Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 512.94.3+51–72

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СИММЕТРИЙ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ТРЕХМЕРНЫХ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

В. А. Артамонов, С. Санчес

Аннотация. Дается полное описание конечных групп симметрий модели среза и проекции для трехмерных квазикристаллов в предположении, что фазовое пространство имеет размерности не выше 3.

Ключевые слова: кристаллографическая группа, квазикристалл, группа симметрий, модель среза и проекции.

Введение

Существуют разные математические модели квазикристаллов и разные подходы к определению их групп симметрий (пространственных групп) [1; 2, гл. 6; 3–6]. В [7, 8] описаны группы симметрий трехмерных квазикристаллов, связанных с квазирешеткой. Эти группы являются подгруппами группы движений трехмерных евклидовых пространств, для которых квазирешетка инвариантна относительно заданной конечной группы G ортогональных линейных операторов. При этом накладывается ограничение на квазирешетку. Требуется наличие единственной оси, поворот вокруг которой как элемент из G имеет наибольший порядок. Вся группа симметрий является расширением аддитивной группы квазирешетки с помощью группы G.

В [9] предложен новый подход к определению групп симметрий модели среза и проекции для квазикристаллов. Возникают два класса групп: общая группа и ее собственная подгруппа, связанная с выбором окна. Обе группы состоят из аффинных преобразований гиперпространства из определения модели. Показано, что группы симметрий других моделей квазикристаллов являются подгруппами общей группы. В частности, это относится к группам из [10], где показано, что точечные группы симметрий, являющиеся фактор-группами общей группы по подгруппе сдвигов, могут иметь элементы бесконечного порядка. Примером элемента бесконечного порядка является поворот на угол $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Как показано в [9], каждая конечная подгруппа группы симметрий вкладывается в собственную группу симметрий и является подгруппой точечной группы. Не накладывая искусственных ограничений на решетку, в отличие от [7, 8] удается расширить список конечных групп симметрий, добавив, например, прямые произведения некоторых групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00058).

В данной работе мы классифицируем группы с точностью до изоморфизма. Обычно в таблицах [11] приводятся классификации трехмерных представлений групп с точностью до ортогональной эквивалентности.

Как правило, фазовое пространство в рассматриваемой модели является двойственным пространством. Поэтому в работе за основу взяты трехмерное вещественное физическое и фазовое пространства.

1. Модель среза и проекции

Пусть V, U — конечномерные вещественные пространства, $E = U \oplus V$, причем $\dim U = d$ и $\dim E = n$. Предположим, что M — дискретная аддитивная подгруппа в E и фактор-группа E/M компактна. Пространство U называется *физическим*, пространство E — *гиперпространством*, а пространство V — *фазовым*. Имеется диаграмма проекций и вложений аддитивных абелевых групп:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ U & M & V \end{tikzcd}$$

При этом предполагается, что $\pi\,|_M$ инъективно, а образ $\rho(M)$ плотен в V.

Окном W называется непустое компактное выпуклое подмножество $W \subset V$, являющееся замыканием своей внутренности [5]. Как отмечено в [9], множество $\rho(M)$ плотно в V, а множество $\rho(M) \cap W$ плотно в W. Кроме того, существуют такие точка $A \in M$ и базис $e_1, \ldots, e_n$ решетки M как аддитивной абелевой группы, что образ куба

$$K = \{A + \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n \mid 0 \leq \mu_i \leq 1\} \tag{1}$$

при проекции ρ содержится в окне W. В частности, пространство V является линейной оболочкой $\rho(e_1), \ldots, \rho(e_n)$.

Положим $Q = \rho^{-1}(W) \cap M$. Множество $\pi(Q)$ называется *моделью среза и проекции для квазикристалла*, расположенного в физическом пространстве U. Поскольку проекция π отображает Q в U инъективно, можно отождествить Q и $\pi(Q)$.

2. Группы симметрий

В [9] введены две группы симметрий Q. Собственная группа $\mathrm{Sym}_W(Q)$ состоит из всех аффинных преобразований пространства E, отображающих Q биективно на себя. Общая группа симметрий Sym состоит из всех аффинных преобразований Φ пространства E, удовлетворяющих следующим ограничениям:

(1) физическое пространство U инвариантно относительно дифференциала $d\Phi$ отображения Φ;

(2) решетка M инвариантна относительно преобразования Φ.

Напомним, что аффинное преобразование Φ имеет вид

$$\Phi(x) = (d\Phi)(x) + b, \quad x \in E.$$

Дифференциал $d\Phi$ является обратимым линейным оператором в пространстве E. При этом $b = \Phi(O) \in E$. Все аффинные преобразования образуют группу $\mathrm{Aff}\, E$ относительно операции умножения преобразований.

Отображение $\Phi \mapsto d\Phi$ является гомоморфизмом группы Sym в группу $\mathrm{GL}(E)$ обратимых линейных операторов в пространстве E.

Как показано в [9, 2], группа $\mathrm{Sym}_W Q$ является подгруппой в Sym. Если G — конечная подгруппа в Sym, то можно выбрать начало координат O в пространстве E так, что точка O неподвижна при действии группы G. Это означает, что G является конечной группой линейных операторов в пространстве E, причем решетка M и подпространство U инвариантны относительно G. Используя стандартные соображения из теории представлений групп, можно считать, что G является конечной группой ортогональных линейных операторов. Таким образом, как отмечено в [12], группа G представима в некотором базисе E блочно-диагональными матрицами

$$g = \begin{pmatrix} A'_g & 0 \\ 0 & A''_g \end{pmatrix}, \quad g \in G, \tag{2}$$

где $A'_g \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$, $A''_g \in \mathrm{O}(n-d, \mathbb{R})$. При этом существует такая обратимая матрица $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, что $C^{-1}GC \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Это означает, что группа G допускает целочисленное представление степени n.

Целью настоящей работы является классификация с точностью до изоморфизма групп G с отмеченными выше свойствами при условии $d = 2, 3$ и n произвольно. Мы отождествляем изоморфные группы, как это представлено в [13, гл. II, § 3].

Все ортогональные матрицы A'_g из (2) имеют размер 2 или 3. Если одна из них лежит в $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, то она соответствует оператору поворота на некоторый угол α. При этом след матрицы равен $2\cos\alpha$ в случае размера 2 и $1 + 2\cos\alpha$ в случае размера 3. Поэтому можно считать, что в подходящем ортонормированном базисе матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Если матрица A'_g лежит в $\mathrm{O}(2, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, то она имеет порядок 2 и потому сопряжена в $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пусть либо A'_g, либо A''_g лежит в $\mathrm{O}(3, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Тогда такая матрица сопряжена в $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

и ее след равен $-1 + 2\cos\alpha$.

Отметим весьма полезное свойство матриц (3)–(5), которое непосредственно вытекает из их вида.

Предложение 2.1. *Пусть порядок матрицы из* (3) *равен* q. *Тогда примитивный корень из* 1 *степени* q *является собственным значением этой матрицы.*

Пусть порядок матрицы из (5) *равен* $2^l k$, *где* k *нечетно. При* $l > 1$ *примитивный корень из* 1 *степени* $2^l k$ *является собственным значением матрицы* (3).

При $l = 1$ некоторый примитивный корень из 1 степени k является собственным значением матрицы (3).

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Через $\langle a \rangle_k = C_k$ будет обозначаться циклическая группа порядка k с порождающим элементом a. Через $D_k = \langle a, b \rangle$ обозначается группа диэдра порядка $2k$ со стандартными порождающим a, b и с определяющими соотношениями $a^k = b^2 = (ab)^2 = 1$.

Случай $d = 2$, $n = 4$ разобран в [12], где найдены новые конечные группы симметрий, не являющиеся группами симметрий кристаллов. Именно, доказана

Теорема 2.1 [12]. *Пусть G — конечная подгруппа в* $\operatorname{Sym} Q$, *причем* $\dim U = 2 = \dim V$. *Тогда G — подпрямое произведение следующих групп:*

(a) *две циклические группы* $\langle a_1 \rangle_{k_1} \times \langle a_2 \rangle_{k_2}$,

(b) *циклическая и диэдральная группы* $\langle a_1 \rangle_{k_1} \times D_{k_2}$,

(c) *две группы диэдра* $D_{k_1} \times D_{k_2}$.

Натуральные числа k_1, k_2 удовлетворяют одному из условий:

(1) k_1, k_2 *равны*

$$1, 2, 3, 4, 6, \tag{6}$$

(2) k_1, k_2 *равны либо* 5, *либо* 10,

(3) $k_1 = k_2 = 12$,

(4) $k_1 = k_2 = 8$.

3. Общий подход

Пусть G — конечная группа симметрий с представлением (2). Обозначим через G_1 множество матриц вида $A'_g \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$, а через G_2 — множество матриц $A''_g \in \mathrm{O}(n-d, \mathbb{R})$. Пусть $\nu_i : G \to G_i$ — гомоморфизм групп, переводящий $g \in G$ в $A^{(i)}_g \in G_i$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности можно считать, что отображения ν_i сюръективны. Это означает, что G является подпрямым произведением G_1 и G_2.

Если обе группы G_1, G_2 допускают целочисленное представление, то $G_1 \times G_2$ — подгруппа в Sym. При этом обе группы G_1, G_2 являются известными точечными группами кристаллов соответствующих размеров. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что по крайней мере одна из групп G_1, G_2 не имеет целочисленного представления.

В рассматриваемом случае $d = 2, 3$ и обе группы G_1, G_2 являются конечными подгруппами в $\mathrm{O}(s, \mathbb{R})$ для соответствующего s. Классификация этих групп при $s = 2, 3$ известна.

Теорема 3.1 [14, § 13]. *Пусть H — конечная подгруппа в группе* $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$. *Если $H \subset \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, то $H = C_k$ — циклическая группа порядка k. Если $H \not\subseteq \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, то H является группой диэдра D_k для некоторого k. В обоих случаях G имеет целочисленное представление степени 2 в том и только в том случае, если k — одно из чисел* (6).

Теорема 3.2 [14, § 13]. *Предположим, что H является конечной подгруппой в группе* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. *Тогда H — одна из следующих групп:*

(1) *циклическая группа C_k порядка k,*

(2) *группа диэдра D_k,*

(3) *группа T вращений тетраэдра, $T \simeq A_4$,*

(4) *группа* O *вращений октаэдра,* $\mathrm{O} \simeq S_4$,

(5) *группа I вращений икосаэдра, $I \simeq A_5$.*

Группы вида (1), (2) *допускают целочисленное представление степени* 3 *в том и только в том случае, если выполнено условие* (6). *Группы* (3)–(5) *обладают целочисленным представлением степени* 3.

Напомним обозначения для ряда групп симметрий. Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ и $G_0 = G \cap \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ — ее подгруппа индекса 2. Тогда G является объединением двух смежных классов $G = G_0 \cup aG_0$. Обозначим через j центральную симметрию из $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$, т. е. $j(x) = -x$ для любого вектора x. Через GG_0 обозначается подгруппа $G_0 \cup jaG_0$ в $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$. Другими словами, GG_0 — подгруппа $G \times \langle j \rangle_2$, порождаемая нормальной подгруппой G_0 индекса 2 и элементом ja.

Теорема 3.3 [14, § 13]. *Пусть H — конечная подгруппа в $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$, не лежащая в $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Тогда H — одна из следующих групп:*
(1) *прямое произведение* $\langle a \rangle_k \times \langle j \rangle_2$,
(2) *прямое произведение* $D_k \times \langle j \rangle_2$,
(3) *прямое произведение* $T \times \langle j \rangle_2$,
(4) *прямое произведение* $\mathrm{O} \times \langle j \rangle_2$,
(5) *прямое произведение* $I \times \langle j \rangle_2$,
(6) $\langle a \rangle_{2k} \langle a \rangle_k \simeq \langle a \rangle_{2k}$,
(7) $D_{2k} D_k \simeq D_{2k}$,
(8) $D_k \langle a \rangle_k \simeq D_k$,
(9) $\mathrm{O}T$.
Группы (1), (2), (6)–(8) *обладают целочисленным представлением степени* 3 *в том и только в том случае, если выполнено условие* (6). *Группы* (3)–(5), (9) *обладают целочисленным представлением степени* 3.

Предложение 3.1. *Предположим, что группа G, как и выше, является подпрямым произведением групп G_1, G_2, причем группа G_2 допускает целочисленное представление степени, равной размеру ее матриц. Тогда и группы G_1, $G = G_1 \times G_2$ обладают этим же свойством. Таким образом, в качестве G можно взять $G = G_1 \times G_2$.*

Доказательство. Предположим, например, что G_2 допускает указанное представление. Пусть $g_1 \in G_1$. Тогда существует такой элемент $g_2 \in G_2$, что $g = g_1 g_2 \in G$. Рассматривая матричное представление (2), получаем, что след матрицы $g_1 \in G_1$ — целое число.

С другой стороны, в силу теорем 3.1–3.3 группа G_1 является одной из групп:

$$T,\ \mathrm{O},\ I,\ \mathrm{O}T,\ T \times \langle j \rangle_2,\ \mathrm{O} \times \langle j \rangle_2,\ I \times \langle j \rangle_2,\ \langle a \rangle_k,\ D_k,\ \langle a \rangle_k \times \langle j \rangle_2,\ D_k \times \langle j \rangle_2,\ \langle a \rangle_{2k},$$

причем выполнено условие (6).

Таблица 1

группы	$\langle a \rangle_k$	D_k	$\langle a \rangle_k \times \langle j \rangle_2$	$D_k \times \langle j \rangle_2$	$\langle a \rangle_{2k}$	D_{2k}
порядки	k	$2k$	$2k$	$4k$	$2k$	$4k$

Если группа G_1 не из этого списка, то G_1 является одной из групп в табл. 1, причем либо $k = 5$, либо $k \geq 7$. Беря $g_1 = a$, где a — поворот $\mathbb{R}^3$ на угол $\frac{2\pi l}{k}$, с взаимно простыми числами l, k, получаем противоречие с целочисленностью следа матрицы. □

Следствие 3.1. *Если* $\dim U = \dim V = 3$ *и группа* G_2 *допускает целочисленное представление размерности* 3, *то и* G_1 *обладает этим свойством. Поэтому в качестве* G *можно взять* $G = G_1 \times G_2$.

Положим $H_i = G \cap G_i$, $i = 1, 2$. Заметим, что H_1, H_2 — нормальные подгруппы в G, поскольку $H_1 = G \cap \ker \nu_2$, $H_2 = G \cap \ker \nu_1$.

Предложение 3.2. *Пусть* $(g_1, g_2) \in G$, *где* $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$. *Если* $g_i' \in G_i$, *то* $(g_1, g_2'), (g_1', g_2) \in G$ *в том и только в том случае, если* $g_i' = g_i h_i$ *для некоторых элементов* $h_i \in H_i$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $(g_1, g_2') \in G$ в том и только в том случае, если $(g_1, g_2)^{-1}(g_1, g_2') = \left(1, g_2^{-1} g_2'\right) \in G$ или $g_2^{-1} g_2' \in G \cap G_2 = H_2$. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть* $g = (g_1, g_2) \in G$, *где* $g_i \in G_i$. *Отображения* $\zeta_i : G/(H_1 \times H_2) \to G_i/H_i$, *при которых* $g(H_1 \times H_2) \in G/(H_1 \times H_2)$ *переходит в* $g_i H_i \in G_i/H_i$, *является изоморфизмом групп* $G/(H_1 \times H_2) \simeq G_i/H_i$. *В частности,* $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$, *и* G *является расширением* $H_1 \times H_2$ *с помощью группы* $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

Доказательство. По предложению 3.2 элемент $g = (g_1, g_2)$ принадлежит G в том и только в том случае, если $(g_1 H_1, g_2 H_2) \subset G$. Каждая проекция $\nu_i : G \to G_i$ сюръективна. Отсюда следует, что отображение ζ_i определено корректно и является изоморфизмом групп. $\square$

Для любого натурального числа d через $\pi(d)$ обозначим множество всех простых делителей числа d. Если π — фиксированное множество простых чисел, то через π' обозначается множество всех простых чисел, не входящих в π. Любое натуральное число d однозначно представляется в виде $d = d_1 d_2$, где $\pi(d_1) \subseteq \pi$ и $\pi(d_2) \subseteq \pi'$.

Если d — число, то положим

$$\hat{d} = \begin{cases} \frac{d}{2}, & \text{если } d \text{ четно и } \frac{d}{2} \text{ нечетно,} \\ d & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что $\phi(d) = \phi(\hat{d})$, где ϕ — функция Эйлера.

Через $|g|$ обозначается порядок элемента g из группы.

Пусть $g \in G$ и $g = g_1 g_2$, где $g_i \in G_i$, и $\pi = \pi(|g_1|) \cap \pi(|g_2|)$. Тогда имеется прямое разложение

$$\langle g \rangle = \langle g_\pi \rangle \times \prod_{p \in \pi'} \langle g_{p,j} \rangle_{p^j},$$

где $\langle g_\pi \rangle$ — циклическая группа, $\pi(g_\pi) = \pi$, а $\langle g_{p,j} \rangle_{p^j}$ — циклическая группа порядка p^j, где $p \notin \pi(g_1)$.

Предложение 3.4. *Справедливо включение*

$$\prod_{p \in \pi'} \langle g_{p,j} \rangle_{p^j} \subseteq H_1 \times H_2.$$

Доказательство. Пусть у элемента $g_{p,j}$ число p принадлежит $\pi(g_1)$. Тогда при проекции $\nu_1 : G \to G_1$ получаем, что образ $g_{p,j}$ равен 1. Это означает, что $g_{p,j} \in H_2$. $\square$

В силу предложений 3.2–3.4 доказано

Предложение 3.5. *Пусть $g \in G$ и $g = g_1 g_2$, $g_i \in G_i$. Тогда существуют такие элементы $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, что $\pi(g_1 h_1) = \pi(g_2 h_2) = \pi = \pi(g_1) \cap \pi(g_2)$.*

Теорема 3.4. *Пусть $g \in G$ и $g = g_1 g_2$, где $g_i \in G_i$. Положим $q = \widehat{|g_1|}$, $l = \widehat{|g_2|}$ в соответствии с (7). Предположим, что $\pi(q) = \pi(l)$ и q, l либо равны 5, либо больше 6. Если d — наибольший общий делитель q, l, то либо $\frac{l}{d} \leq 2$, либо $\frac{q}{d} \leq 2$. При этом $\phi(q) = \phi(|g_1|) < \dim E = n$, где ϕ — функция Эйлера. Если $q \neq l$, то $\phi(|g_1|) + \phi(|g_2|) < \dim E = n$.*

Доказательство. Нам потребуются две леммы. Следующий факт хорошо известен. Приведем для полноты изложения его доказательство. Отметим, что если натуральное число m не меньше 3, то $\phi(m)$ четно.

Лемма 1. *Для натурального числа t следующие условия эквивалентны: (1) $\phi(t) \leq 2$; (2) $t = 1, \dots, 4, 6$.*

Доказательство. Из условия (2) вытекает (1). Предположим, что выполнено условие (1). Пусть p^l, $l \geq 1$, — наибольшая степень простого числа p, делящая t. Тогда $\phi(t)$ делится на $p^{l-1}(p-1)$. Поэтому $p = 2, 3$. Если $p = 3$, то $l = 0, 1$. Если $p = 2$, то $l = 0, 1, 2$. Отсюда вытекает (2). $\square$

Лемма 2. *Пусть ζ — первообразный корень степени k из 1. Тогда $\mathbb{Z}[\zeta+\zeta^{-1}]$ — аддитивная свободная абелева группа с базисом*

$$1, \quad \zeta^l + \zeta^{-l}, \quad 1 \leq l \leq \frac{\phi(k)}{2} - 1, \tag{8}$$

Доказательство. Из равенства

$$(\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^M + \zeta^{-M}) = (\zeta^{M+1} + \zeta^{-M-1}) + (\zeta^{M-1} + \zeta^{-M+1})$$

следует, что $\mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]$ как аддитивная абелева группа порождается элементами 1 и $\zeta^l + \zeta^{-l}$ для всех натуральных чисел l.

Рассмотрим циклотомический многочлен

$$\Phi_k(t) = a_\phi(k) t^{\phi(k)} + \dots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_{\phi(k)} = 1.$$

Его корнями являются ζ, ζ^{-1}. Поэтому $a_l = a_{\phi(k)-l}$ для всех l. Деля равенство $\Phi_k(\zeta) = 0$ на $\zeta^{\frac{\phi(k)}{2}}$, получаем

$$\zeta^{\frac{\phi(k)}{2}} + \zeta^{\frac{\phi(k)}{2}} + \sum_{l=1}^{\frac{\phi(k)}{2}-1} a_l(\zeta^l + \zeta^{-l}) = 0.$$

Поэтому элементы (8) порождают $\mathbb{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]$ как аддитивную абелеву группу.

Независимость элементов (8) над $\mathbb{Z}$ вытекает из независимости над $\mathbb{Z}$ элементов $1, \zeta, \dots, \zeta^{\phi(k)-1}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть m — наименьшее общее кратное чисел q, l и $\pi(q) = \pi(l)$, $d = \text{НОД}(q, l)$. Справедливо равенство $\phi(m) = \frac{l}{d}\phi(q) = \frac{q}{d}\phi(l)$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(q)$ и

$$q = \prod_{p_i \in \pi} p_i^{t_i}, \quad l = \prod_{p_i \in \pi} p_i^{s_i}, \quad t_i, s_i \geq 1.$$

Тогда

$$m = \prod_{p_i \in \pi} p_i^{\max(t_i, s_i)}, \quad d = \prod_{p_i \in \pi} p_i^{\min(t_i, s_i)}, \tag{9}$$

причем

$$\phi(m) = \prod_{p_i\in\pi} p_i^{\max(t_i,s_i)-1}(p_i-1)$$

$$= \prod_{p_i\in\pi} p_i^{s_i}\cdot \prod_{p_i\in\pi} p_i^{-\min(t_i,s_i)}\cdot \prod_{p_i\in\pi} p_i^{t_i-1}(p_i-1) = \frac{l}{d}\phi(q),$$

поскольку $\max(t_i,s_i) = s_i + t_i - \min(t_i,s_i)$.

Аналогично $\phi(m) = \frac{q}{d}\phi(l)$. $\square$

Лемма 4. *Если* $\frac{l}{d}, \frac{q}{d} > 2$ *в условии леммы* 3, *то*

$$\frac{l}{d}, \frac{q}{d} < \frac{\phi(m)}{2} - 1. \tag{10}$$

Доказательство. По лемме 1 в силу ограничения на q получаем $\phi(q) \geq 3$. Отсюда

$$\frac{l}{d} < -1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{l}{d} \leq -1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{d}\cdot\phi(q).$$

Случай $\frac{q}{d}$ аналогичен. $\square$

Лемма 5. *Если натуральное число* r *меньше* $\frac{\phi(l)}{2} - 1$, *то* $\frac{qr}{d} < \frac{\phi(m)}{2} - 1$.

Доказательство. По лемме 3 неравенство из условия (10) имеет вид

$$\frac{qr}{d} < \frac{q}{d}\cdot\left(\frac{\phi(l)}{2} - 1\right) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{d}\cdot\phi(l) - \frac{q}{d} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{d}\cdot\phi(l) - 1 = \frac{\phi(m)}{2} - 1. \quad \square$$

Теперь закончим доказательство теоремы 3.4. Допустим противное: пусть $\frac{q}{d}, \frac{l}{d} > 2$. Заметим, что если $|g_1| = 2q$, где q нечетно, и ζ — первообразный корень из 1 степени q, то $-\zeta$ — первообразный корень из 1 степени $2q = |g_1|$.

Пусть, как и выше, m — наименьшее общее кратное q и l, а ξ — первообразный комплексный корень из 1 степени m. По (3), (5) и предложению 2.1 можно считать, что собственные значения g_1 равны $\pm 1, \pm\xi^{\frac{l}{d}}, \pm\xi^{-\frac{l}{d}}$, а собственные значения g_2 равны $\xi^{\frac{qr}{d}}, \xi^{-\frac{qr}{d}}$.

Таким образом, вычисляя след матрицы g, получаем, что

$$\pm 1 \pm (\xi^{\frac{l}{d}} + \xi^{-\frac{l}{d}}) \in \mathbb{Z}[\xi^{\frac{q}{d}}].$$

Поскольку число $\xi^{\frac{l}{d}} + \xi^{-\frac{l}{d}}$ из $\mathbb{R}\cap\mathbb{Z}[\xi^{\frac{q}{d}}]$ инвариантно относительно автоморфизма $\xi \mapsto \xi^{-1}$ кольца $\mathbb{Z}[\xi]$, то $\xi^{\frac{l}{d}} + \xi^{-\frac{l}{d}} \in \mathbb{Z}[\xi^{\frac{q}{d}} + \xi^{-\frac{q}{d}}]$. Стало быть,

$$\xi^{\frac{l}{d}} + \xi^{-\frac{l}{d}} = a_0 + \sum_{r=1}^{\frac{\phi(\frac{l}{d})}{2}-1} a_i(\xi^{\frac{qr}{d}} + \xi^{-\frac{qr}{d}})$$

для некоторых $a_i \in \mathbb{Z}$. Так как разложение по базису (8) единственно, по леммам 2, 5 получаем $\frac{l}{d} = \frac{qr}{d}$ для некоторого r, или $l = qr$. Тогда $d = q$, откуда $\frac{q}{d} = 1$, что противоречит предположению $\frac{q}{d} > 2$.

Характеристический многочлен матрицы g лежит в $\mathbb{Z}[t]$, причем его корнями являются первообразный корень $\xi^{\frac{l}{d}}$ из 1 степени q и ± 1. Следовательно, циклотомический многочлен $\Phi_q(t)$ — собственный делитель характеристического многочлена матрицы g. Поэтому $\phi(q)$ меньше степени характеристического многочлена, которая равна размерности E.

Если $q \neq l$, то корнями целочисленного характеристического многочлена элемента $g \in G$ являются примитивные корни степеней q, l из 1, а также ± 1. Поэтому характеристический многочлен делится на $\Phi_q(t)\Phi_l(t)(t \pm 1)$. Отсюда вытекает последнее неравенство. $\square$

Отметим, что если в условии теоремы 3.4 отношение $\frac{q}{d}$ равно 2, то $q = |g_1|$. Аналогично если $\frac{l}{d} = 2$, то $l = |g_2|$.

Следствие 3.2. *Пусть* $\dim U = \dim V = 3$ *и* $g \in G$, *причем* $g = g_1 g_2$, *где* $g_i \in G_i$. *Предположим, что* $\widehat{|g_1|}, \widehat{|g_2|}$ *равны* 5 *или больше* 6 *и* d — *наибольший общий делитель* $\widehat{|g_1|}, \widehat{|g_2|}$. *Тогда либо* $\frac{\widehat{|g_1|}}{d} \leq 2$, *либо* $\frac{\widehat{|g_2|}}{d} \leq 2$. *При этом* $\phi(|g_1|) \leq 5$. *Если* $q \neq l$, *то* $\phi(|g_1|) + \phi(|g_2|) \leq 4$.

4. Случай $\dim U = \dim V = 3$

Применим предыдущие результаты к случаю, когда размерности U, V равны 3.

Пусть группа G не является прямым произведением групп G_1, G_2. Тогда обе группы G_i, $i = 1, 2$, указаны в табл. 1, где либо $k = 5$, либо $k \geq 7$.

Предложение 4.1. *Пусть* m — *натуральное число, причем выполнено неравенство* $\phi(m) < 6$, *где* ϕ — *функция Эйлера. Тогда* m — *одно из чисел в табл.* 2.

Таблица 2

m	10	5	12	6	3	8	4	2	1
$\phi(m)$	4	4	4	2	2	4	2	1	1

Доказательство. Пусть $m = 2^{s_2} 3^{s_3} \cdots$, $s_i \geq 0$, — разложение на степени простых чисел. Тогда $\phi(m) = \phi(2^{s_2})\phi(3^{s_3}) \cdots$ и $\phi(p^s) = (p-1)p^{s-1}$, если $s \geq 1$. Отсюда следует, что $s_7 = s_{11} = s_{13} = \cdots = 0$.

Пусть $s_5 > 0$. Тогда $\phi(5^{s_5}) = 5^{s_5 - 1}4$ является делителем числа $\phi(m) \leq 5$. Следовательно, $s_5 \leq 1$. При этом $m = 5, 10$.

Предположим, что $s_5 = 0$. Если $s_3 > 0$, то $\phi(3^{s_3}) = 3^{s_3 - 1}2$ — делитель $\phi(m) \leq 5$. Следовательно, $s_3 = 1$ и $s_2 \leq 2$ и $m = 12, 6, 3$.

Наконец, если $s_3 = s_5 = 0$, то $m = 2^s$ и $\phi(m) = 2^{s-1} \leq 5$. Значит, $s = 0, 1, 2, 3$ и $m = 1, 2, 4, 8$. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть группа* G *является подпрямым произведением групп* G_1, G_2 *из табл.* 1. *Предположим, что* $g = g_1 g_2 \in G$, $g_i \in G_i$, *причем* $\pi(g_1) = \pi(g_2)$. *Тогда порядки* g_1, g_2 *равны* 1–6, 8, 10, 12. *Если* d — *наибольший общий делитель* $|g_1|, |g_2|$, *то одно из чисел* $\frac{\widehat{|g_1|}}{d}$, $\frac{\widehat{|g_2|}}{d}$ *не больше* 2.

Доказательство. Применить следствие 3.2 и предложение 4.2. $\square$

Следствие 4.1. *Пусть группа* G *является подпрямым произведением групп* G_1, G_2 *из табл.* 1. *Тогда в группах*

$$\langle a \rangle_k, D_k, \langle a \rangle_k \times \langle j \rangle_2, D_k \times \langle j \rangle_2 \tag{11}$$

число k равно 1–6, 8, 10, 12, а в группах $\langle a\rangle_{2k}$, D_{2k} из табл. 1 *число k равно* $1,\dots,6$.

Доказательство. Применить предложение 4.3. □

Рассмотрим случай, когда группы G_1, G_2 из списков (11), где $k = 5, 8, 10, 12$.

Предложение 4.3. *Пусть числа k_1 и k_2 соответствуют группам G_1, G_2 из следствия* 4.1. *Тогда (k_1, k_2) — одна из пар:*

$$(5,5),\quad (5,10),\quad (10,5),\quad (10,10),\quad (8,8),\quad (12,12).$$

Доказательство. Применить предложение 4.1. □

Теорема 4.1. *Пусть $g \in G$ имеет представление $g = g_1g_2$, причем порядки k_1, k_2 элементов g_1, g_2 равны* 5 *или* 10. *Предположим, что собственное значение матрицы g_1 равно $\exp\frac{2\pi i}{k_1}$, а собственное значение матрицы g_2 равно $\exp\frac{2\pi il}{k_2}$. Тогда имеются следующие возможности:*

(a) $k_1 = k_2 = 5$ *и* $l = 2, 3$,
(b) $k_1 = 5$, $k_2 = 10$ *и* $l = 1, 2, 8, 9$,
(c) $k_1 = 10$, $k_2 = 5$, *и* $l = 4, 6$,
(d) $k_1 = k_2 = 10$ *и* $l = 3, 4, 6, 7$.

Доказательство. Предположим, что $k_1 = k_2 = 5$. Как и в доказательстве теоремы 3.4, для некоторого целого числа m многочлен $F(X) = X + X^4 + X^l + X^{5-l} - m$ делится в кольце $\mathbb{Z}[X]$ на циклотомический многочлен $\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Отсюда сразу следует, что $F(X) = \Phi_5(X)$ и поэтому $l = 2, 3$.

Предположим теперь, что $k_1 = 5, k_2 = 10$. Тогда $-\exp\frac{2\pi i}{5}$ является примитивным корнем из 1 степени 10. Как и в теореме 3.4, для некоторого целого числа m многочлен $F(X) = X + X^4 + (-X)^l + (-X)^{10-l} - m$ делится в кольце $\mathbb{Z}[X]$ на $\Phi_5(X)$. Следовательно, $l = 1, 2, 8, 9$, поскольку $X^5 \equiv 1 \mod \Phi_5(X)$.

Рассмотрим случай $k_1 = 10$, $k_2 = 5$. Снова $-\exp\frac{2\pi i}{5}$ — примитивный корень из 1 степени 10. Поэтому многочлен

$$F(X) = -X - X^4 + (-X)^l + (-X)^{10-l} - m$$

делится в кольце $\mathbb{Z}[X]$ на $\Phi_5(X)$, где l четно. Поэтому $l = 4, 6$.

Пусть, наконец, $k_1 = k_2 = 10$. Тогда

$$F(X) = -X - X^4 + (-X)^l + (-X)^{10-l} - m$$

делится в $\mathbb{Z}[X]$ на $\Phi_5(X)$, где l четно. Следовательно, $l = 3, 4, 6, 7$. □

Следствие 4.2. *Если $k_1, k_2 = 5, 10$, то группы H_1, H_2 единичные.*

Доказательство. Применим предложение 3.2. Предположим, что $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$ — порождающие групп из следствия 4.1, соответствующие поворотам на углы $\frac{2\pi}{k_1}$, $\frac{2\pi l}{k_2}$. Тогда $a_1a_2^l \in G$ для l из теоремы 4.1. В случае (a) из теоремы 4.1 при $k_1 = k_2 = 5$ получаем, что $l = 2, 3$. Если $a_1a_2, a_1a_2^3 \in G$, то $a_2 \in H_2$. Но это невозможно, поскольку каждый элемент из H_i имеет целый след, а след a_2 равен $2\cos\frac{2\pi}{5} \notin \mathbb{Z}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Теорема 4.2. *Пусть $g \in G$ и $g = g_1 g_2$, где $g_i \in G_i$. Предположим, что матрица g_1 имеет собственное значение $\exp\frac{2\pi i}{k_1}$, где $k_1 = 8, 12$. Тогда матрица g_2 имеет собственное значение $\exp\frac{2\pi i l}{k_1}$, где (k_1, l) — одна из пар $(8,3)$, $(8,5)$, $(12,5)$, $(12,7)$. Число l по k_1 определяется однозначно. Это же утверждение справедливо, если G_1, g_1, k_1 заменить на G_2, g_2, k_2.*

Доказательство. Предположим, что $k_1 = 8$. Как и в теореме 4.1, след матрицы g является целым числом, поэтому

$$2\cos\frac{2\pi}{8} + 2\cos\frac{2\pi l}{8} = \sqrt{2} + 2\cos\frac{\pi l}{4} \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $2\cos\frac{\pi l}{4} = -\sqrt{2}$, откуда $l = 3, 5$.

Пусть теперь $k_1 = 12$. Снова

$$2\cos\frac{2\pi}{12} + 2\cos\frac{2\pi l}{12} = \sqrt{3} + 2\cos\frac{\pi l}{6} \in \mathbb{Z}.$$

Стало быть, $2\cos\frac{\pi l}{4} = -\sqrt{3}$ и $l = 5, 7$. $\square$

Следствие 4.3. *Если $k_1, k_2 = 8, 12$, то группы H_1, H_2 единичные.*

Доказательство. Применим рассуждения из доказательства следствия 4.2 и результаты теоремы 4.2. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть G — конечная группа симметрий из модели среза и проекции для квазикристалла, причем размерности фазового и физического пространств равны 2 и 3. Тогда G изоморфна подгруппе одной из следующих групп:*

(i) *циклическая группа $\langle a\rangle_k$ порядка*

$$k = 1, \dots, 6, 8, 10, 12, \tag{12}$$

(ii) *группа диэдра D_k, где k из (12),*

(iii) *прямое произведение двух циклических групп $\langle a\rangle_k \times \langle j\rangle_2$, где k из (12),*

(iv) *прямое произведение групп $D_k \times \langle j\rangle_2$, где k из (12),*

(v) *прямое произведение любых двух групп из списка:*

$$\langle a\rangle_k;\ \langle a\rangle_k \times \langle j\rangle_2; \quad D_k,\ D_k \times \langle j\rangle_2; \quad T,\ T \times \langle j\rangle_2; \quad \mathrm{O},\ \mathrm{O} \times \langle j\rangle_2, \quad I,\ I \times \langle j\rangle_2; \quad OT,$$

где $k = 1, \dots, 4, 6$.

5. Реализация

В этом разделе показывается, что группы из теоремы 4.3 реализуются как группы симметрий квазикристаллов. Идея такой реализации восходит к [15, 3].

По теоремам 3.1–3.3 все группы в теореме 4.3 при условии, что k из (6), могут быть представлены как группы симметрий квазикристалла. Поэтому нужно рассмотреть группы из теоремы 4.3 только в случаях (i)–(iv), где $k = 5, 8, 10, 12$.

Как показано в [12], группы из случаев (i) и (ii) в теореме 4.3 допускают представление в 4-мерном вещественном пространстве. Поэтому нужно рассмотреть случай групп $\langle a\rangle_k \times \langle j\rangle_2$ и $D_k \times \langle j\rangle_2$ в пространстве E размерности 6 с трехмерным инвариантным подпространством U. При этом j является центральной симметрией и $k = 5, 8, 10, 12$.

Нам потребуется

Теорема 5.1 [12]. *Пусть $k \geq 3$ — целое число. Группа диэдра D_k является подгруппой группы симметрий $\operatorname{Sym} Q$ некоторого двумерного квазикристалла Q. Квазикристалл Q получается проекцией из гиперпространства E размерности $\phi(k) \geq 2$.*

Если $k = 5, 8, 10, 12$, то $\phi(k) = 4$. По теореме 5.1 существует 4-мерное целочисленное представление группы D_k. Оно продолжается до 6-мерного представления ζ, причем элементы из D_k действуют тождественно на двух дополнительных базисных векторах. Зададим $\zeta(j)$ как центральную симметрию в 6-мерном пространстве. Получаем искомое представление.

Следующая теорема дает дополнительную информацию о структуре симметрий квазикристаллов.

Теорема 5.2 [12]. *Пусть m — целое число, причем либо $m = 5$, либо $m \geq 7$. Рассмотрим двумерный квазикристалл Q, построенный с помощью модели среза и проекции с использованием гиперпространства E размерности $\phi(m) \geq 2$, причем полагаем $M = \mathbb{Z}[\xi]$. Группа симметрий $\operatorname{Sym} Q$ содержит абелеву группу, изоморфную группе единиц $\mathbb{Z}[\xi]^*$ кольца $\mathbb{Z}[\xi]$, где ξ — первообразный корень степени m из 1. Ранг абелевой группы равен $\frac{\phi(m)}{2} - 1 \geq 1$. В частности, $\operatorname{Sym} Q$ содержит элементы бесконечного порядка.*

6. Другие модели

В этом разделе упомянем о других моделях, рассмотренных в недавно изданных монографиях, и об их группах симметрий. Разумеется, этот список не полон.

Конечно порожденная аддитивная подгруппа физического или фазового пространства является свободной конечного ранга. Если ее ранг больше размерности пространства, то она называется *квазирешеткой*. Одним из основных примеров квазирешеток являются системы корней. Под группой симметрий квазирешетки понимается подгруппа группы изометрий пространства, состоящая из всех преобразований, переводящих квазирешетку в себя. Как показано в [9], группы симметрий в этом смысле являются подгруппами общей группы симметрий.

В [6] используются аффинные преобразования для определения группы симметрий квазикристаллов.

Различные группы симметрий мозаик изучаются в [16]. Эти группы являются подгруппами группы изометрий евклидова пространства.

Модели квазикристаллов и их связи с мозаиками и структурами Пенроуза рассматриваются в [17, гл. 3; 18, 19, 20, гл. 2].

Как отмечалось ранее, пространственные группы трехмерных кристаллов и квазикристаллов в некоторой модели описаны в [7, 8] при некоторых ограничениях на решетки.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за многочисленные полезные замечания, которые помогли существенно улучшить текст работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artamonov V. A.* On symmetries of quasicrystals // Algebraic structures and their representations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. P. 175–188 (Contemp. Math.; V. 376).
2. *Артамонов В. А., Словохотов Ю. Л.* Группы и их приложения в физике, химии и кристаллографии. М.: Академия, 2005.

3. *Hermisson J., Richard Ch., Baake M.* A guide to the symmetry structure of quasiperiodic tiling classes // J. Phys. I France. 1997. V. 7. P. 1003–1018.

4. *Baake M., Hermisson J., Pleasants A. B.* The torus parametrization of quasiperiodic LI-classes // J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 3029–3056.

5. *Woody R. V.* Model sets: a survey // Quasicrystals to more complex systems. Les Houches, France, 1998. Berlin: Springer-Verl., 1998. P. 145–166. (arXiv:math.MG/0002020 v1).

6. *Quasicrystals and discrete geometry* / Patera J., Ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Fields Inst. Monogr.).

7. *Rabson D. R., Mermin N. D., Rokhaar D. S., Wright D. C.* The space groups of axial crystals and quasicrystals // Rev. Modern Phys. 1991. V. 63, N 3. P. 699–733.

8. *Mermin N. D.* The space groups of icosahedral quasicrystals and cubic, orthorhombic, monoclinic and triclinic crystals // Rev. Modern Phys. 1991–1992. V. 64. N 1. P. 3–51.

9. *Артамонов В. А., Санчес С.* О группах симметрий квазикристаллов // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 323–329.

10. *Ле Ты Куок Тхаиг, Пиунихин С. А., Садов В. А.* Геометрия квазикристаллов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 1. С. 41–102.

11. *International tables for crystallography* / Theo Hahn, Ed. 2nd Rev. Edition, V. A Reidel. Norwell, MA: Int. Union Crystallography, 1987.

12. *Artamonov V. A., Sànchez S.* Remarks on symmetries of 2 D-quasicrystals (SI-CMMSE–2006) // Int. J. Comput. Math. 2008. V. 85, N 3–4. P. 319–328.

13. *Петрашень М. И., Трифонов Е. Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М.: УРСС, 1999.

14. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 11. (Итоги науки и техники).

15. *Niizeki K.* Self-similarity of quasilattices in two dimensions. I. The n-gonal quasilattice // J. Phys. A: Math. General. 1989. V. 22. P. 193–204.

16. *Horne Clare E.* Geometrical symmetry in patterns and tilings. Cambridge, England: Woodgead Publ., 2000.

17. *Fujiwara T., Ishii Y.* Quasicrystals. A handbook of metal physics. Amsterdam: Elsevier, 2008.

18. *Deza M. M., Deza E.* Encyclopedia of distance. Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer-Verl., 2009.

19. *Senechal M.* Quasicrystals and geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

20. *Quasicrystals, structure and physical properties* / Trebin H.-R., Ed. Weinhaim: Wiley-VCH GmbH & Co. KGaA, 2003.

Статья поступила 17 сентября 2010 г.,
окончательный вариант — 11 августа 2011 г.

Артамонов Вячеслав Александрович
Московский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра высшей алгебры,
Воробьевы горы, 119899 Москва В-234,
artamon@mech.math.msu.su

Sergio Sánchez (Санчес Серхио)
Universidad Rey Juan Carlos,
C/Tulipán S/N
28933-Mostoles-Madrid (Spain)
sergio.sanchez@urjc.es