Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.5

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А. А. Мищенко, Е. И. Тимошенко

Аннотация. Доказаны необходимые и достаточные условия для универсальной эквивалентности 2-ступенно нильпотентных R-групп, определенных деревьями, где R — биномиальное евклидово кольцо.

Ключевые слова: Универсальная эквивалентность, частично коммутативная группа, биномиальное кольцо, евклидово кольцо.

Основной целью статьи является доказательство теорем 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть Γ_1 и Γ_2 — деревья, R — биномиальное евклидово кольцо. Частично коммутативные 2-ступенно нильпотентные R-группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда графы Γ_1' и Γ_2' изоморфны.*

Теорема 2. *Пусть Γ_1 и Γ_2 — деревья, R — биномиальное евклидово кольцо. Частично коммутативный 2-ступенно нильпотентные R-группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда они неразличимы формулами $\Phi(\Gamma_1)$ и $\Phi(\Gamma_2)$.*

Все необходимые определения будут введены в следующем параграфе.

§ 1. Предварительные сведения

Начнем с определения нильпотентных R-групп над произвольным биномиальным кольцом R, следуя статье [1].

Произвольную коммутативную область целостности, содержащую $\mathbb{Z}$ как подкольцо, назовем *биномиальным кольцом* R, если для каждого $\lambda \in R$ и любого натурального числа n кольцу R принадлежит биномиальный коэффициент

$$C_\lambda^n = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}.$$

Примерами биномиальных колец являются любое поле нулевой характеристики, кольцо многочленов над полем нулевой характеристики и кольцо целых чисел.

Определение 1. Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется *R-группой* (здесь R — биномиальное кольцо), если для любого $\lambda \in R$ и $x \in G$ единственным образом определен элемент $x^\lambda \in G$ и для всех элементов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00099 и 08–01–00067).

группы G и кольца R выполнены следующие аксиомы ($x, y, x_1, \dots, x_n \in G$, $\lambda, \mu \in R$):

1) $x^1 = x$, $x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}$, $(x^\lambda)^\mu = x^{\lambda\mu}$;

2) $y^{-1}x^\lambda y = (y^{-1}xy)^\lambda$;

3) $x_1^\lambda \dots x_n^\lambda = (x_1, \dots, x_n)^\lambda \tau_2^{C_\lambda^2}(X) \dots \tau_m^{C_\lambda^m}(X)$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\tau_i(X)$ — i-е слово Петреску.

Напомним, что *i-е слово Петреску* рекурсивно определяется в свободной группе F с порождающими $x_1, \dots, x_n$ формулой

$$x_1^i \dots x_n^i = \tau_1^{C_i^1}(X)\tau_2^{C_i^2}(X) \dots \tau_{i-1}^{C_i^{i-1}}(X)\tau_i^{C_i^i}(X)$$

для любого натурального i, в частности,

$$\tau_1(X) = x_1x_2 \dots x_n, \quad \tau_2(X) = \prod_{i<j,\, i,j=1}^{n} [x_i, x_j] \mod \gamma_3(F),$$

где $\gamma_3(F)$ — третий элемент нижнего центрального ряда группы F.

Мы будем работать с нильпотентными группами ступени $m = 2$. Всюду далее используем обозначения: $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x, y, z] = [[x, y]z]$, G' — коммутант группы G и $Z(G)$ — центр группы G.

Многообразие двуступенно нильпотентных групп $\mathfrak{N}_2$ определяется тождеством $[x, y, z] = 1$. Из этого тождества следует, что для любой группы G из многообразия $\mathfrak{N}_2$ коммутант G' содержится в центре $Z(G)$.

Третья аксиома в определении R-группы из многообразия $\mathfrak{N}_2$ выглядит следующим образом:

$$3')\ x_1^\lambda \dots x_n^\lambda = (x_1, \dots x_n)^\lambda \tau_2^{C_\lambda^2}(X), \quad \text{где } \tau_2(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j,\, i,j=1}^{n} [x_i, x_j].$$

Класс двуступенно нильпотентных R-групп будем обозначать через $\mathfrak{N}_{2,R}$. Покажем, что класс $\mathfrak{N}_{2,R}$ является многообразием в подходящем языке. Рассмотрим язык $L_R = L_{\mathrm{gr}} \cup \{f_\lambda \mid \lambda \in R\}$, где L_{gr} — стандартный групповой язык, f_λ — унарная алгебраическая операция. Пусть G — некоторая алгебраическая система языка L_R. В G удобно интерпретировать $f_\lambda(x)$ через x^λ, где $x \in G$. Предположим, что G — двуступенно нильпотентная группа и в ней выполнены аксиомы 1–3 из определения 1. Будем называть алгебраические системы языка L_R *R-группами*, если в них выполнены аксиомы группы и аксиомы $1, 2$ из определения, и *нильпотентными R-группами*, если G — нильпотентная группа и в ней выполнены аксиомы 1–3. Как обычно, в универсальной алгебре можно говорить о свободных R-группах, о многообразии R-групп, об универсальных классах R-групп. С этой точки зрения класс $\mathfrak{N}_{2,R}$ является многообразием двуступенно нильпотентных групп в языке L_R. Понятия R-подгруппы, R-гомоморфизма, R-изоморфизма и R-автоморфизма определяются естественным образом.

Введем основное для нашей статьи понятие частично коммутативной двуступенно нильпотентной R-группы, где R — биномиальное кольцо. В многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$, как и в других многообразиях алгебраических систем, имеет место теория определяющих соотношений. Пусть $F_{n,R}$ — свободная группа многообразия $\mathfrak{N}_{2,R}$ с базой $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть Γ — конечный простой граф, т. е. неориентированный граф без кратных ребер и петель с множеством вершин

$V(\Gamma) = X$ и множеством ребер $E(\Gamma)$. Определим *частично коммутативную двуступенно нильпотентную R-группу*, соответствующую графу Γ, с помощью порождающих и определяющих соотношений в многообразии $\mathfrak{N}_{2,R}$:

$$G_\Gamma = \langle X \mid R_\Gamma \rangle_{\mathfrak{N}_{2,R}},$$

где $R_\Gamma = \{[x_i, x_j] = 1 \mid (x_i, x_j) \in E(\Gamma)\}$. Иногда, когда речь будет идти про какое-то конкретное кольцо R, будем обозначать эту группу через $G_{\Gamma,R}$.

В [2] приведена однозначная запись элемента группы $G_{\Gamma,\mathbb{Q}}$ в виде

$$g = x_1^{r_1} \dots x_n{}^{r_n} \prod_{\{i,j \mid 1 \le i < j \le n,\, (x_i,x_j) \notin \Gamma\}} [x_i, x_j]^{r_{ij}}, \qquad (1)$$

где $r_i, r_{ij} \in \mathbb{Q}$. Каждый элемент g группы G_Γ имеет представление (1) при $r_i, r_{ij} \in R$.

Нетрудно показать, что если элементы $f, g \in G_\Gamma$ имеют вид $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $g = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, то

$$[f, g] = \prod y_{ij}^{\Delta_{ij}}, \quad \text{где } y_{ij} = [x_i, x_j] \ne 1,\ \Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix},\ i < j. \qquad (2)$$

Напомним некоторые понятия, связанные с универсальными теориями групп. $\exists$-*предложением* называется формула вида

$$\exists w_1 \dots w_m \Phi(w_1, \dots, w_m),$$

где $\Phi(w_1, \dots, w_m)$ — формула языка L_{gr} или L_R, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных. Это значит, что все переменные w_i связаны кванторами $\exists$. Множество всех $\exists$-предложений, истинных на группе G, называется ее *экзистенциальной* или $\exists$-*теорией*.

Две группы называются *экзистенциально эквивалентными*, если их экзистенциальные теории совпадают. Если группы G и H экзистенциально эквиваленты, то будем писать $G \equiv_\exists H$.

Аналогично определяется *универсальная* или $\forall$-*теория* группы, а также универсальная эквивалентность групп. Если группы G и H универсально эквиваленты, то пишут $G \equiv_\forall H$.

Ясно, что $G \equiv_\exists H$ тогда и только тогда, когда $G \equiv_\forall H$.

В теории моделей хорошо известна процедура по замене функциональных символов предикатными. Любое множество вместе со всеми предикатными символами, индуцированными на нем, является *подмоделью*. Таким образом, рассматривая подмодели с конечными носителями, корректно говорить о *конечной подмодели*.

Следующее предложение хорошо известно в теории моделей.

Предложение 1. *Произвольные алгебраические системы (в том числе и R-группы) G и H универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждой конечной подмодели одной алгебраической системы существует изоморфная ей подмодель в другой алгебраической системе.*

В [3] доказаны необходимые и достаточные условия для универсальной эквивалентности двух частично коммутативных метабелевых групп. Чтобы сформулировать эти условия, приведем несколько определений.

Степенью вершины $x \in X$ графа Γ называют количество инцидентных ей ребер. Вершину $x \in X$ называют *висячей*, если ее степень равна 1. Граф, полученный из графа Γ одновременным удалением всех висячих вершин и инцидентных им ребер, обозначим через Γ'. Висячую вершину $x \in X$ графа Γ назовем *лишней*, если существует ребро $(x, y) \in \Gamma$ такое, что степень вершины y не менее 3.

Опишем процедуру построения графа Γ^* по графу Γ. Из графа Γ удалим какую-либо лишнюю вершину, если она есть, и инцидентное ей ребро. Если лишних вершин нет, то $\Gamma^* = \Gamma$. Если граф, полученный после удаления лишней вершины, еще содержит лишние вершины, то применяем к нему процесс удаления лишних вершин и инцидентных им ребер. Этот процесс оборвется. Так получится граф Γ^*. Как легко видеть, он не зависит от процесса удаления вершин.

Конечный простой неориентированный связный граф без циклов называется *деревом*.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — деревья. В [3] доказано, что частично коммутативные метабелевы группы S_{Γ_1} и S_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны графы Γ_1' и Γ_2'.

Докажем, что аналогичная теорема верна для частично коммутативных 2-ступенно нильпотентных R-групп, где R — биномиальное евклидово кольцо (см. теорему 1).

Прежде чем сформулировать одну интересную гипотезу, принадлежащую В. Н. Ремесленникову, дадим определение $\Phi(T)$-формулы.

Пусть T — простой неориентированный конечный граф с множеством вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Графу T соответствует предложение

$$\Phi(T) = \exists z_1 \dots z_n \Big(\bigwedge_{(x_i,x_j)\in T} [z_i,\, z_j] = 1 \wedge \bigwedge_{(x_i,x_j)\notin T} [z_i,\, z_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i\neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i=1,\dots,n} z_i \neq 1 \Big). \quad (3)$$

Пусть $F_\Gamma(\mathfrak{M})$ — частично коммутативная группа в некотором многообразии групп $\mathfrak{M}$, построенная по графу Γ. Обозначим через $\Phi(F_\Gamma(\mathfrak{M}))$ множество всех формул вида (3), выполняющихся на группе $F_\Gamma(\mathfrak{M})$.

Гипотеза Ремесленникова. *Группы $F_{\Gamma_1}(\mathfrak{M})$ и $F_{\Gamma_2}(\mathfrak{M})$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают множества формул $\Phi(F_{\Gamma_1}(\mathfrak{M}))$ и $\Phi(F_{\Gamma_2}(\mathfrak{M}))$.*

Как показано в [4], гипотеза Ремесленникова верна для многообразия $\mathfrak{N}_{2,\mathbb{Q}}$. Мы докажем (см. теорему 2), что если Γ_1 и Γ_2 — деревья, R — биномиальное евклидово кольцо, то частично коммутативные 2-ступенно нильпотентные R-группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда они неразличимы формулами $\Phi(\Gamma_1)$ и $\Phi(\Gamma_2)$.

§ 2. Централизатор элемента группы

Централизатор элемента g некоторой группы G будем обозначать через $C_G(g)$. В [2] описаны централизаторы элементов группы $G_{\Gamma,\mathbb{Q}}$. Здесь мы покажем, что это описание верно и для случая, когда поле $\mathbb{Q}$ заменяется произвольным биномиальным евклидовым кольцом R.

Для произвольного элемента $g \in G_\Gamma$, записанного в виде (1), положим $\bar{g} = x_1^{r_1} \dots x_n{}^{r_n}$. Через $\alpha(g)$ обозначим множество всех порождающих $x_i \in X$, входящих в запись $\bar{g}$ с ненулевыми показателями r_i.

Наряду с графом коммутативности Γ для группы G_Γ рассмотрим двойственный граф Δ. Множество вершин графа Δ совпадает с X, причем $(x_i, x_j) \in \Delta$ тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) \notin \Gamma$.

Для элемента $g \in G_\Gamma$ через $\Delta(g)$ обозначим максимальный подграф Δ на множестве вершин $\alpha(g)$.

Элемент $g \in G_\Gamma$ называется *блоковым*, если $\Delta(g)$ — связный граф. Пусть $\Delta_{1g}, \dots, \Delta_{mg}$ — все компоненты связности графа $\Delta(g)$, т. е. $\Delta(g) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_{ig}$. Тогда $\bar{g}$ можно записать в виде $\bar{g} = g_1 \dots g_m$, где $\Delta(g_i) = \Delta_{ig}$. Назовем $\bar{g} = g_1 \dots g_m$ *блоковым разложением* элемента g, а элементы $g_1, \dots, g_m$ — его *блоками*. Понятно, что блоки перестановочны между собой.

Кольцо R называется *евклидовым*, если в нем определена норма $d : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ и возможно деление с остатком, т. е. для любых $a, b \in R$ $(b \neq 0)$ существуют $q, r \in R$ такие, что $a = bq + r$, причем $d(r) < d(b)$. Примерами евклидовых колец являются поле нулевой характеристики, кольцо целых чисел и кольцо многочленов от одной переменной над полем нулевой характеристики.

Обозначим через $E(R)$ множество обратимых элементов кольца R. Два элемента $a, b \in R$ назовем *ассоциированными*, если существует $e \in E(R)$ такой, что $a = be$. Ясно, что отношение ассоциированности является отношением эквивалентности, следовательно, кольцо R разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности по отношению ассоциированности. Если $\alpha \in R$ и $[\alpha]$ — класс эквивалентности, содержащий элемент α, то имеет место равенство $[\alpha] = \alpha E(R)$.

На классах эквивалентности можно ввести частичный порядок следующим образом: $[\alpha] \leq [\beta]$, если существует $c \in R$ такое, что $\alpha c = \beta$. Нетрудно заметить, что этот частичный порядок не зависит от выбора представителей α и β.

Определение 2. Пусть $g \in G_\Gamma$. Элемент $g_0 \in G_\Gamma$ будем называть *корневым* элементом для g, если существует $\alpha \in R$ такое, что выполнены следующие условия:

- $g = g_0^\alpha \mod G'_\Gamma$;
- если существуют $h \in G_\Gamma$ и $\beta \in R$ такие, что $g = h^\beta \mod G'_\Gamma$, то $[\beta] \leq [\alpha]$.

Без ограничения общности будем считать, что для корневых элементов выполнено $g_0 = \bar{g}_0$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — набор элементов кольца R. Элемент $d \in R$ назовем *наибольшим общим делителем* элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $(d = \text{НОД}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$, если выполнены следующие условия:

- $[d] \leq [\alpha_i]$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- для любого d' такого, что $[d'] \leq [\alpha_i]$ для всех $i = 1, \dots, n$, выполнено $[d'] \leq [d]$.

Предложение 2. *Пусть G_Γ — частично коммутативная 2-ступенно нильпотентная R-группа, где R — биномиальное евклидово кольцо. Тогда для любого элемента $g \in G_\Gamma \setminus G'_\Gamma$ существует корневой элемент.*

Доказательство. Пусть $g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $d = \text{НОД}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Обозначим $\beta_i = \alpha_i / d$. Покажем, что $g_0 = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ будет корневым элементом для g. Очевидно, что $g = g_0^d \mod G'_\Gamma$. Предположим, что найдутся элемент $h = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ и $d' \in R$ такие, что $g = h^{d'} \mod G'_\Gamma$. Тогда $\alpha_i = \gamma_i d'$, т. е. все α_i будут делиться на d', следовательно, из определения наибольшего общего делителя получаем, что $[d'] \leq [d]$. Предложение доказано.

Для вершины $x \in X$ положим $x^{\perp} = \{y \mid y \in X,\ (x,y) \in \Gamma\} \cup \{x\}$. Для любого подмножества $Y \subseteq X$ определим $Y^{\perp} = \bigcap\limits_{y \in Y} y^{\perp}$. Для произвольного элемента $g \in G_\Gamma$ обозначим через $A(g)$ подгруппу G_Γ, порожденную элементами из $\alpha(g)^{\perp}$.

Теперь перейдем к описанию централизаторов. Пусть G_Γ — частично коммутативная двуступенно нильпотентная R- группа.

Лемма 1. *Пусть $w \in G_\Gamma$ — блоковый элемент, причем $|\alpha(w)| > 1$, и w_0 — корневой элемент для w. Тогда*

$$C(w) = (\langle w_0 \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma.$$

Доказательство. Пусть $w_0 = x_{i_1}^{\beta_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{\beta_{i_k}}$, где $\beta_{i_j} \neq 0$, $j = 1 \dots k$, и $w = w_0^d \mod G'_\Gamma$, где $d \in R$. Пусть $h \in G_\Gamma$ и $[h,w] = 1$. Покажем, что $h \in (\langle w_0 \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma$. Положим $T = \alpha(w_0) \cup \alpha(w_0)^{\perp}$. Заметим, что $\alpha(w_0) = \alpha(w)$, значит, множество T можно представить в виде $T = \alpha(w_0) \cup \alpha(w)^{\perp}$. Возьмем $x_l \in \alpha(h)$, и пусть $x_l \notin T$. Тогда найдется $x_{i_t} \in \alpha(w_0)$ такой, что $[x_{i_t}, x_l] \neq 1$, тем самым из (2) следует

$$[x_l, w] = \left[x_l, w_0^d\right] = [x_l, w_0]^d = \left[x_l, x_{i_1}^{\beta_{i_1}} \dots x_{i_t}^{\beta_{i_t}} \dots x_{i_k}^{\beta_{i_k}}\right]^d \\ = [x_l, x_{i_t}]^{\xi} \prod_{i=1,\dots,k,\, i \neq t} [x_l, x_{i_j}]^{\xi_j}, \quad \text{где } \xi \neq 1.$$

Значит, $[x_l, w] \neq 1$, таким образом, $\alpha(h) \subset T$.

Так как w — блоковый элемент, то $T = \alpha(w_0) \sqcup \alpha(w)^{\perp}$. Запишем представителя h в виде $\bar{h} = h_1 h_2$, где $\alpha(h_1) \subset \alpha(w_0)$ и $\alpha(h_2) \subset \alpha(w)^{\perp}$. Таким образом, $h_2 \in A(w)$. Нетрудно заметить, что $[w,h] = 1$ тогда и только тогда, когда $[w, h_1] = 1$. Докажем, что $h_1 \in \langle w_0 \rangle$.

Так как w — блоковый элемент, существует путь $P = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ в графе $\Delta(w_0)$, проходящий через все вершины $\Delta(w_0)$. Пусть $h_1 = x_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\gamma_{i_k}}$. Поскольку $[w, h_1] = 1$ и $[x_{i_1}, x_{i_2}] \neq 1$, используя (2), получаем $\beta_{i_1}\gamma_{i_2} - \beta_{i_2}\gamma_{i_1} = 0$. Аналогично, рассматривая ребра $(x_{i_t} x_{i_{t+1}})$ пути P, имеем соотношения

$$\beta_{i_t}\gamma_{i_{t+1}} = \beta_{i_{t+1}}\gamma_{i_t}, \quad \text{где } t = 1, \dots, k. \tag{4}$$

Убедимся, что для любых t_1 и t_2 таких, что $1 \leq t_1, t_2 \leq k$, выполняется

$$\beta_{i_{t_1}}\gamma_{i_{t_2}} = \beta_{i_{t_2}}\gamma_{i_{t_1}}. \tag{5}$$

Для простоты покажем это на конкретном примере для $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. Перемножив все левые и все правые части соотношений (4) для $t = 1, 2, 3$, получим $\beta_{i_1}\gamma_{i_2}\beta_{i_2}\gamma_{i_3}\beta_{i_3}\gamma_{i_4} = \beta_{i_2}\gamma_{i_1}\beta_{i_3}\gamma_{i_2}\beta_{i_4}\gamma_{i_3}$. Следовательно, $\beta_{i_1}\gamma_{i_4} = \beta_{i_4}\gamma_{i_1}$.

Так как w_0 — корневой элемент, все $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}$ взаимно просты, т. е. НОД$(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k}) = 1$. Тем самым существуют $u_1, \dots, u_k \in R$ такие, что $\beta_{i_1}u_1 + \dots + \beta_{i_k}u_k = 1$. Умножив последнее соотношение на γ_{i_1}, получим $\beta_{i_1}\gamma_{i_1}u_1 + \beta_{i_2}\gamma_{i_1}u_2 + \dots + \beta_{i_k}\gamma_{i_1}u_k = \gamma_{i_1}$. Воспользовавшись (5), заменяем $\beta_{i_t}\gamma_{i_1} = \beta_{i_1}\gamma_{i_t}$ и выносим β_{i_1} за скобки:

$$\beta_{i_1}(\gamma_{i_1}u_1 + \dots + \gamma_{i_k}u_k) = \gamma_{i_1}.$$

Обозначим $\sigma = \gamma_{i_1}u_1 + \dots + \gamma_{i_k}u_k$. Аналогично получаем, что $\beta_{i_t}\sigma = \gamma_{i_t}$ для всех $t = 1, \dots, k$.

Таким образом, $h_1 \in \langle w_0 \rangle$. Из этого следует, что $\bar{h} \in \langle w_0 \rangle \times A(w)$, значит, $h \in (\langle w_0 \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma$.

Обратно, пусть $h \in (\langle w_0 \rangle \times A(w)) \cdot G'_\Gamma$. Тогда $\bar{h} = w_0^\alpha w_1$, где $w_1 \in A(w)$ и $\alpha \in R$. Очевидно, что $[h, w] = [\bar{h}, w] = \left[w_0^\alpha w_1, w\right] = [w_0, w]^\alpha [w_1, w] = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $w \in G_\Gamma$ и $\overline{w} = w_1 \dots w_k$ — блоковое разложение элемента w, а w'_i — корневой элемент для w_i. Тогда*

$$C(w) = \Big(\prod_{|\alpha(w_i)|>1} \langle w'_i \rangle \times A(w) \Big) \cdot G'_\Gamma. \tag{6}$$

В качестве доказательства данной леммы в точности проходит доказательство леммы 2 из [2].

§ 3. Универсальная эквивалентность групп

Лемма 3. *Пусть Γ — дерево. Если для элемента $g \in G_\Gamma$ множество $\alpha(g)$ содержит не менее двух элементов, то $C_{G_\Gamma}(g)$ — абелева группа.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \alpha(g)$. Если множество $\alpha(g)^\perp$ пусто или содержит только одну вершину, то утверждение леммы следует из формулы (6). Предположим, что множество $\alpha(g)^\perp$ содержит две различные вершины y_1, y_2.

Случай 1. $(x_1, x_2) \notin \Gamma$. Так как ребра (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2) различны и принадлежат Γ, граф содержит цикл; противоречие с тем, что Γ — дерево.

Случай 2. $(x_1, x_2) \in \Gamma$. Рассмотрим пересечение M множеств $\{x_1, x_2\}$ и $\{y_1, y_2\}$. Если M пусто или содержит только один элемент, то в графе Γ есть цикл, что невозможно. Значит, $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$. Но элементы x_1 и x_2 перестановочны, следовательно, централизатор $C_{G_\Gamma}(g)$ абелев. Множество $\alpha(g)^\perp$ не может содержать больше двух элементов, так как если оно содержит три различных элемента $y_1, y_2, y_3 \in \alpha(g)^\perp$, то, повторяя предыдущие рассуждения, можно показать, что y_1, y_2, y_3 попарно коммутируют между собой, тем самым в графе Γ будет цикл длины 3, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть Γ — дерево и x — висячая вершина, $g = x^l c \in G_\Gamma$, где $0 \neq l \in R$, $c \in G'_\Gamma$. Тогда $C_{G_\Gamma}(g)$ — абелева группа.*

Доказательство. Так как $\alpha(g) = \{x\}$, то $\alpha(g)^\perp = \{x, y\}$, где y — единственная вершина, смежная с x. Поскольку $[x, y] = 1$, то $A(g) = \langle x, y \rangle$ — абелева группа. Из (6) следует, что $C_{G_\Gamma}(g)$ — абелева группа. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть Γ — дерево. Если формула*

$$\Psi(g) = \exists h\, g_1\, g_2([g,\, h] \neq 1 \wedge [g,\, g_1] = 1 \wedge [g,\, g_2] = 1 \wedge [g_2,\, g_1] \neq 1)$$

истинна на группе G_Γ для элемента g, то $g = x^l c$, где x — невисячая вершина графа Γ, $l \neq 0$, $l \in R$, $c \in G'_\Gamma$.

Доказательство. Из истинности формулы для элемента g следует, что его централизатор — не абелева группа. Поэтому $|\alpha(g)| \leq 1$, следовательно, $g = x^l c$, где $c \in G'_\Gamma$. Так как $[g,\, h] \neq 1$, элемент g не лежит в коммутанте группы, тем самым $l \neq 0$. Таким образом, из леммы 4 вытекает, что x — невисячая вершина графа Γ.

Так как переход от графа Γ к графу Γ^* состоит в удалении всех лишних вершин и при этом не возникает новых висячих вершин, верна

Лемма 6. *Для любых конечных простых неориентированных графов* Γ_1 *и* Γ_2 *справедливо*

$$\Gamma_1' \cong \Gamma_2' \Longleftrightarrow \Gamma_1^* \cong \Gamma_2^*.$$

Лемма 7. *Пусть* Γ *— дерево,* x_3 *— лишняя вершина,* x_4 *— смежная с ней вершина,* x_1, x_2 *— вершины, отличные от* x_3 *и смежные с* x_4*. Отображение*

$$\varphi_l = \left\{x_3 \to x_1^l x_2^l,\ x_i \to x_i,\ i \neq 3,\ 1 \leq i \leq n\right\}$$

при любом натуральном l *продолжается до гомоморфизма группы* G_Γ*. Для любого элемента* $1 \neq g \in G_\Gamma$ *можно найти* $l_0 = l(g) \in \mathbb{Z}$ *такое, что для всех натуральных* $l \geq l_0$ *элементы* $\varphi_l(g)$ *не равны единице.*

Доказательство. Запишем элемент g в каноническом виде

$$g = x_1^{r_1} \dots {x_n}^{r_n} \prod_{\{i,j \mid 1 \leq i < j \leq n,\, (x_i, x_j) \notin \Gamma\}} [x_i, x_j]^{r_{ij}}.$$

Предположим, что $r_3 \neq 0$. Тогда

$$\varphi_l(g) \equiv x_1^{r_1 + lr_3} x_2^{r_2 + lr_3} x_4^{r_4} \dots x_n^{r_n} \mod G_\Gamma'$$

при всех натуральных l, удовлетворяющих неравенству $lr_3 + r_1 \neq 0$, $\varphi_l(g) \neq 1$.

Пусть $r_3 = 0$. Тогда можно предполагать, что хотя бы одно из чисел r_{i3} или r_{3j} не равно нулю, где $1 \leq i < 3 < j \leq n$. Так как

$$\varphi_l([x_1,\, x_3]^{r_{13}}) = [x_1, x_2]^{lr_{13}}, \quad \varphi_l([x_2,\, x_3]^{r_{23}}) = [x_1, x_2]^{-lr_{23}},$$

$$\varphi_l([x_3,\, x_j]^{r_{3j}}) = [x_1,\, x_j]^{lr_{3j}} [x_2,\, x_j]^{lr_{3j}},$$

выбирая натуральное l, удовлетворяющее хотя бы одному из неравенств

$$lr_{13} + r_{12} - lr_{23} \neq 0, \quad lr_{3j} + r_{1j} \neq 0, \quad lr_{3j} + r_{2j} \neq 0,$$

получим неединичный образ элемента g. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что графы Γ_1' и Γ_2' изоморфны. По лемме 6 изоморфны графы Γ_1^* и Γ_2^*. Значит, группы $G_{\Gamma_1^*}$ и $G_{\Gamma_2^*}$ универсально эквивалентны. Покажем, что для любого дерева Γ группы G_Γ и G_{Γ^*} универсально эквивалентны. Так как граф Γ^* получается из графа Γ последовательным удалением лишних вершин, достаточно доказать совпадение универсальных теорий групп G_Γ и G_Δ, где граф Δ получается из графа Γ удалением одной лишней вершины. Группа G_Δ является подгруппой группы G_Γ. Значит, любая конечная подмодель из G_Δ вкладывается в G_Γ. Для совпадения универсальных теорий групп G_Γ и G_Δ достаточно доказать согласно предложению 2, что имеет место обратное вложение. Пусть x_3 — лишняя вершина графа Γ, x_4 — смежная с ней вершина, x_1, x_2 — вершины, отличные от x_3 и смежные с x_4. Граф Δ получается из графа Γ удалением вершины x_3 и ребра (x_3, x_4). Возьмем некоторую конечную подмодель $M = \{g_1, \dots, g_m\}$ из G_Γ. Добавим к элементам модели M всевозможные элементы $g_i^{-1} g_j$, $g_i g_j^{-1}$, $1 \leq i \neq j \leq m$. Обозначим расширенную модель через $\overline{M}$. Для любого неединичного элемента $g \in \overline{M}$ по лемме 7 можно найти $l = l(g)$ такое, что гомоморфизм $\varphi_l : G_\Gamma \to G_\Delta$ отображает его на элемент $\varphi_l(g)$, также не равный единице. Выберем $l = \max\{l(g) \mid g \in \overline{M}\}$. Гомоморфизм φ_l действует на исходной модели M как вложение. Таким образом, доказана истинность импликации

$$\Gamma_1' \cong \Gamma_2' \Longrightarrow G_{\Gamma_1} \equiv_\forall G_{\Gamma_2}.$$

Обратно, предположим, что $G_{\Gamma_1} \equiv_\forall G_{\Gamma_2}$. Рассмотрим отдельно случай, когда хотя бы один из графов Γ_1 или Γ_2 имеет максимальный путь длины 2 (т. е. граф имеет вид «звезды», в которой одна вершина соединена с каждой из остальных вершин, а все остальные вершины не соединены между собой). Для определенности будем считать, что это граф Γ_1. Из доказанного выше следует, что $G_{\Gamma_1^*} \equiv_\forall G_{\Gamma_2^*}$. Граф Γ_1^* будет иметь вид пути длины 2, т. е. будет деревом из трех вершин и двух ребер. Так как формула $\Phi(\Gamma_2^*)$ выполняется на группе $G_{\Gamma_1^*}$, по теореме 1 из [5], получаем, что Γ_2^* будет тоже иметь вид «звезды». Но поскольку в Γ_2^* уже нет лишних вершин, Γ_2^* будет изоморфен графу Γ_1^*. Следовательно, по лемме 6 получаем $\Gamma_1' \cong \Gamma_2'$.

Рассмотрим случай, когда каждый из графов содержит путь длины больше чем 2.

Пусть X_1 — множество всех вершин графа Γ_1', X_2 — множество всех вершин графа Γ_2', $|X_1| = n_1$, $|X_2| = n_2$. Пусть

$$\Phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{n_1} \Psi(g_i),$$

где формула $\Psi(g)$ определена в лемме 5,

$$\Phi_2 = \bigwedge_{\{i,j|1\le i<j\le n_1,\,(x_i,x_j)\notin\Gamma_1'\}} ([g_i,\, g_j] \ne 1),$$

$$\Phi_3 = \bigwedge_{\{i,j|1\le i<j\le n_1,\,(x_i,x_j)\in\Gamma_1'\}} ([g_i,\, g_j] = 1),$$

$$\Phi_4 = \bigwedge_{\{i,j|1\le i\ne j\le n_1\}} (g_i \ne g_j), \quad \Phi_5 = \bigwedge_{\{i|1\le i\le n_1\}} (g_i \ne 1).$$

Рассмотрим предложение

$$\overline{\Phi} = \exists g_1 \dots g_{n_1} (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3 \wedge \Phi_4 \wedge \Phi_5).$$

Так как в графе Γ_1 есть путь длины больше чем 2, предложение $\overline{\Phi}$ будет выполняться на группе G_{Γ_1}. В качестве g_i можно взять невисячие вершины графа Γ_1. Формула $\overline{\Phi}$ истинна на группе G_{Γ_2}. По лемме 5 элементы g_i из G_{Γ_2} имеют вид $g_i = y_i^{l_i} c_i$, $y_i \in X_2$, $l_i \ne 0$, $c_i \in G_{\Gamma_2}'$. Все элементы y_i, $1 \le i \le n_1$, различны, так как для любых двух различных невисячих вершин x и y графа Γ_1 всегда найдется вершина z, перестановочная с x и не перестановочная с y. Это свойство зафиксировано в формуле $\overline{\Phi}$. Значит, отображение $x_i \to y_i$, $1 \le i \le n_1$, является вложением графа Γ_1' в граф Γ_2'. Так как существует обратное вложение, графы Γ_1' и Γ_2' изоморфны. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Прямое утверждение теоремы очевидно.

Обратно, рассмотрим отдельно случай, когда хотя бы один из графов будет иметь максимальный путь (без повторения вершин) длины 2. Для определенности будем считать, что это граф Γ_1. Из того, что формула $\Phi(\Gamma_2)$ выполняется на группе G_{Γ_1}, по теореме 1 из [5] следует, что граф Γ_2 либо представляет одно ребро, либо имеет вид «звезды». Первый случай невозможен, так как тогда формула $\Phi(\Gamma_1)$ не будет выполняться на группе G_{Γ_2} (по теореме 1 из [5]). Во втором случае группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально эквивалентны по теореме 1.

Если хотя бы один из графов имеет максимальный путь длины 1, то такая группа абелева, и справедливость теоремы очевидна.

Теперь рассмотрим оставшиеся случаи, когда оба графа содержат путь длины больше чем 2. Предположим, что универсальные теории групп G_{Γ_1} и G_{Γ_2} различны. Тогда графы Γ_1' и Γ_2' не изоморфны. Значит, не существует вложения графа Γ_1' в граф Γ_2' или графа Γ_2' в граф Γ_1'. Предположим, что граф Γ_1' не является подграфом из Γ_2'. Заметим, что в этом случае граф Γ_1' содержит не менее двух вершин, так как случаи, когда граф Γ_1' содержит менее двух вершин, уже разобраны.

Рассмотрим формулу $\Phi(\Gamma_1)$: по условию она истинна на группе G_{Γ_2}. Если x_i — невисячая вершина графа Γ_1, то в формулу $\Phi(\Gamma_1)$ (см. (3)) входит атомарная подформула

$$[z_l, z_i] \neq 1 \wedge [z_j, z_i] = 1 \wedge [z_m, z_i] = 1 \wedge [z_m, z_j] \neq 1 \wedge z_i \neq z_j \wedge z_i \neq z_m.$$

Элемент g_i группы G_{Γ_2}, удовлетворяющий формуле $\Phi(\Gamma_1)$ в качестве элемента z_i, имеет вид $y_i^{l_i} c_i$, где y_i — вершина графа Γ_2, $0 \neq l_i \in R,\ c_i \in G'_{\Gamma_2}$, причем вершина y_i не является висячей, так как ее централизатор неабелев. Как отмечено при доказательстве теоремы 1, все вершины y_i различны. Поэтому существует вложение Γ_1' в Γ_2'. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1056–1059.
2. *Мищенко А. А., Трейер А. В.* Структура централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы // Вестн. Омск. ун-та. Специальный выпуск. 2007. С. 98–102.
3. *Тимошенко Е. И.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 263–290.
4. *Мищенко А. А.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп // Вестн. Омск. ун-та. Специальный выпуск. 2008. С. 61–67.
5. *Мищенко А. А., Трейер А. В.* Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп // Сиб. электрон. мат. изв. http://semr.math.nsc.ru /v4/p460-481.pdf.

Статья поступила 12 июля 2010 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru

Мищенко Алексей Александрович
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
alexei.mishenko@gmail.com