*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5*

*УДК 517.958*

# ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ О НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ПУЧКА ПРЯМЫХ

**Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова**

**Аннотация.** Рассматривается проблема интегральной геометрии, в которой конечное число функций интегрируются по прямым. Каждая функция, как и соответствующая ей прямая, считаются неизвестными. Известной информацией является сумма интегралов по всем прямым из семейства пучков, в любом из которых единственным пересечением прямых будет произвольная точка заданного открытого ограниченного множества в конечномерном евклидовом пространстве. Каждая подынтегральная функция зависит от большего числа переменных, чем заданная сумма интегралов. Поэтому традиционная постановка проблемы о нахождении подынтегральных функций была бы явно недоопределенной задачей. В такой ситуации ставится и исследуется задача о нахождении поверхностей разрывов подынтегральных функций. Доказана теорема единственности при наличии условия, отражающего факт существования искомых поверхностей. Настоящая работа является развитием предыдущих исследований авторов [1–6] и отличается от них не только некоторыми техническими усовершенствованиями, но и принципиально новым обстоятельством, т. е. тем, что здесь интегрирование производится по неизвестному множеству.

**Ключевые слова:** сингулярный интеграл, интегральная геометрия, неизвестная граница.

## 1. Основные обозначения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

Рассмотрим вещественное $n$-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, в котором выделен основной ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$. Для координатной записи векторов из $\mathbb{E}^n$ этот базис будет использоваться без пояснений. Другие координатные представления точек из $\mathbb{E}^n$ будут сопровождаться соответствующими указаниями.

Введем следующие обозначения: $\rho(T_1, T_2)$ — расстояние между произвольными множествами $T_1$ и $T_2$ в $\mathbb{E}^n$; $\partial T$ — граница множества $T$; $|x|$ — норма (модуль) вектора $x$ из $\mathbb{E}^n$; $B(x, \rho) = \{y : y \in \mathbb{E}^n,\ |y-x| < \rho,\ 0 < \rho\}$ — шар с центром в точке $x$ радиуса $\rho$; $B(x, \rho_1, \rho_2) = \{y : y \in \mathbb{E}^n,\ \rho_1 \leq |y - x| < \rho_2,\ 0 < \rho_1 < \rho_2\}$ — шаровой слой; $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{E}^n,\ |\omega| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{E}^n$; $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное арифметическое пространство; const — некоторое положительное число; $O(1)$ — ограниченная функция; $\mathbb{C}^1(T)$ — пространство функций, непрерывных

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00384–а), а также при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект № 2009.93).

и ограниченных на $T$ вместе со всеми своими частными производными первого порядка, где $T$ — множество в конечномерном евклидовом пространстве. Условимся для точки единичной сферы $\Omega$ использовать букву $\omega$, если она рассматривается как независимая переменная. Если же такая точка представлена через другие переменные, будем использовать букву $s$, например $s = (y-x)/|y-x|$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $G$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{E}^n$, $g(x,y,\omega)$ — функция, заданная для $(x,y,\omega) \in G \times G \times \Omega$. Будем считать функцию $g(x,y,\omega)$ продолженной по $\omega$ в шаровой слой $B(0,\rho_1,\rho_2)$, $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$, таким образом, что $g(x,y,v) = g(x,y,\omega)$ для $v = t\omega$, $t \in (\rho_1,\rho_2)$. Тогда она оказывается функцией $3n$ независимых переменных: $g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n)$. Ее частные производные первого порядка будем обозначать через $D_k g(x,y,v)$. При этом $D_k g(x,y,v)$ — частная производная по $x_k$, $D_{n+k} g(x,y,v)$ — частная производная по $y_k$, $D_{2n+k} g(x,y,v)$ — частная производная по $v_k$ для $1 \le k \le n$. Производная $D_{2n+k} g(x,y,\omega)$ определяется как след функции $D_{2n+k} g(x,y,v)$ при $v = \omega$.

Пусть в множестве $G$ содержатся открытые попарно не пересекающиеся множества $G_i$, $i = 1,\dots,p$. Обозначая объединение этих множеств через $G_0$, предположим, что $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \cup \dots \cup \partial G_p$. Будем считать систему множеств $\{G_i\}$, $i = 1,\dots,p$, обобщенно выпуклой в следующем смысле: для любой точки $x \in G_0$ прямая $L_{x,\omega} = \{y : y = x + t\omega,\ t \in \mathbb{R}^1\}$ пересекает границу $\partial G_0$ множества $G_0$ не более чем в счетном числе точек. Заметим, что это довольно общее ограничение может включать в себя также случаи линейных участков границы $\partial G_0$. Например, если в $G$ содержится всего два подмножества $G_1$, $G_2$, где $G_1$ — $n$-мерный куб, $G_2 = G \backslash \overline{G_1}$, то, продолжая грани куба до их пересечения с границей $\partial G$ и рассматривая эти продолжения как границы других дополнительных подмножеств, можно считать новую расширенную систему множеств $\{G_i\}$ обобщенно выпуклой. Аналогично можно поступать и в других подобных случаях.

Рассмотрим множество функций $g(x,y,\omega)$, определенных и ограниченных при $(x,y,\omega) \in G \times G \times \Omega$ и принадлежащих пространствам $\mathbb{C}^1(G \times G_i \times \Omega)$, $i = 1,\dots,p$, т. е. непрерывных и ограниченных вместе со всеми своими частными производными первого порядка при $(x,y,\omega) \in G \times G_i \times \Omega$. Ясно, что такие функции имеют конечные предельные значения в точках $y \in \partial G_i$, которые будем обозначать через $[g(x,y,\omega)]_i$, т. е. $g(x,\tilde{y},\omega) \to [g(x,y,\omega)]_i$, $\tilde{y} \in G_i$, $y \in \partial G_i$, $\tilde{y} \to y$.

Пусть $z \in \partial G_0$ является граничной точкой для двух и только двух множеств $G_j$, $G_l$, $1 \le j,l \le p$. *Величиной разрыва* (*скачка*) функции $g(x,y,\omega)$ в точке $(x,z,\omega)$ назовем разность $[g(x,z,\omega)]_{j,l} = [g(x,z,\omega)]_j - [g(x,z,\omega)]_l$. Для удобства будем считать функцию $g(x,y,\omega)$ продолженной по $y$ нулем вне $G$. Множество таких функций назовем *классом* $K$. Рассмотрим следующий интеграл:

$$F(x,\omega) = \int_{-d}^{d} \varphi(x, x + tA\omega, \omega)\, dt, \quad (x,\omega) \in G_0 \times \Omega,$$

где $d$ — диаметр множества $G$, $A$ — ортогональное преобразование $\mathbb{E}^n$ на себя.

**Лемма 1.1.** *Если функция $\varphi(x,y,\omega)$ принадлежит классу $K$, то функция $F(x,\omega)$ непрерывна и ограничена при $(x,\omega) \in G_0 \times \Omega$.*

Доказательство. Ограниченность функции $F(x,\omega)$ следует из ограниченности множества $G$ и подынтегральной функции $\varphi(x,y,\omega)$. Докажем ее непрерывность. Фиксируем произвольную точку $(x,\omega) \in G_0 \times \Omega$, и пусть $\{(x_k,\omega_k)\}$ — последовательность точек из $G_0 \times \Omega$, сходящаяся к $(x,\omega)$. Рассмотрим функции $\chi_k(t) = \varphi(x_k, x_k + tA\omega_k, \omega_k)$, $\chi(t) = \varphi(x, x + tA\omega, \omega)$. Ясно, что

$$\int\limits_{-d}^{d} \chi_k(t)\, dt = F(x_k,\omega_k), \quad \int\limits_{-d}^{d} \chi(t)\, dt = F(x,\omega).$$

Согласно условию обобщенной выпуклости системы множеств $\{G_i\}$ каждая прямая $L_{x_k,A\omega_k}$ имеет не более чем счетное число общих точек с множеством $\partial G_0$, в точках которого функция $\varphi(x,y,\omega)$ может иметь ненулевые разрывы по $y$, что соответствует значениям $t_{k,j}$ таким, что $x_k + t_{k,j}A\omega_k \in \partial G_0$. Всего таких точек $t_{k,j}$ не более чем счетное множество. Поэтому в силу непрерывности $\varphi(x,y,\omega)$ в $G \times G_i \times \Omega$ имеем $\chi_k(t) \to \chi(t)$, $k \to \infty$, везде, кроме (быть может) точек $t = t_{k,j}$, т. е. почти всюду на $(-d,d)$. Следовательно, по теореме Лебега допустим предельный переход под знаком интеграла, т. е.

$$\int\limits_{-d}^{d} \chi_k(t)\, dt \to \int\limits_{-d}^{d} \chi(t)\, dt, \quad k \to \infty,$$

что и означает непрерывность $F(x,\omega)$ в точке $(x,\omega) \in G_0 \times \Omega$. Лемма доказана.

Пусть $A_1,\dots,A_m$, $m \geq 1$, — ортогональные преобразования пространства $\mathbb{E}^n$ на себя, функции $g_i(x,y,\omega)$, $i = 1,\dots,m$, принадлежат классу $K$. Рассмотрим функцию

$$H(x,\omega) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{-d}^{d} g_i(x, x + tA_i\omega, \omega)\, dt, \quad (x,\omega) \in G_0 \times \Omega. \tag{1.1}$$

Для удобства оформления доопределим как-нибудь функцию $H(x,\omega)$ в точках $(\tilde{x},\omega) \in \partial G_0 \times \Omega$. Именно, для произвольной точки $\tilde{x} \in \partial G_0$ положим

$$H(\tilde{x},\omega) = \lim_{\rho\to 0} \sup_{x \in B(\tilde{x},\rho)\cap G_0} H(x,\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Отметим, что, как следует из леммы 1.1, функция $H(x,\omega)$ непрерывна в $G_0 \times \Omega$ и ограничена в $G \times \Omega$.

Рассмотрим следующую проблему интегральной геометрии.

**Задача о неизвестной границе.** *Из уравнения* (1.1) *найти множество* $\partial G_0$, *если известна только функция* $H(x,\omega)$, $(x,\omega) \in G \times \Omega$.

Как видно, в этой задаче задана сумма интегралов по неизвестным прямым от неизвестных функций, а требуется найти множество точек возможных разрывов по переменной $y$ подынтегральных функций $g_i(x,y,\omega)$, $i = 1,\dots,m$. Такая постановка задачи является развитием предыдущих исследований Д. С. Аниконова [2, 3], которые включаются сюда как частный случай, если положить $m = 1$, $A_1$ — тождественный оператор.

Однако нужно отметить, что есть принципиальное отличие задачи в этой работе от предыдущих. Именно, здесь неизвестными считаются не только подынтегральные функции, но и множество интегрирования. Также заметим, что развитие состоит еще и в том, что неизвестных функций несколько, а вместо интеграла по каждой прямой задана сумма интегралов. Можно сказать, что произошло увеличение неизвестных параметров задачи при понижении информативности данных.

Настоящая задача, помимо самостоятельного теоретического значения, может представлять собой ценность для обратных задач уравнений математической физики. Например, функция $H(x,\omega)$ может служить сколь угодно точным приближением известных данных в востребованной задаче интегральной геометрии, в которой интегрирование производится по конусам.

Введем дополнительные ограничения. Границу $\partial G_i$ каждого множества $G_i$, $i = 1,\dots,p$, будем считать кусочно гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью класса $\mathbb{C}^2$ в следующем смысле. Сначала определим понятие контактной точки $z$. Пусть $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$, $1 \le j,l \le p$, $j \ne l$, и вблизи $z$ нет точек из множеств $G_i$, $i \ne j$, $i \ne l$, $1 \le i \le p$. Пусть в точке $z$ существует касательная плоскость $P(z)$, общая к $\partial G_j$ и $\partial G_l$. Обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial G_j$ в точке $z$ через $n_j(z)$. Возьмем цилиндр $C_\delta(z)$ высоты $2\delta$ с центральной осью вдоль вектора $n_j(z)$, основанием которого является шар в плоскости $P(z)$: $\{y : y \in P(z),\ |y-z| \le \delta\}$, $0 < \delta < 1$, т. е. $C_\delta(z) = \{y : y \in \mathbb{E}^n,\ |y-z|^2 - ((y-z), n_j(z))^2 \le \delta^2,\ |((y-z), n_j(z))| \le \delta\}$. Часть поверхности $\partial G_j$ внутри $C_\delta(z)$ обозначим через $\partial G_{j,z}$. Предположим, что для достаточного малого числа $\delta$ аналогичная часть поверхности $\partial G_{l,z}$ совпадает с $\partial G_{j,z}$, т. е. $\partial G_{j,z} = \partial G_j \cap C_\delta(z) = \partial G_l \cap C_\delta(z) = \partial G_{l,z}$. Возьмем декартову систему координат в $\mathbb{E}^n$ с центром в точке $z$, у которой первые $n-1$ осей расположены в плоскости $P(z)$, а $n$-я ось направлена вдоль вектора $n_j(z)$. Координаты точек из $\mathbb{E}^n$ в этой системе будем обозначать через $(\xi,\eta)$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, $\eta \in \mathbb{R}^1$. Предположим, что поверхность $\partial G_{j,z}$ представляется в виде графика $(\xi, \psi(\xi))$, $|\xi| \le \delta$, где функция $\psi(\xi)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и $\psi(0) = D_k\psi(0) = 0$, $k = 1,\dots,n-1$. Ясно, что справедливы оценки: $|D_k\psi(\xi)| \le \operatorname{const}|\xi|$, $|\psi(\xi)| \le \operatorname{const}|\xi|^2$. Такие точки $z$ будем называть *контактными* и предположим, что они образуют множество, плотное в $\partial G_0 \backslash \partial G$. В целом каждая поверхность $\partial G_i$, $i = 1,\dots,p$, считается липшицевой, т. е. в окрестности каждой ее точки она представляется в виде графика функции, удовлетворяющей условию Липшица.

В дальнейшем будут полезны следующие оценки.

**Лемма 1.2.** *Пусть* $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $0 < |\tau| \le \tau_0$, $\tau_0 > 0$, *функция* $\psi(\xi)$ *задана для* $|\xi| \le \delta$ *и удовлетворяет условию* $|\psi(\xi)| \le \operatorname{const}|\xi|^2$, $y = (\xi, \psi(\xi))$; $x = (0,\dots,0,\tau) \in \mathbb{R}^n$, $s = (y-z)/|y-x|$, $\omega = (\xi/|\xi|, 0)$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\tau)^2}}\right| \le \frac{\operatorname{const}}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}}, \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{(n-1)/2}} = \frac{1}{(|\xi|^2+\tau^2)^{(n-1)/2}} + u(\xi,\tau), \quad |u(\xi,\tau)| \le \frac{\operatorname{const}}{|\xi|^{n-1,5}}, \tag{1.3}$$

$$|s-\omega| \le \left((|\xi|^2+\tau^2)^{1/4} + \frac{|\tau|^{1/2}}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}}\right). \tag{1.4}$$

Доказательство. Обозначим $a = (|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{-1/2}$, $b = (|\xi|^2+\tau^2)^{-1/2}$ и оценим модуль их разности. Используя числовые неравенства $|\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}| \le$

$\sqrt{|t_1 - t_2|}$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_1/(t_1+t_2) \leq 1$, $t_1, t_2 > 0$, выпишем легко проверяемую цепочку соотношений:

$$|a-b| = \left|\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}}\right|$$
$$\leq \sqrt{\left|\frac{1}{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2} - \frac{1}{|\xi|^2+\tau^2}\right|} = \sqrt{\frac{|2\tau\psi(\xi) - \psi^2(\xi)|}{(|\xi|)^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)(|\xi|^2+\tau^2)}}$$
$$\leq \sqrt{\frac{\mathrm{const}\,|\tau||\xi|^2}{(|\xi|)^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)(|\xi|^2+\tau^2)} + \frac{\mathrm{const}\,|\xi|^4}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)(|\xi|^2+\tau^2)}}$$
$$\leq \sqrt{\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}} + \mathrm{const}} \leq \frac{\mathrm{const}}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}}.$$

Тем самым неравенство (1.2) доказано.

Для доказательства (1.3) используем тождества

$$a^{n-1} = b^{n-1} + (a^{n-1} - b^{n-1}), \quad a^{n-1} - b^{n-1} = (a-b)\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k-1}.$$

Оценим сверху величину $a^{n-1-k}b^{k-1}$. В силу неравенств $a \leq |\xi|^{-1}$, $b \leq |\xi|^{-1}$ имеем $a^{n-1-k}b^{k-1} \leq |\xi|^{-(n-2)}$. Отсюда и из уже доказанного неравенства $|a - b| \leq \mathrm{const}\,|\xi|^{-0,5}$ (см. (1.2)) следует, что

$$|u(\xi,\tau)| = |a^{n-1} - b^{n-1}| \leq \mathrm{const}\,|\xi|^{-0,5}|\xi|^{-(n-2)} = \mathrm{const}\,|\xi|^{-(n-1,5)},$$

т. е. утверждение (1.3) доказано. Осталось доказать (1.4). Легко видеть, что

$$|s-\omega|^2 = \left|\frac{y-x}{|y-x|} - \omega\right|^2 = 2\frac{|y-x| - ((y-x),\omega)}{|y-x|}.$$

Так как $|y-x| = \sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}$, $((y-x),\omega) = |\xi|$, используя числовое неравенство $|\sqrt{|t_1|} - \sqrt{|t_2|}| \leq \sqrt{|t_1 - t_2|}$, получаем

$$|s-\omega|^2 = \frac{2}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}}\left(\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2} - \sqrt{|\xi|^2}\right) \leq \frac{2|\psi(\xi)-\tau|}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}}.$$

Далее, применяя числовое неравенство $\sqrt{|t_1 - t_2|} \leq \sqrt{|t_1|} + \sqrt{|t_2|}$, выводим

$$|s-\omega| \leq \mathrm{const}\left(\frac{\sqrt{|\psi(\xi)|}}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{1/4}} + \frac{\sqrt{|\tau|}}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{1/4}}\right)$$
$$\leq \mathrm{const}\left(\frac{|\xi|}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{1/4}} + \frac{\sqrt{|\tau|}}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2)^{1/4}}\right). \quad (1.5)$$

Запишем очевидное равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}} + \left\{\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}} - \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}}\right\}.$$

Применяя к выражению в фигурных скобках уже доказанную оценку (1.2), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi)-\tau)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}} + \frac{\mathrm{const}}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}} \leq \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{|\xi|^2+\tau^2}}.$$

Используя полученную оценку в (1.5), получаем

$$|s-\omega| \le \mathrm{const}\left(\frac{|\xi|}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}} + \frac{|\tau|^{1/2}}{(|\xi|^2+\tau^2)^{1/4}}\right).$$

Отсюда и из неравенства $|\xi| \le \sqrt{|\xi|^2+\tau^2}$ следует (1.4). Лемма доказана.

Рассмотрим следующие интегралы:

$$I_n = \int\limits_0^\delta t^{n-2}(t^2+\tau^2)^{\frac{-n+1}{2}}\,dt, \quad J_n = \int\limits_0^\delta t^{n-2}\tau^{\frac{1}{2}}(t^2+\tau^2)^{\frac{-2n+1}{4}}\,dt, \tag{1.6}$$

где $\delta > 0$, $0 < \tau < 1$.

**Лемма 1.3.** *Для интегралов* $I_n$,$J_n$ *имеют место следующие соотношения:*

$$I_n = |\ln|\tau|| + O(1), \quad |J_n| \le \mathrm{const}\,. \tag{1.7}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала интеграл $I_n$. Отметим, что

$$I_2 = \ln(\delta+\sqrt{\delta^2+\tau^2}) - \ln\tau, \quad I_3 = \ln\sqrt{\delta^2+\tau^2} - \ln\tau. \tag{1.8}$$

Интегрируя по частям, получим рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_n$:

$$I_n = \int\limits_0^\delta \frac{t^{n-3}}{-n+3}\,d((t^2+\tau^2)^{\frac{-n+3}{2}}) = \frac{\delta^{n-3}}{-n+3}(\delta^2+\tau^2)^{(-n+3)/2} + I_{n-2}.$$

Преобразуя аналогично $I_{n-2}$, $I_{n-4}, \dots$, придем к следующим соотношениям:

$$I_{2k} = -\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\delta^{2i-1}}{2i-1}(\delta^2+\tau^2)^{(-2i+1)/2} + I_2, \quad I_{2k+1} = -\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\delta^{2i}}{2i}(\delta^2+\tau^2)^{-i} + I_3.$$

Отсюда с учетом равенств (1.8) и условия $\tau < 1$ следует утверждение леммы для $I_n$.

Исследуем $J_n$. Покажем сначала ограниченность интегралов $J_2$, $J_3$. Используя неравенство $2(t^2+\tau^2) \ge (t+\tau)^2$ для оценки $J_2$, получим

$$J_2 = \int\limits_0^\delta \tau^{1/2}(t^2+\tau^2)^{-3/4}\,dt \le \mathrm{const}\cdot\tau^{1/2}\int\limits_0^\delta (t+\tau)^{-3/2}\,dt$$
$$= \mathrm{const}(1-(\tau/(\delta+\tau))^{1/2}) \le \mathrm{const}, \tag{1.9}$$

$$J_3 = \int\limits_0^\delta t\cdot\tau^{1/2}(t^2+\tau^2)^{-5/4}\,dt = -2\tau^{1/2}(\delta^2+\tau^2)^{-1/4} - 2\tau^{1/4} \le \mathrm{const}\,. \tag{1.10}$$

Преобразуем $J_n$, интегрируя по частям:

$$J_n = 2\tau^{1/2}\int\limits_\delta^0 \frac{t^{n-3}}{-2n+5}\,d((t^2+\tau^2)^{(-2n+5)/4})$$
$$= \frac{2\tau^{1/2}\delta^{n-3}}{-2n+5}(\delta^2+\tau^2)^{(-2n+5)/4} + \frac{2\tau^{1/2}(3-n)}{5-2n}J_{n-2} = \mathrm{const}\,J_{n-2} + O(1). \tag{1.11}$$

Для доказательства ограниченности $J_n$ воспользуемся методом математической индукции для последовательностей $a_k = J_{2k}$, $b_k = J_{2k+1}$, $k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$: ограниченность $a_k$, $b_k$ следует из соотношений (1.9)–(1.11). Лемма доказана.

## 2. Основные утверждения

Умножим уравнение (1.1) на произвольную функцию $\beta(x,\omega)$ из пространства $\mathbb{C}^1(G\times\Omega)$. Эту функцию будем называть *весовой*, и о ее роли будет сказано ниже. В уравнении (1.1), умноженном на $\beta(x,\omega)$, каждый интеграл в правой части разобьем на два:

$$\beta(x,\omega)H(x,\omega)=\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^d \beta(x,\omega)g_i(x,x+tA_i\omega,\omega)\,dt\right.$$
$$\left.+\int_0^d \beta(x,\omega)g_i(x,x-tA_i\omega,\omega)\,dt\right).$$

Проинтегрируем полученное равенство по $\omega\in\Omega$ и в обоих интегралах под знаком суммы сделаем замены переменных: $y=x+tA_i\omega$ — в первом и $y=x-tA_i\omega$ — во втором, $\omega\in\Omega$, $y\in G$, $t^{n-1}\,dtd\omega=dy$, $t=|y-x|$. В результате получим

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int_G \frac{\beta\big(x,A_i^{-1}s\big)g_i\big(x,y,A_i^{-1}s\big)\,dy}{|y-x|^{n-1}}+\int_G \frac{\beta\big(x,-A_i^{-1}s\big)g_i\big(x,y,-A_i^{-1}s\big)\,dy}{|y-x|^{n-1}}\right)$$
$$=\int_\Omega \beta(x,\omega)H(x,\omega)\,d\omega,\quad s=\frac{y-x}{|y-x|}. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$q_i(x,y,\omega)=\beta\big(x,A_i^{-1}\omega\big)g_i\big(x,y,A_i^{-1}\omega\big),\quad q(x,y,\omega)=\sum_{i=1}^{m}(q_i(x,y,\omega)+q_i(x,y,-\omega)). \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) запишется в виде

$$\int_G \frac{q(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}}=Q(x), \tag{2.3}$$

где

$$\int_\Omega \beta(x,\omega)H(x,\omega)\,d\omega=Q(x),\quad s=\frac{y-x}{|y-x|}.$$

Прежде чем исследовать уравнение (2.3) относительно неизвестной функции $q$, докажем два вспомогательных утверждения о свойствах интеграла типа потенциала, имеющих также самостоятельное значение. Сначала изучим дифференциальные свойства интеграла

$$\Phi(x)=\int_G \frac{q(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}},\quad x\in G,\ s=\frac{y-x}{|y-x|}. \tag{2.4}$$

**Теорема 2.1.** *Для любой функции $q(x,y,\omega)$ из класса $K$ интеграл $\Phi(x)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка при $x\in G_0$, которые могут быть представлены в виде*

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial G_i}\frac{[q(x,y,s)]_i(n_i(y),e_k)\,d_y\sigma}{|y-x|^{n-1}}+O(1),\quad s=\frac{y-x}{|y-x|},\ k=1,\dots,n, \tag{2.5}$$

*где под знаком суммы находятся поверхностные интегралы первого рода, а слагаемое $O(1)$ не только ограничено, но и непрерывно в $G_0$.*

Доказательство. Для $x, y \in G_0$, $x \neq y$, запишем следующее легко проверяемое тождество:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\right) + \frac{D_k q(x,y,s) + D_{n+k} q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}. \quad (2.6)$$

Возьмем произвольную точку $x \in \partial G_0$. Существует единственное множество $G_j$ из системы множеств $\{G_i\}$, $i = 1, \ldots, p$, содержащее эту точку $x$. Очевидно, что

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \cdots + \Phi_p(x), \quad \Phi_i(x) = \int\limits_{G_i} \frac{q(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}}.$$

Ясно, что для $x \in G_j$ и всех $i = 1, \ldots, p$, кроме $i = j$, в интегралах $\Phi_i(x)$ подынтегральное выражение ограничено вместе с любой своей частной производной первого порядка. Поэтому для таких индексов $i$, используя равенство (2.6) и применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\partial G_i} \frac{[q(x,y,s)]_i (n_i(y), e_k)\,d_y\sigma}{|y-x|^{n-1}} + \int\limits_{G_i} \frac{(D_k q(x,y,s) + D_{n+k} q(x,y,s))\,dy}{|y-x|^{n-1}}. \quad (2.7)$$

Так как второе слагаемое в правой части (2.7) — непрерывная ограниченная функция, то

$$\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\partial G_i} \frac{[q(x,y,s)]_i (n_i(y), e_k)\,d_y\sigma}{|y-x|^{n-1}} + O(1). \quad (2.8)$$

Интеграл $\Phi_j(x)$ рассматривается отдельно, поскольку для него подынтегральная функция не ограничена при $|y-x| \to 0$. Пусть $G_j^{'}$ — произвольное открытое подмножество множества $G_j$ такое, что $\rho(G_j^{'}, \partial G_j) > 0$. Выберем число $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \rho(G_j^{'}, \partial G_j)$, и рассмотрим функции

$$\Phi_{j,\varepsilon}(x) = \int\limits_{G_{j,\varepsilon}} \frac{q(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}},$$

где $G_{j,\varepsilon} = G_j \backslash B(x,\varepsilon)$. Ясно, что при $\epsilon \to 0$ функции $\Phi_{j,\epsilon}(x)$ стремятся к $\Phi_j(x)$ равномерно по $x \in G_j^{'}$. Аналогично [7] составим производную

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi_{j,\varepsilon}(x) = \int\limits_{G_{j,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\right) dy - \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}} s_k\,d_y\sigma. \quad (2.9)$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части (2.9) через $A_{1,\epsilon}(x)$ и $A_{2,\epsilon}(x)$ соответственно. Используя тождество (2.6) и формулу интегрирования по частям, получим

$$A_{1,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\partial G_{j,\varepsilon}} \frac{[q(x,y,s)]_i}{|y-x|^{n-1}} (n_j(y), e_k)\,d_y\sigma + \int\limits_{G_{j,\varepsilon}} \frac{D_k q(x,y,s) + D_{n+k} q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\,dy. \quad (2.10)$$

Ввиду того, что граница множества $G_{j,\varepsilon}$ есть объединение непересекающихся множеств $\partial G_j$ и $\partial B(x,\varepsilon)$, можно записать

$$\int\limits_{\partial G_{j,\varepsilon}} \frac{[q(x,y,s)]_i}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma$$
$$= \int\limits_{\partial G_j} \frac{[q(x,y,s)]_i}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma + \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma. \quad (2.11)$$

Обратим внимание на тот факт, что второй интеграл в правой части (2.11) равен $A_{2,\varepsilon}$ ввиду равенства $(n_j(y),e_k) = s_k$ для $|y-x| = \varepsilon$. Так как в (2.9) такой же интеграл входит со знаком минус, при подстановке (2.11) сначала в (2.10) и далее при использовании полученного равенства в (2.9) интегралы $A_{2,\varepsilon}$ сокращаются. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi_{j,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\partial G_j} \frac{[q(x,y,s)]_j}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma + \int\limits_{G_{j,\varepsilon}} \frac{D_k q(x,y,s) + D_{n+k}q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\,dy. \quad (2.12)$$

Ясно, что второе слагаемое в правой части (2.12) при $\varepsilon \to 0$ стремится к интегралу от той же функции по всему множеству $G_j$ равномерно по $G_j'$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ функции $D_k\Phi_{j,\varepsilon}(x)$ стремятся к конечному пределу равномерно по $x \in G_j'$. Ввиду произвольности $G_j'$ отсюда следует, что для всех $x \in G_j$ верна формула

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Phi_j(x) = \int\limits_{\partial G_j} \frac{[q(x,y,s)]_j}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma + \int\limits_{G_j} \frac{D_k q(x,y,s) + D_{n+k}q(x,y,s)}{|y-x|^{n-1}}\,dy. \quad (2.13)$$

Значит, равенство (2.8) верно также и для $i = j$. Поскольку в правой части (2.8) подынтегральные функции непрерывны и ограничены для любой точки $x \in G_0$ так же, как и слагаемые типа $O(1)$, теорема 2.1 доказана.

Теперь исследуем некоторые свойства поверхностных интегралов типа потенциала. Пусть $\Gamma$ — ограниченная $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{E}^n$ класса $\mathbb{C}^2$, содержащая точку $z$. Обозначим через $P(z)$ плоскость, касательную к $\Gamma$ в точке $z$, а через $n(z)$ — единичный вектор, ортогональный к $P(z)$. Возьмем декартову систему координат в $\mathbb{E}^n$ с центром в точке $z$, у которой первые $n-1$ осей расположены в плоскости $P(z)$, а $n$-я ось направлена вдоль вектора $n(z)$. Координаты точек из $\mathbb{E}^n$ в этой системе будем обозначать через $(\xi,\eta)$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, $\eta \in \mathbb{R}^1$. Предположим, что поверхность $\Gamma$ представляется в виде графика $(\xi,\psi(\xi))$, $|\xi| \le \delta$, где функция $\psi(\xi)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и $\psi(0) = D_k\psi(0) = 0$, $k = 1,\dots,n-1$, $|D_k\psi(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|$, $|\psi(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|^2$.

Пусть $x = z + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \le \tau_0$, $0 < \tau_0 < 1$, причем число $\tau_0$ выбрано достаточно малым, чтобы сфера $\partial B(x,|\tau|)$ имела единственную общую точку $z$ с поверхностью $\Gamma$. Это, в частности, означает, что $|\tau| = \rho(x,\Gamma)$. Рассматривается функция $\lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega$, непрерывная по Липшицу, т. е.

$$|\lambda(\omega) - \lambda(\widetilde{\omega})| \le \mathrm{const}\,|\omega - \widetilde{\omega}|, \quad \omega \in \Omega,\ \widetilde{\omega} \in \Omega. \quad (2.14)$$

Исследуется поверхностный интеграл первого рода

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\lambda(s)}{|y-x|^{n-1}}\,d_y\sigma, \quad s = \frac{y-x}{|y-x|}. \quad (2.15)$$

**Теорема 2.2.** *Для точек $x = x + \tau n(z)$, $0 < |\tau| \le \tau_0$, интеграл $W(x)$ представляется в виде*

$$W(x) = \mu(z)|\ln \rho(x, \Gamma)| + O(1), \tag{2.16}$$

*где*

$$\mu(z) = \int\limits_{\Omega_z} \lambda(\omega)\, d\omega, \quad \Omega_z = \{\omega : \omega \in \Omega, (\omega, n(z)) = 0\},\ n > 2, \tag{2.17}$$

$$\mu(z) = \lambda(\omega_0(z)) + \lambda(-\omega_0(z)), \quad (\omega_0(z), n(z)) = 0,\ n = 2. \tag{2.18}$$

Доказательство. Используя представление поверхности $\Gamma$ в виде графика $(\xi, \varphi(\xi))$, $|\xi| \le \delta$, в интеграле $W(x)$ перейдем от поверхностного интеграла к обычному, т. е.

$$W(x) = \int\limits_{|\xi|\le\delta} \frac{\lambda(s)}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi) - \tau)^2)^{\frac{n-1}{2}}} (1 + (D_1\psi(\xi))^2 + \dots + (D_{n-1}\psi(\xi))^2)^{1/2}\, d\xi,$$

где $s = \frac{y-x}{|y-x|}$, $x = (0, \dots, 0, \tau)$, $y = (\xi, \psi(\xi))$, $s = (\xi, \psi(\xi) - \tau)/\sqrt{|\xi|^2 + (\psi(\xi) - \tau)^2}$.

Представим $W(x)$ в виде суммы $W(x) = W_1(x) + W_2(x)$, где

$$W_1(x) = \int\limits_{|\xi|\le\delta} \frac{\lambda(s)\, d\xi}{(|\xi^2| + (\psi(\xi) - \tau)^2)^{(n-1)/2}},$$

$$W_2(x) = \int\limits_{|\xi|\le\delta} \frac{\lambda(s)}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi) - \tau)^2)^{(n-1)/2}} \times \{(1 + (D_1\psi(\xi))^2 + \dots + (D_{n-1}\psi(\xi))^2)^{1/2} - 1\}\, d\xi.$$

Легко видеть, что

$$(1 + (D_1\psi(\xi))^2 + \dots + (D_{n-1}\psi(\xi))^2)^{1/2} - 1 = \frac{(D_1\psi(\xi))^2 + \dots + (D_{n-1}\psi(\xi))^2}{(1 + (D_1\psi(\xi))^2 + \dots + (D_{n-1}\psi(\xi))^2)^{1/2} + 1}.$$

Так как $|D_k\psi(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|$, $k = 1, \dots, n-1$, правая часть последнего равенства не превосходит $\mathrm{const}\,|\xi|^2$. Отсюда следует, что $|W_2(x)| \le \mathrm{const}$, т. е. $W(x) = W_1(x) + O(1)$. Представим $W_1(x)$ в виде $W_1(x) = W_3(x) + W_4(x)$, где

$$W_3(x) = \int\limits_{|\xi|\le\delta} \frac{\lambda(s)\, d\xi}{(|\xi|^2 + \tau^2)^{(n-1)/2}},$$

$$W_4(x) = \int\limits_{|\xi|\le\delta} \lambda(s) \left\{ \frac{1}{(|\xi|^2 + (\psi(\xi) - \tau)^2)^{(n-1)/2}} - \frac{1}{(|\xi|^2 + \tau^2)^{(n-1)/2}} \right\} d\xi.$$

Согласно соотношению (1.3) из леммы 1.2 выражение в фигурных скобках по модулю не превосходит $\mathrm{const}\,|\xi|^{-(n-1,5)}$, т. е. $|W_4(x)| \le \mathrm{const}$, $W(x) = W_3(x) + O(1)$.

Дальнейшие рассуждения для $n = 2$ и $n > 2$ отличаются друг от друга. Сначала пусть $n > 2$. Для вычисления интеграла $W_3(x)$ произведем замену переменных: $\xi = t\omega$, $0 \le t \le \delta$, $\omega \in \Omega_z$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 0)$, $|\omega| = 1$, $d\xi = t^{n-2}\, dt d\omega$, и получим

$$W_3(x) = \int\limits_{\Omega_z} \int\limits_0^\delta \frac{\lambda(s) t^{n-2}\, dt d\omega}{(t^2+\tau^2)^{(n-1)/2}}.$$

Представим интеграл $W_3(x)$ в виде $W_3(x) = W_5(x) + W_6(x)$, где

$$W_5 = \int\limits_{\Omega_z} \int\limits_0^\delta \frac{\lambda(\omega) t^{n-2}}{(t^2+\tau^2)^{(n-1)/2}}\, dt d\omega, \quad W_6(x) = \int\limits_{\Omega_z} \int\limits_0^\delta \frac{(\lambda(s) - \lambda(\omega)) t^{n-2}}{(t^2+\tau^2)^{(n-1)/2}}\, dt d\omega.$$

Сначала вычислим интеграл $W_5(x)$. Поскольку $\omega$ и $t$ — независимые переменные, $W_5(x)$ равен произведению соответствующих интегралов, т. е.

$$W_5(x) = \int\limits_{\Omega_z} \lambda(\omega)\, d\omega \cdot \int\limits_0^\delta \frac{t^{n-2}}{(t^2+\tau^2)^{(n-1)/2}}\, dt.$$

Отметим, что первый интеграл по $\Omega_z$ и есть функция $\mu(z)$, указанная в теореме (см. 2.17), а интеграл по $t$ есть $I_n$ из леммы 1.3, для которого верно равенство $I_n = |\ln|\tau|| + O(1)$. Следовательно, $W_5(x) = \mu(z) \cdot |\ln|\tau|| + O(1)$.

Для окончания доказательства при $n > 2$ осталось обосновать оценку $|W_6(x)| \le \mathrm{const}$. Используя неравенство (2.14) и оценку (1.4) из леммы 1.2, получаем $|\lambda(s) - \lambda(\omega)| \le \mathrm{const}\, |s - \omega| \le \mathrm{const}((t^2+\tau^2)^{1/4} + |\tau|^{1/2}(t^2+\tau^2)^{-1/4})$. Отсюда следует, что

$$|W_6(x)| \le \mathrm{const} \left( \int\limits_0^\delta t^{n-2}(t^2+\tau^2)^{-(2n-3)/4}\, dt + \int\limits_0^\delta |\tau|^{1/2} t^{n-2} (t^2+\tau^2)^{-(2n-1)/4}\, dt \right).$$

В правой части последнего неравенства подынтегральная функция в первом слагаемом не превосходит $t^{-0,5}$, стало быть, этот интеграл ограничен. Ограниченность второго интеграла следует из леммы 1.3. Значит, $|W_6(x)| \le \mathrm{const}$.

Для $n = 2$ имеем

$$W_3(x) = \int\limits_{|\xi| \le \delta} \frac{\lambda(s)\, d\xi}{(\xi^2+\tau^2)^{0,5}} = \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{\lambda(\omega)\, d\xi}{(\xi^2+\tau^2)^{0,5}} + \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{\lambda(s) - \lambda(\omega)}{(\xi^2+\tau^2)^{0,5}}\, d\xi.$$

Для оценки второго интеграла в правой части используем неравенство $|\lambda(s - \lambda(\omega)| \le \mathrm{const}\, |s - \omega|$, а также оценку (1.4). В результате получим

$$\left| \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{\lambda(s) - \lambda(\omega)}{(\xi^2+\tau^2)^{0,5}}\, d\xi \right| \le \mathrm{const} \left( \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{d\xi}{(\xi^2+\tau^2)^{0,25}} + \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{|\tau|^{0,5} d\xi}{(\xi^2+\tau^2)^{0,75}} \right).$$

Отсюда на основании леммы 1.3 следует

$$W_3(x) = \int\limits_{-\delta}^\delta \frac{\lambda(\omega)\, d\xi}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}} + O(1), \quad \omega = (\xi/|\xi|, 0).$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda(\omega)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}} = \int\limits_{-\delta}^{0} \frac{\lambda(-1,0)}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}}\,d\xi + \int\limits_{0}^{\delta} \frac{\lambda(1,0)}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}}\,d\xi$$

$$= (\lambda(-1,0)+\lambda(1,0)) \int\limits_{0}^{\delta} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\tau^2}}. \quad (2.19)$$

Так как единичный вектор $\omega_0(z)$, ортогональный к $n(z)$, имеет вид $(-1,0)$ или $(1,0)$ в системе координат $(\xi,\eta)$, то $\lambda(-1,0)+\lambda(1,0) = \lambda(\omega_0(z))+\lambda(-\omega_0(z))$. Интеграл по $\xi$ в правой части последнего из равенств (2.19) равен $|\ln|\tau||+O(1)$ в силу леммы 1.3. Следовательно, $W_3(x) = (\lambda(\omega_0(z))+\lambda(-\omega_0(z)))|\ln|\tau||+O(1)$, и поскольку $W(x) = W_3(x)+O(1)$, равенство (2.16) оказывается верным и для случая $n=2$. Теорема 2.2 доказана полностью.

Замечание 2.1. Утверждение теоремы 2.2 можно сделать более компактным, если для случая $n=2$ сферу $\Omega_z$ представлять как совокупность двух точек: $\omega_0(z)$ и $-\omega_0(z)$, а интеграл от $\lambda(\omega)$ по $\Omega_z$ понимать как сумму значений функции $\lambda(\omega)$ в этих точках. Тогда отдельной формулы для $n=2$ не потребуется. Такая трактовка соответствует теории интегрирования по мерам, сосредоточенным в изолированных точках с использованием $\delta$-функции Дирака.

Обращаясь вновь к уравнению (2.3), докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.3.** *Функция $\Phi(x)$, $x \in G_0$, имеет непрерывные частные производные первого порядка, ограниченные на любом непустом множестве $\{x : x \in G_0,\ \rho(x,\partial G_0) > \varepsilon > 0\}$. Для любой контактной точки $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$, $1 \le j,l \le p$, $j \ne l$, и точек $x = z+\tau n_j(z)$, $0 < |\tau| \le \tau_0$ ($\tau_0$ — достаточно малое положительное число), имеет место равенство*

$$|\nabla\Phi(x)| = |M(z)||\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1), \quad (2.20)$$

*где*

$$M(z) = \int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_{j,l}\,d\omega. \quad (2.21)$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1 для частных производных функции $\Phi(x)$ верно представление (2.5), откуда легко следует утверждение теоремы об ограниченности производных на любом непустом множестве $\{x : x \in G_0,\ \rho(x,\partial G_0) > \varepsilon > 0\}$.

Возьмем произвольную контактную точку $z \in \partial G_0$, которая является общей для границ некоторых двух множеств $G_j$, $G_l$, $1 \le j,l \le p$, $j \ne l$, и рассмотрим точки $x = z+\tau n_j(z)$, $0 < |\tau| < \tau_0$, где $\tau_0$ выбрано достаточно малым, чтобы любая сфера $\partial B(x,|\tau|)$ и поверхность $\partial G_0$ имели единственную общую точку $z$. Используем представление (2.5) и заметим, что в его правой части все слагаемые, кроме $i=j$, $i=l$, являются ограниченными функциями, поскольку для них выполнено неравенство $|y-x| \ge \mathrm{const}$. Поэтому можно записать

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\partial G_j} \frac{[q(x,y,s)]_j}{|y-x|^{n-1}}(n_j(y),e_k)\,d_y\sigma + \int\limits_{\partial G_l} \frac{[q(x,y,s)]_l}{|y-x|^{n-1}}(n_l(y),e_k)\,d_y\sigma + O(1). \quad (2.22)$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части (2.22) через $V_j(x)$ и $V_l(x)$ соответственно и отметим, что они отличаются друг от друга только нумерацией. Для определенности рассмотрим первый из них. Возьмем цилиндр $C_\delta(z)$, описанный в разд. 1, и рассмотрим пересечение $C_\delta(z) \cap \partial G_j = C_\delta(z) \cap \partial G_l = \partial G_{j,z}$. Вследствие неравенства $|y-x| \ge \delta$, $y \in \partial G_j \backslash \partial G_{j,z}$, для $V_j(x)$ справедливо представление

$$V_j = \int\limits_{\partial G_{j,z}} \frac{[q(x,y,s)]_j}{|y-x|^{n-1}} (n_j(y), e_k)\, d_y\sigma + O(1). \tag{2.23}$$

Используем неравенства $|x-z| \le |y-x|$, $y \in \partial G_{j,z}$, $|y-z| \le |y-x| + |x-z| = 2|y-x|$; $|n_j(y) - n_j(z)| \le \operatorname{const}|y-z| \le \operatorname{const}|y-x|$. Прибавляя и отнимая соответствующие слагаемые под знаком интеграла в (2.23), получим

$$V_j(x) = \int\limits_{\partial G_{j,z}} \frac{[q(z,z,s)]_j}{|y-x|^{n-1}} (n_j(z), e_k)\, d_y\sigma + O(1). \tag{2.24}$$

К интегралу в правой части (2.24) применима теорема 2.2, если положить $\Gamma = \partial G_{j,z}$, $\lambda(s) = [q(z,z,s)]_j \cdot (n_j(z), e_k)$. Следовательно,

$$V_j(x) = \mu_j(z)|\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1), \quad \mu_j(z) = (n_j(z), e_k)\int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_j\, d\omega.$$

Такие же выводы справедливы и для интеграла $V_l(z)$. Поэтому

$$V_l = \mu_l(z)|\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1), \quad \mu_l(z) = (n_l(z), e_k)\int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_l\, d\omega.$$

Так как $n_l(z) = -n_j(z)$, $[q(z,z,\omega)]_j - [q(z,z,\omega)]_l = [q(z,z,\omega)]_{j,l}$, имеем

$$V_j(x) + V_l(x) = \mu_{j,l}(z)|\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1),\ \mu_{j,l}(z) = (n_j(z), e_k)\int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_{j,l}\, d\omega.$$

Следовательно, для градиента функции $\Phi(x)$ верна формула

$$\nabla\Phi(x) = ((n_j(z), e_1), \dots, (n_j(z), e_n))\int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_{j,l}\, d\omega |\ln\rho(x,\partial G_0)| + O(1). \tag{2.25}$$

Вектор-функции, являющиеся первым и вторым слагаемыми в правой части (2.25), обозначим через $A(x)$ и $B(x)$ соответственно, т. е. $\nabla\Phi(x) = A(x) + B(x)$, где $B(x) = O(1)$. Из тождества $|A(x)+B(x)| = |A(x)| + |A(x)+B(x)| - |A(x)|$, а также из неравенства треугольника $|A(x)+B(x)| - |A(x)| \le |B(x)|$ следует, что $|A(x)+B(x)| = |A(x)| + O(1)$. Так как $|A(x)| = |\int\limits_{\Omega_z} [q(z,z,\omega)]_{j,l}\, d\omega| \cdot |\ln\rho(x,\partial G_0)|$, теорема 2.3 доказана.

**Следствие 2.1.** *Для точек $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < |\tau| \le \tau_0$, указанных в теореме* 2.3, *модуль градиента функции $\Phi(x)$ стремится к бесконечности при $x \to z$, если*

$$M(z) \ne 0. \tag{2.26}$$

Для формулировки теоремы единственности решения задачи о неизвестной границе введем следующие обозначения. Пусть имеются по две системы множеств $\{G_j^k\}$, операторов $A_i^k$ и функций $g_i^k(x,y,\omega)$, $k=1,2$, $j=1,\dots,p_k$, $i=1,\dots,m_k$, причем для них выполнены условия, сформулированные в начале этой статьи относительно $\{G_j\}$, $A_i$ и $g_i(x,y,\omega)$ соответственно. Подставляя в равенство (1.1) $A_i^k$ на место $A_i$ и $g_i^k$ на место $g_i$, получим в левой части функции $H^k(x,\omega)$, $k=1,2$. Таким же образом из (2.21) получаем $M^k(z)$, $k=1,2$.

**Теорема 2.4.** *Пусть для каждой контактной точки $z\in\partial G_0^k$, $z\in\partial G_j^k\cap\partial G_l^k$, $1\le j,l\le p_k$, $k=1,2$, выполняется условие* (2.26), *т. е.*

$$M^k(z)\neq 0, \tag{2.27}$$

*и функции $H^1(x,\omega)$, $H^2(x,\omega)$ совпадают при всех $(x,\omega)\in G\times\Omega$. Тогда совпадают и поверхности $\partial G_0^k$, т. е. $\partial G_0^1=\partial G_0^2$.*

Доказательство. Пусть $\beta(x,\omega)$ — весовая функция, указанная в начале этого раздела. Умножая уравнение (1.1) для функций $g_i^k$, $k=1,2$, на $\beta(x,\omega)$, получим функции $\beta(x,\omega)H^k(\omega)$ и далее действиями, описанными в начале разд. 2, получаем из (2.3), (2.4) функции $Q^k(x)$ и $\Phi^k(x)$, $k=1,2$. По условию этой теоремы $Q^1(x)\equiv Q^2(x)$, $\Phi^1(x)\equiv\Phi^2(x)$.

Отметим, что часть поверхностей $\partial G_0^1$ и $\partial G_0^2$, а именно поверхность $\partial G$, одна и та же. Поэтому остается доказать совпадение $\partial G_0^1\backslash\partial G$ и $\partial G_0^2\backslash\partial G$. Возьмем произвольную контактную точку $\partial G_0^1\backslash\partial G$ и предположим противное, т. е. $z$ не принадлежит $\partial G_0^2\cap\partial G$. Тогда существует шар $B(z,\varepsilon)$, не содержащий точек из $\partial G_0^2$. Точка $z$ принадлежит пересечению $\partial G_j^1\cap\partial G_l^1$ при некоторых $j,l$, $1\le j,l\le p_1$, $j\neq l$. Рассмотрим точки $x=z+\tau n_j(z)$, описанные в теореме 2.3, $0<\tau\le\tau_0$, $\tau_0<\varepsilon$. Используя следствие 2.1 для функции $\Phi^1(x)$ и учитывая условие $M^1(z)\neq 0$, получаем $|\nabla\Phi^1(x)|\to\infty$ при $x\to z$ $(\tau\to 0)$. С другой стороны, согласно теореме 2.3 функция $|\nabla\Phi^2(x)|$ ограничена для таких $x$, поскольку $\rho\big(x,\partial G_0^2\big)>\varepsilon$. Следовательно, функции $\Phi^1(x)$ и $\Phi^2(x)$ не могут совпадать, а это противоречит условию теоремы. Значит, все контактные точки $z$ из $\partial G_0^1\backslash\partial G$ принадлежат $\partial G_0^2\backslash\partial G$. По симметрии рассуждений и все контактные точки из $\partial G_0^2\backslash\partial G$ принадлежат $\partial G_0^1\backslash\partial G$. Иначе говоря, множества контактных точек из $\partial G_0^1\backslash\partial G$ и $\partial G_0^2\backslash\partial G$ совпадают. Отсюда в силу плотности множества контактных точек в $\partial G_0^k\backslash\partial G$ следует совпадение $\partial G_0^1\backslash\partial G$ и $\partial G_0^2\backslash\partial G$, т. е. $\partial G_0^1=\partial G_0^2$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Условие $M(z)\neq 0$ для случая, когда $\beta(x,\omega)>0$ и когда в (1.1) интегрирование происходит по единственной прямой ($m=1$), означает, что поверхность $\partial G_0\backslash\partial G$ разрыва подынтегральной функции $g_1(x,y,\omega)$ действительно существует. Иначе говоря, наличие условия (2.26) обеспечивает существование искомого объекта, без чего задача о неизвестной границе теряла бы смысл. Если $m\ge 2$, то интерпретация условия (2.26) становится более сложной. В таком случае подынтегральное выражение в (2.21) имеет вид

$$\begin{aligned}&[q(z,z,\omega)]_{j,l}\\ &=\sum_{i=1}^{m}\Big(\beta\big(z,A_i^{-1}\omega\big)\big[g_i\big(z,z,A_i^{-1}\omega\big)\big]_{j,l}+\beta\big(z,-A_i^{-1}\omega\big)\big[g_i\big(z,z,-A_i^{-1}\omega\big)\big]_{j,l}\Big).\end{aligned} \tag{2.28}$$

При положительной функции $\beta(x,\omega)$, чтобы гарантировать условие (2.26), достаточно потребовать выполнения неравенств $[g_i(z,z,\omega)]_{j,l}\le 0$ или $[g_i(z,z,\omega)]_{j,l}\ge 0$, $\omega\in\Omega$, для всех $i$, где $1\le i\le m$, и хотя бы для одного номера $i$ выполняющееся неравенство является строгим. Эти условия можно понимать так, что в любой контактной точке $z$ разрыв хотя бы одной из функций $g_i$, $i = 1, \dots, m$, действительно существует, а возможные разрывы других функций $g_i$ этот разрыв не компенсируют.

Вообще, можно надеяться, что условие $M(z) \neq 0$ не будет серьезным препятствием для применения полученных результатов. По крайней мере отрицание этого условия, т. е. равенство $M(z) = 0$, в случае существования искомой поверхности разрывов означает наличие специфических связей между параметрами задачи и вряд ли будет выполняться в широком классе различных случаев.

Замечание 2.3. Весовая функция $\beta(x, \omega)$ играет роль резерва, и ее выбор можно использовать для усовершенствования условия (2.26) или улучшения алгоритма решения задачи о неизвестной границе. Так, в частности, если искать поверхность $\partial G_0$ по аномально большим значениям величины $|\nabla\Phi(x)|$, то полезно выбрать функцию $\beta(x, \omega)$, удовлетворяющую условию: $\beta(x, \omega) \to 0$ при $\rho(x, \partial G) \to 0$. Такая весовая функция может служить своеобразным фильтром, уменьшая значения $|\nabla\Phi(x)|$ вблизи поверхности $\partial G$, которая и так известна из постановки задачи.

Замечание 2.4. Как можно видеть из формулировок теорем, исследование особенности величины $|\nabla\Phi(x)|$ происходит вблизи любой контактной точки $z$, т. е. имеет локальный характер. Это обстоятельство можно использовать для поиска только части искомой поверхности при одновременном задании соответствующей части известных данных. В частности, легко видеть, что результаты настоящей работы применимы для поиска любого сечения $\partial G_0$ гиперплоскостью по данным $H(x, \omega)$ при $x$, принадлежащих этому же сечению, и векторов $\omega$, компланарных гиперплоскости. Эта возможность понижения размерности задачи является полезным свойством для потенциального применения полученных результатов.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Аниконов Д. С.* Задача типа Стефана для уравнения переноса // Докл. РАН. 1994. Т. 338, № 1. С. 25–28.
2. *Аниконов Д. С.* Специальная задача интегральной геометрии // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 1. С. 7–9.
3. *Аниконов Д. С.* Индикатор контактных границ для одной задачи интегральной геометрии // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. С. 739–755.
4. *Аниконов Д. С.* Задача о неизвестной границе для сингулярного интегрального уравнения // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 439–442.
5. *Аниконов Д. С.* Метод исследования сингулярных интегральных уравнений // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 961–973.
6. *Коновалова Д. С.* Поэтапное решение обратной задачи для уравнения переноса применительно к задаче томографии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 189–199.
7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.


*Статья поступила 26 августа 2010 г.*

Аниконов Дмитрий Сергеевич, Коновалова Дина Сергеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru, dsk@math.nsc.ru