково распределены и состоят из независимых компонент, имеющих конечные вторые моменты. Из этих фактов и (87) имеем

$$u_{ni}(\beta) = x_{ni}\sqrt{\mathbf{D}\varepsilon_{11}}\xi_{n\varepsilon i} + \sigma_n\sqrt{\mathbf{D}\varepsilon_{11}}\xi_{n\varepsilon i}\xi_{n\delta i} - \beta x_{ni}\sigma_n\xi_{n\delta i} - \beta\sigma_n^2\xi_{n\delta i}^2 + \beta\sigma_n^2\xi_{nsi}^2,$$

$$u_{ni}^2(\beta)/\mathbf{D}u_{ni}(\beta) \le \xi_{ni}^2 := \xi_{n\varepsilon i}^2 + \xi_{n\delta i}^2\xi_{n\varepsilon i}^2 + \xi_{n\delta i}^2 + \xi_{n\delta i}^4 + \xi_{nsi}^4, \quad \mathbf{E}\xi_{11}^2 < \infty,$$

причем случайные величины $\{\xi_{ni}\}$ одинаково распределены. Поэтому условие Линдеберга для последовательности $\{u_{ni}(\beta)\}$ следует из леммы 6.7 при $\eta_{ni} = u_{ni}(\beta)/\sqrt{\sum\mathbf{D}u_{ni}(\beta)}$, поскольку из (18) и (87) вытекает, что

$$\max_i \mathbf{D}\eta_{ni} \equiv \frac{\max_i \mathbf{D}u_{ni}(\beta)}{\sum\mathbf{D}u_{ni}(\beta)} \le \frac{\big(\mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta^2\sigma_n^2\big)\big(C^2 + \sigma_n^2\big) + \beta^2\sigma_n^4\alpha}{\big(\mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta_n\sigma_n^2\big)\big(nc^2 + n\sigma_n^2\big) + \beta^2\sigma_n^4 n\alpha} \to 0.$$

Все остальные условия теоремы 2 выполнены очевидным образом. $\square$

Доказательство леммы 2.7. Используя (17), имеем

$$\beta^*_{no} - \alpha_n\beta = \frac{\sum\bigl(X_{ni}Y_{ni} - \alpha_n\beta X_{ni}^2\bigr)}{\sum X_{ni}^2} = \frac{\sum(u_{noi} - \alpha_n\beta v_{noi})}{A_{no} + \sum v_{noi}}, \tag{88}$$

где $\alpha_n := \sum \mathbf{E}[X_{ni}Y_{ni}]/\sum \mathbf{E}X_{ni}^2 = A_{nx}/A_{no}$,

$$v_{noi} := X_{ni}^2 - \mathbf{E}X_{ni}^2 = 2x_{ni}\delta_{ni} + \delta_{ni}^2 - \sigma_n^2, \quad \mathbf{D}v_{noi} \le 4\sigma_n^4\bigl(x_{ni}^2 + \sigma_n^2\bigr),$$

$$u_{noi} := X_{ni}Y_{ni} - \mathbf{E}[X_{ni}Y_{ni}], \quad \mathbf{D}u_{noi} \le \bigl(\mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta^2 x_{ni}^2\bigr)\bigl(x_{ni}^2 + \sigma_n^2\bigr).$$

Значит,

$$\sum \mathbf{D}u_{noi} + \sum \mathbf{D}u_{noi} \le \bigl(4\sigma_n^2 + \mathbf{D}\varepsilon_{11} + \beta C^2\bigr)A_{no} = o\bigl(A_{no}^2\bigr).$$

Таким образом, $\sum u_{noi}/A_{no} \xrightarrow{p} 0$ и $\sum v_{noi}/A_{no} \xrightarrow{p} 0$. Так как $\alpha_n \le 1$, из (88) получаем $\beta^*_{no} - \alpha_n\beta \xrightarrow{p} 0$. Последний факт эквивалентен (20). □

6.6. Докажем утверждения из § 4. Прежде всего заметим, что лемма 4.2 вытекает из формулы (41) и определений (22) и (36), поскольку $G_{ni}[\bar\gamma_{ni}] \equiv 0$ для постоянных $\{\bar\gamma_{ni}(\beta_n)\}$.

Доказательство леммы 4.3. Из (41) и (43) имеем

$$\sum \sigma_{ni+}^2\bigl(\bar\gamma_{ni}(\beta_n) - \bar c_{n\gamma}x_{ni}/\sigma_{ni+}^2\bigr)^2 = \sum \sigma_{ni+}^2\bar\gamma_{ni}^2(\beta_n) - 2\bar c_{n\gamma}\sum x_{ni}\bar\gamma_{ni}(\beta_n)$$
$$+ \bar c_{n\gamma}\mathbf{d}_{n,min}^2\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]\sum x_{ni}^2/\sigma_{ni+}^2 \equiv \sum \sigma_{ni+}^2\bar\gamma_{ni}^2(\beta_n) - \bar c_{n\gamma}\mathbf{A}_n[\gamma_\bullet]. \tag{89}$$

Из определения $\bar c_{n\gamma}$ и первых двух утверждений леммы 4.2 вытекает, что правая часть в (89) совпадает с левой частью в (49). □

Доказательство теоремы 4. Неравенство (43) очевидным образом выводится из лемм 4.2 и 4.3. Если же в (43) достигается равенство, то из этих лемм с учетом условия (42) следует, что должны одновременно выполняться также соотношения

$$\mathbf{D}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) = 0, \quad \bar\gamma_{ni}(\beta_n) - \bar c_{n\gamma}x_{ni}/\sigma_{ni+}^2 = 0. \tag{90}$$

Значит, $\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) = \mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) = \bar\gamma_{ni}(\beta_n)$ п. н. ввиду первого равенства в (90). Этот факт и второе соотношение в (90) доказывают необходимость условия (44) при $C_n = \bar c_{n\gamma}$.

Наконец, если выполнено (44), то из первых двух утверждений леммы 4.2 получаем, что $\mathbf{A}_n[\bar\gamma_\bullet]/C_n = \sum x_{ni}^2/\sigma_{ni+}^2 = \mathbf{B}_n^2[\bar\gamma_\bullet]/C_n^2$. Но отсюда уже нетрудно заметить, что $d_n^2[\gamma_\bullet] = d_n^2[\bar\gamma_\bullet] = \mathbf{B}_n^2[\bar\gamma_\bullet]/\mathbf{A}_n^2[\bar\gamma_\bullet] = \bigl(\sum' x_{ni}^2/\sigma_{ni+}^2\bigr)^{-1} = \mathbf{d}_{n,\min}^2$. □

Доказательство следствия 4. Из (45) вытекает справедливость (44) при $C_n = C_{n\gamma}/C_{n\sigma}$. Следовательно, по теореме 4 в (43) достигается равенство.

Пусть теперь в (43), а значит, и в (44) имеются равенства. Поскольку случайная величина X_{ni} имеет всюду положительную плотность, из (44) вытекает, что с необходимостью $\gamma_{ni}(\beta_n, x) = \bar\gamma_{ni}(\beta_n) = C_n x_{ni}/\sigma_{ni+}^2$ для п. в. x. Значит, (45) справедливо при $w_{noi}(\beta_n) = \bar\gamma_{ni}(\beta_n)$, $C_{n\sigma} = C_n$ и $C_{n\gamma} = 1$ для п. в. x. Так как $\gamma_{ni}(\beta_n, x)$ непрерывна по x, (45) верно при всех x. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. Кн. 1, 2.
2. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
3. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
4. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 380–396.
5. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 128–145.
6. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Улучшение оценок в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 143–160.
7. *Линке Ю. Ю. Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно – линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 592–619.
8. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1371–1400.
9. *Линке Ю. Ю.* Об условиях асимптотической нормальности двухшаговых оценок в задачах регрессии // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 837–856.
10. *Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
11. *Kukush A. G. Martsinyuk Y. V.* Consistency and inconsistency of the weighted least squares estimator in linear functional error-in-variables models // Theory Stoch. Process. 1998. V. 4, N 1–2. P. 172–179.
12. *Edland S. D.* Bias in slope estimates for the linear errors in variables model by the variance ratio method // Biometrics. 1996. V. 52. P. 243–248.
13. *Fuller W. A.* Measurement error models. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006. (Wiley Ser. Probab. Stat.).
14. *Dellaportas P., Stephens D. A.* Bayesian analysis of error-in-variables regression model // Biometrics. 1995. V. 51. P. 1085–1095.
15. *Gleser L. J., Carroll R. J., Gallo P. P.* The limiting distribution of least squares in an errors-in-variables regression model // Ann. Stat. 1987. V. 15, N 1. P. 220–233.
16. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1994–1997 // Commun. Stat. Theory Methods. 1998. V. 27, N 10. P. 2581–2623.
17. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1998–1999 // Commun. Stat. Theory Methods. 2000. V. 29, N 9–10. P. 2313–1341.
18. *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 2000–2001 // Commun. Stat. Theory Methods. 2002. V. 31, N 11. P. 2051–2075.
19. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.
20. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

Статья поступила 13 января 2011 г.

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
`aisakh@mail.ru`

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`linke@math.nsc.ru`