Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 519.624

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ. РЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ

В. Б. Левенштам

Аннотация. Для некоторых классов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими плавными и высокочастотными коэффициентами в условиях резонанса построены полные обоснованные асимптотики решений.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, большие плавный и высокочастотный коэффициенты, полная обоснованная асимптотика решения.

Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений с параметром восходят к известным работам Лиувилля 1837, 1838 гг. Их дальнейшее развитие связано с именами Г. Биркгофа, Я. Д. Тамаркина, В. Тржицинского, В. С. Пугачева, Ю. Л. Далецкого, И. М. Рапопорта, С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля и многих других авторов. Подробная библиография этого математического направления имеется, например, в монографии [1]. Особо отметим статью Ю. Л. Далецкого [2] (см. также [3, гл. VII, § 33]), где в отличие от основной части работ указанного направления изучаются линейные дифференциальные уравнения, среди коэффициентов которых имеются не только плавные, пропорциональные большому параметру, но и быстро осциллирующие (высокочастотные). При этом в [2, 3] рассматриваются дифференциальные уравнения в банаховых пространствах; спектр старшего коэффициента уравнения может быть произвольным, но лежащим в замкнутой комплексной полуплоскости устойчивости; изучены как нерезонансный, так и резонансный случаи.

В [4–6] (см. также монографию [7]) мы развиваем теорию метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского (см., например, [8]) для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты. К этим работам примыкают результаты [9, 10] несколько иного типа для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В [9] построена с обоснованием полная асимптотика решения задачи Коши для скалярного дифференциального уравнения второго порядка с большим плавным ($\omega^2 a^2(t)$, $a(t) \in \mathbb{R}$, $\omega \gg 1$) и с большим высокочастотным ($\omega^{\frac{3}{2}} b(t, \omega t)$) коэффициентами. Рассматриваемая в [9] задача при отсутствии в ней высокочастотных членов ранее была изучена в [11, гл. IV]. В [10, п. 2] построена с обоснованием полная асимптотика некоторой фундаментальной матрицы решений для нормальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими плавным ($\omega A_0(t)$) и высокочастотным ($\omega^{\frac{1}{2}} B_0(t, \omega t)$) коэффициентами. При этом собственные значения матрицы $A_0(t)$ для простоты предполагаются различными, но не обязательно лежащими в полуплоскости устойчивости. Указанная задача при отсутствии в ней высокочастотных слагаемых ранее была изучена в [12, гл. VI].

Результаты [9, 10] не вытекают из [2, 3] и установлены, что естественно, существенно более простыми средствами. Однако в [9, 10] рассмотрен только нерезонансный случай. Данная работа восполняет указанный пробел. Здесь исследуется резонансный случай. Правда, для простоты в настоящей работе рассматриваются уравнения лишь с целыми степенями большого параметра и стационарным главным плавным коэффициентом. В такой упрощенной ситуации исследуемое в § 1 скалярное уравнение второго порядка является частным случаем уравнения, рассмотренного в [2, 3] (корни соответствующего «старшего» характеристического уравнения в § 1 чисто мнимые). Тем не менее мы сочли целесообразным привести в данной работе результаты § 1, поскольку они базируются на используемой в [9] технике, существенно более простой, нежели техника [2, 3], где рассматриваются значительно более общие задачи.

§ 1. Уравнения второго порядка

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $T > 0$ и $b_{ik}(t)$, $i = 0, 1$, $|k| \le n$, — заданные на отрезке $t \in [0, T]$ непрерывные функции, имеющие внутри этого отрезка непрерывные производные любого порядка, продолжимые по непрерывности на весь отрезок, причем $b_{ik}(t)$ и $b_{i,-k}(t)$ комплексно сопряжены.

Рассмотрим на участке $t \in [0, T]$ задачу Коши

$$\ddot{x} + \Big[\omega^2 a^2 + \sum_{|k|\le n} [\omega b_{1k}(t) + b_{0k}(t)] e^{ik\omega t}\Big] x = 0, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega x_1, \tag{1.2}$$

где ω — большой вещественный параметр, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа. Требуется построить с обоснованием асимптотику ее решения $x_\omega(t)$. В случае нецелых a (нерезонансный случай) этот вопрос решен в [9][1)]. Здесь же рассмотрим целые значения a. Точнее, ради краткости записи далее считаем $a = 1$.

Асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.2) (при $a = 1$) будем строить в виде

$$x(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{sm}(t) e^{im\omega t}. \tag{1.3}$$

В дальнешем мы увидим, что при каждом s число функций $U_{sm}(t)$ в (1.3), которые не равны нулю тождественно, конечно.

Для вычисления неизвестных коэффициентов U_{sm} подставим ряд (1.3) в уравнения (1.1) и (1.2) и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых функциях вида $\omega^{-s} e^{im\omega t}$. Предварительно из представления (1.3) формально находим

$$\dot{x}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \omega^{-s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\dot{U}_{sm} + im\omega U_{sm}) e^{im\omega t}, \tag{1.4}$$

[1)] В [9] число a не может быть целым и полуцелым, поскольку рассматриваемое там уравнение (см. [9, (1)]) содержит высокочастотное слагаемое, пропорциональное $\omega^{\frac{3}{2}}$. Для рассматриваемых в данной заметке уравнений (1.1) полуцелые значения a не являются резонансными, что видно из дальнейшего изложения.

$$\ddot{x} = \sum_{s=0}^{\infty}\omega^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\ddot{U}_{sm} + 2im\omega\dot{U}_{sm} - m^2\omega^2 U_{sm})e^{im\omega t}. \tag{1.5}$$

Из (1.3), (1.5), (1.1) следует формальное равенство

$$\sum_{s=0}^{\infty}\omega^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big[\ddot{U}_{sm} + 2im\omega\dot{U}_{sm} - m^2\omega^2 U_{sm} + \omega^2 U_{sm} + \omega\sum_{|k|\le n} b_{1k}U_{s,m-k} + \sum_{|k|\le n} b_{0k}U_{s,m-k}\Big]e^{im\omega t} = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.3), (1.4) и (1.2) имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\omega^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}U_{sm}(0) = x_0, \tag{1.7}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\omega^{-s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[\dot{U}_{sm}(0) + im\omega U_{sm(0)}] = 0. \tag{1.8}$$

Приравнивая в (1.6) коэффициенты при $\omega^2 e^{im\omega t}$, получим $(1-m^2)U_{0m} = 0$. Отсюда следует, что

$$U_{0k} = 0, \quad k \ne \pm 1. \tag{1.9}$$

Функции $U_{0,\pm 1}$ определим на следующем шаге.

Приравнивая в (1.6) коэффициенты при $\omega e^{im\omega t}$, найдем

$$(1-m^2)U_{1m} = -2im\dot{U}_{0m} - \sum_{|k|\le n} b_{1k}U_{0,m-k}. \tag{1.10}$$

Отсюда при $m = \pm 1$ с учетом (1.9) находим

$$\begin{cases} 2i\dot{U}_{0,-1} - b_{10}U_{0,-1} - b_{1,-2}U_{01} = 0, \\ 2i\dot{U}_{0,1} + b_{12}U_{0,-1} - b_{10}U_{01} = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Приравнивая в (1.7) коэффициенты при ω^0, а в (1.8) — при ω^0 и ω, а также учитывая (1.9), получим

$$\begin{cases} U_{0,-1}(0) + U_{0,1}(0) = x_0, \\ -U_{0,-1}(0) + U_{01}(0) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Из системы (1.11) в совокупности с начальными условиями, определяемыми системой (1.12), однозначно находим функции $U_{0,\pm 1}(t)$. После этого, вернувшись к равенству (1.10), однозначно определим $U_{1k}(t)$, $k \ne \pm 1$. Функции же $U_{1,\pm 1}(t)$ определяются на следующем шаге аналогично тому, как только что были определены функции $U_{0,\pm 1}(t)$. Из (1.10), (1.9) следует, что число функций $U_{1k}(t)$ таких, что $U_{1k}(t) \not\equiv 0$, конечно.

Описанным способом можно найти коэффициенты разложений $U_{sm}(t)$ с любыми номерами s, m, причем для каждого s число функций U_{sm}, которые не равны нулю тождественно, конечно. Действительно, пусть для фиксированного натурального $p \ge 2$ нам известны все коэффициенты U_{sm}, $s \le p-2$, а также $U_{p-1,m}$, $m \ne \pm 1$, причем существует такое натуральное число $r = r(p)$, что

$$U_{sm} \equiv 0, \quad s \le p-1,\ m \ge r. \tag{1.13}$$

Для вычисления коэффициентов $U_{p-1,\pm 1}$ и $U_{p,m}$, $m \neq \pm 1$, приравняем в (1.6) коэффициенты при функциях $\omega^{-p+r}e^{im\omega t}$. Получим

$$(1-m^2)U_{pm} = -\ddot{U}_{p-2,m} - 2im\dot{U}_{p-1,m} - \sum_{|k|\le n} b_{1k}U_{p-1,m-k} - \sum_{|k|\le n} b_{0k}U_{p-2,m-k}. \tag{1.14}$$

Полагая здесь $m = \pm 1$ и учитывая (1.13), находим

$$\begin{cases} 2i\dot{U}_{p-1,1} + b_{12}U_{p-1,-1} + b_{10}U_{p-1,1} \\ \qquad\qquad = -\ddot{U}_{p-2,1} - \sum\limits_{\substack{|k|\le n,\\ k\neq 0,2}} b_{1k}U_{p-1,1-k} - \sum\limits_{|k|\le n} b_{0k}U_{p-2,1-k}, \\ 2i\dot{U}_{p-1,-1} - b_{10}U_{p-1,-1} - b_{1,-2}U_{p-1,1} \\ \qquad\qquad = -\ddot{U}_{p-1,-1} + \sum\limits_{\substack{|k|\le n,\\ k\neq 0,-2}} b_{1k}U_{p-1,-1-k} + \sum\limits_{|k|\le n} b_{0k}U_{p-2,-1-k}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Приравнивая в равенстве (1.7) коэффициенты при степени ω^{-p+1}, а в равенстве (1.8) — при ω^{-p+2}, получим

$$\begin{cases} U_{p-1,-1}(0) + U_{p-1,1}(0) = -\sum\limits_{m\neq\pm 1} U_{p-1,m}(0), \\ U_{p-1,1}(0) - U_{p-1,-1}(0) = \frac{1}{i}\sum\limits_{m} \dot{U}_{p-2,m}(0) - \sum\limits_{m\neq\pm 1} U_{p-1,m}(0). \end{cases} \tag{1.16}$$

Из (1.15) и (1.16) однозначно определяются коэффициенты $U_{p-1,\pm 1}(t)$. Затем из равенств (1.14) однозначно находятся коэффициенты U_{pm} при $m \neq \pm 1$. Из (1.13), (1.14) видно, что число функций U_{pm}, которые не равны нулю тождественно, конечно. Таким образом, высказанное в начале данного абзаца предложение доказано.

Для формулировки основного результата § 1 для любого целого неотрицательного числа l рассмотрим l-ю частичную сумму ряда (1.3):

$$x^l(t) = \sum_{s=0}^{l} \omega^{-s} \sum_{m} U_{sm}(t)e^{im\omega t},$$

где U_{sm} — построенные выше функции.

Теорема 1. *Для любого целого неотрицательного числа l найдутся такие положительные числа C_l и ω_l, что при $\omega > \omega_l$ описанным выше способом эффективно строится l-е приближение $x^l(t)$ решения $x_\omega(t)$ задачи* (1.1), (1.2), *которое, как и x_ω, вещественно и при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет оценке*

$$|x_\omega(t) - x^l(t)| \le C_l\omega^{-(l+1)}, \quad |\dot{x}_\omega(t) - \dot{x}^l(t)| \le C_l\omega^{-l}.$$

Доказательство теоремы 1 после приведенного выше построения формальной асимптотики (1.3) решения задачи (1.1), (1.2) совершенно аналогично доказательству теоремы 1 из [9], поэтому мы его опускаем.

§ 2. Нормальные системы

Пусть $n, p \in \mathbb{N}$, A, $B_k(t)$, $|k| \le n$, $t \in [0,T]$, — квадратные матрицы порядка p, причем элементы матриц $B_k(t)$ имеют на интервале $t \in (0,T)$ непрерывные производные любого порядка, которые продолжимы по непрерывности на весь отрезок $t \in [0, T]$. Обозначим через λ_j, $j = \overline{1, p}$, собственные значения матрицы A, а через $\Phi(m)$, где m — целое число ($m \in \mathbb{Z}$), — множество пар (k, j) таких, что $\lambda_k - \lambda_j = im$. Будем предполагать, что $\Phi(m) \neq \varnothing$ при некоторых m, т. е. выполнено условие резонанса. Для простоты будем считать, что $\Phi(0) = \varnothing$, т. е. собственные значения матрицы A различны.

На участке $t \in [0, T]$ рассмотрим нормальную систему

$$\dot{x} = \Big[\omega A + \sum_{|k| \le n} B_k(t) e^{ik\omega t}\Big] x, \tag{2.1}$$

где ω — большой параметр. Асимптотическое разложение фундаментальной матрицы решений $X(t)$ этой системы будем искать в виде

$$X(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \omega^{-l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{lm}(t) e^{im\omega t} e^{Q(t,\omega)}, \tag{2.2}$$

где $Q(t, \omega) = \omega t Q_{-1} + Q_0(t)$. Относительно матриц Q_{-1}, $Q_0(t)$, $U_{lm}(t)$ предположим следующее (см. [10]). Матрицы Q_{-1}, Q_0 диагональные, причем

$$Q_{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p), \quad Q_0(0) = 0.$$

Если P — невырожденная матрица, приводящая A к диагональному виду Q_{-1}, т. е.

$$P^{-1} A P = Q_{-1}, \tag{2.3}$$

то диагональные и «резонансные» элементы матриц $S_{lm}(t) := P^{-1} U_{lm}(t)$, $l \ge 1$, при $t = 0$ обращаются в нуль, т. е.

$$s_{lm}^{k,k}(0) = 0, \quad s_{lm}^{kj}(0) = 0, \quad l, m \in \mathbb{Z},\ l \ge 1,\ (k, j) \in \Phi(m). \tag{2.4}$$

Из дальнейшего изложения видно, что при каждом l число матриц-функций $U_{lm}(t)$ в (2.2), которые не равны нулю тождественно, конечно.

Для вычисления неизвестных матриц-функций U_{lm} и Q_0 подставим ряд (2.2) в (2.1) и сократим обе части полученного равенства на e^Q. Получим

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\infty} \omega^{-l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\dot{U}_{lm}(t) + im\omega U_{lm(t)} + U_{lm}(t)(\omega Q_{-1} + \dot{Q}_0)] e^{im\omega t} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \omega^{-l+1} A_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{lm}(t) e^{im\omega t} + \sum_{l=0}^{\infty} \omega^{-l} \sum_{|k| \le n} B_k(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{l,m-k} e^{im\omega t}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Приравнивая в (2.5) коэффициенты поочередно при функциях $\omega e^{im\omega t}$, $\omega^0 e^{im\omega t}$ и $\omega^{-(r-1)} e^{im\omega t}$, $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, получим следующие соотношения:

$$(A - imE) U_{0m} - U_{0m} Q_{-1} = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

$$(A - imE) U_{1m} - U_{1m} Q_{-1} = \dot{U}_{0m}(t) + U_{0m} \dot{Q}_0 - \sum_{|k| \le n} B_k U_{0,m-k}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

$$(A - imE) U_{r,m} - U_{r,m} Q_{-1} = \dot{U}_{r-1,m} + U_{r-1,m} \dot{Q}_0 - \sum_{|k| \le n} B_k(t) U_{r-1,m-k}, \tag{2.8}$$

$$m \in \mathbb{Z}, \quad r \ge 2.$$

Умножим равенство (2.6) на матрицу P^{-1} слева. Полученное в результате равенство с учетом (2.3), (2.4) перепишем в виде

$$(Q_{-1} - imE)S_{0m} - S_{0m}Q_{-1} = 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.9}$$

Как и в [10], положим

$$S_{00} = E. \tag{2.10}$$

Так что (2.9) выполнено при $m = 0$. При $m \neq 0$ из (2.9) находим элементы

$$s_{0m}^{k,j} = 0, \quad (k,j) \notin \Phi(m). \tag{2.11}$$

Элементы $s_{0m}^{k,j}$ при $(k,j) \in \Phi(m)$, если такие имеются, остаются пока неопределенными.

Умножая (2.7) слева на матрицу P^{-1}, придем к уравнению

$$(Q_{-1} - imE)S_{1m} - S_{1m}Q_{-1} = \dot{S}_{0m} + S_{0m}\dot{Q}_0 - \sum_{|k|\le n} P^{-1}B_kPS_{0,m-k}. \tag{2.12}$$

При $m = 0$ отсюда с учетом (2.10) находим

$$\dot{Q}_0 = \sum_{|k|\le n} P^{-1}\widehat{B_kPS}_{0,m-k}, \tag{2.13}$$

где через $\widehat{M}$ обозначаем матрицу, полученную из M заменой внедиагональных элементов нулем [10]. Рассмотрим теперь уравнение (2.12) при $m \neq 0$. Подставим в него выражение $\dot{Q}_0$ из (2.13). В матрице, представляющей правую часть полученного уравнения, приравняем нулю элементы с номерами $(k,j) \in \Phi(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку значений m, при которых $\Phi(m) \neq \varnothing$, конечно, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений Риккати относительно конечного числа неизвестных $s_{0m}^{k,j}(t)$, $(k,j) \in \Phi(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Подчинив главный член $X_0(t)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ условию $X_0(0) = P$ и учитывая (2.10), (2.11), найдем для указанной системы Риккати начальные условия $s_{0m}^{k,j}(0) = 0$, $(k,j) \in \Phi(m)$. Будем предполагать, что полученная задача Коши имеет на участке $t \in [0,T]$ решение, т. е.

$$\text{определены } s_{0m}^{kj}(t), \quad (k,j) \in \Phi(m). \tag{2.14}$$

Тогда из (2.11), (2.14) следует, что все матрицы $S_{0m}(t)$ определены. Из (2.12) однозначно определим теперь элементы s_{1m}^{kj}, $(k,j) \notin \Phi(m)$.

Покажем, что все коэффициенты U_{sm}, $s \in \mathbb{Z}_0^+$, $m \in \mathbb{Z}$, однозначно определены. Для этого предположим, что для натурального $r \geq 2$ при всех $m \in \mathbb{Z}$ нам известны элементы $s_{r-1,m}^{k,j}$, $(k,j) \notin \Phi(m)$. Докажем, что тогда однозначно определены элементы

$$s_{r-1,m}^{k,j}(t),\ (k,j) \in \Phi(m), \quad \text{и} \quad s_{r,m}^{l,f}(t),\ (l,f) \notin \Phi(m). \tag{2.15}$$

Умножив равенство (2.8) на P^{-1} слева, придем к уравнению

$$(\dot{Q}_{-1} - imE)S_{r,m} - S_{r,m}Q_{-1} = \dot{S}_{r-1,m} + S_{r-1,m}\dot{Q}_0 - \sum_{|k|\le n} P^{-1}B_k(t)PS_{r-1,m-k} := R. \tag{2.16}$$

Приравняв нулю элементы r^{kj}, $(k,j) \in \Phi(m)$, и учитывая равенства

$$s_{r-1,m}^{kj}(0) = 0, \quad (k,j) \in \Phi(m)$$

(см. (2.4)), получим задачу Коши для нормальной системы линейных уравнений, из которой однозначно находятся элементы $s^{kj}_{r-1,m}(t)$, $t \in [0,T]$, $(k,j) \in \Phi(m)$. Теперь с учетом нашего предположения из (2.16) можно найти элементы $s^{kj}_{r,m}(t)$ при $(k,j) \notin \Phi(m)$. Итак, элементы (2.15) однозначно определены. Высказанное утверждение доказано.

Сформулируем основной результат данного параграфа, аналогичный теоремам 1, 2 из [10], но относящийся к резонансному случаю. Предварительно введем некоторые обозначения.

Для любого целого неотрицательного l ($l \in \mathbb{Z}^+_0$) рассмотрим l-ю частичную сумму $X_l(t)$ ряда (2.2):

$$X_l(t) = \sum_{s=0}^{l} \omega^{-s} \sum_m U_{lm}(t) e^{im\omega t} e^{Q(t,\omega)}.$$

Через $x^k_l(t)$ и $q_k(t,\omega)$, $k \in \overline{1,p}$, обозначим k-й столбец матрицы $X_l(t)$ и соответственно k-й диагональный элемент матрицы $Q(t,\omega)$.

Теорема 2. *Для каждого целого неотрицательного числа l найдутся положительные числа c_l и ω_l такие, что при $\omega > \omega_l$ для каждого $k \in \overline{1,p}$ существует решение $\varphi^k_\omega(t)$ системы (2.1) и описанным выше способом эффективно строится вектор-функция $x^k_l(t)$, удовлетворяющие при всех $t \in [0,T]$ оценке*

$$\left| \left[\varphi^k_\omega(t) - x^k_l(t) \right] e^{-q_k(t,\omega)} \right| \le \frac{c_l}{\omega^{(l+1)}}.$$

Доказательство теоремы 2 после проведенного выше построения формальной асимптотики фундаментальной матрицы решений системы (2.1) совершенно аналогично доказательству теоремы 1 из [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н.* Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. Киев: Вища школа, 1985.
2. *Далецкий Ю. Л.* Асимптотические методы для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 5. С. 1027–1029.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
4. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 2. С. 169–172.
5. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 6. С. 761–770.
6. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1084–1091.
7. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1963.
9. *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.* Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 74–89.
10. *Крутенко Е. В. Левенштам В. Б.* Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 12. С. 2144–2155.

11. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
12. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.

Статья поступила 8 февраля 2011 г.

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
vleven@math.rsu.ru