Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2012. Том 53, № 3

УДК 517.5

О ЛОКАЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

Е. А. Севостьянов

Аннотация. Изучаются пространственные отображения, более общие, чем отображения с ограниченным искажением по Решетняку. Исследованы вопросы, связанные с локальным поведением дифференцируемых почти всюду отображений, обладающих свойствами N, N^{-1}, ACP и ACP^{-1}, характеристика квазиконформности которых удовлетворяет некоторым условиям, ограничивающим ее рост. Показано, что в любой окрестности существенно особой точки модуль значения отображения, удовлетворяющего указанным выше требованиям, может быть больше значения логарифма обратной величины радиуса шара, возведенного в произвольную положительную степень.

Ключевые слова: отображение с ограниченным и конечным искажением, модуль семейства кривых.

1. Введение

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} |x - y|$, (x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ — евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Как обычно, пишем $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, локально интегрируемыми в D в степени n. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает *N-свойством Лузина* или просто N-свойством, если из условия $m(E) = 0$, $E \subset D$, следует, что $m(f(E)) = 0$. Аналогично говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает *N^{-1}-свойством*, если из условия $m(E) = 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, вытекает, что $m(f^{-1}(E)) = 0$, где, как обычно, запись $f^{-1}(E)$ обозначает полный прообраз множества E при отображении f.

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

1) $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$,

2) якобиан $J(x, f) := \det f'(x)$ отображения f в точке $x \in D$ сохраняет знак п. в. в D,

3) $\|f'(x)\|^n \le K|J(x,f)|$ при п. в. $x \in D$ и некоторой постоянной $K < \infty$, где, как обычно, $\|f'(x)\| := \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$ (см., например, [1, гл. I, § 3] либо определение 2.1 в [2, гл. I, разд. 2]).

Начало интенсивных исследований пространственных отображений с ограниченным искажением положено Ю. Г. Решетняком. В его работах, в частности, показано, что отображения с ограниченным искажением дискретны и открыты (см. соответственно теоремы 6.3 и 6.4 в [1, гл. II]), дифференцируемы почти всюду (см. теорему 4 в [3]) и обладают N-свойством Лузина (см. [1, гл. II, теорема 6.2]). С другой стороны, Боярским и Иванцом было установлено, что отображения с ограниченным искажением обладают N^{-1}-свойством (см. теорему 8.1 в [4]). Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. В 1972 г. в работе Вяйсяля доказано следующее утверждение (см. теорему 4.2 в [5]).

Утверждение 1. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C|x-b|^{-p}, \tag{1}$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Целью настоящей работы является доказательство утверждения 1 для более общих классов отображений, включающих в себя класс отображений с ограниченным искажением. Дифференцируемые п. в. отображения класса $ACP \cap ACP^{-1}$, обладающие N- и N^{-1}-свойствами Лузина, называемые *отображениями с конечным искажением длины,* введены О. Мартио, В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым в 2002 г. (см., например, [6] или [7, разд. 8]) и в дальнейшем изучались при рассмотрении различных проблем. Исследование этих отображений актуально в первую очередь в связи с активным изучением общей теории отображений с конечным искажением (см., например, [8, гл. 20; 9, гл. 6; 10–14]). В частности, их изучение имеет некоторые полезные приложения, относящиеся, например, к классам Соболева (см. последний раздел настоящей работы).

Кривой γ называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (открытого интервала (a,b) либо полуоткрытого интервала вида $[a,b)$ или $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f\circ\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, в [15, гл. I, разд. 1–6]. Борелевская функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \ge 1$. В этом случае будем писать $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\,dm(x)$. Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing)=0$, он обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и $\Gamma_2: \Gamma_1\subset\Gamma_2\Rightarrow M(\Gamma_1)\le M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности: $M\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}M(\Gamma_i)$ (см. теорему 6.2 в [15]). Говорят, что некоторое свойство выполнено для *п. в. кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Пусть $\Delta\subset\mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma:\Delta\to\mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma:\Delta\to\Delta_\gamma\subset\mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0)=0$, $t_0\in\Delta$, такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0,t]}$ кривой γ, если $t>t_0$, и $-l(\gamma\,|_{[t,t_0]})$, если $t<t_0$, $t\in\Delta$. Пусть $g:|\gamma|\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma|=\gamma(\Delta)\subset\mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde\gamma=g\circ\gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,g}:\Delta_\gamma\to\Delta_{\tilde\gamma}$ такая, что $L_{\gamma,g}(l_\gamma(t))=l_{\tilde\gamma}(t)$ при всех $t\in\Delta$. Кривая $\gamma\in D$ называется (*полным*) *поднятием кривой* $\tilde\gamma\in\mathbb{R}^n$ *при отображении* $f:D\to\mathbb{R}^n$, если $\tilde\gamma=f\circ\gamma$.

Будем говорить, что отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* ACP в области D, и писать $f\in ACP$, если для п. в. кривых γ в области D кривая $\tilde\gamma=f\circ\gamma$ локально спрямляема и функция длины $L_{\gamma,f}$, введенная выше, абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в Δ_γ, для п. в. кривых γ в D. Предположим, что $f:D\to\mathbb{R}^n$ — дискретное отображение, тогда может быть определена функция $L_{\gamma,f}^{-1}$. В таком случае будем говорить, что f обладает *свойством* ACP^{-1} в области D, и писать $f\in ACP^{-1}$, если для п. в. кривых $\tilde\gamma\in f(D)$ каждое поднятие γ при отображении f, $f\circ\gamma=\tilde\gamma$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L_{\gamma,f}^{-1}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\tilde\gamma}$, для п. в. кривых $\tilde\gamma$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\tilde\gamma=f\circ\gamma$.

Пусть $f:D\to\mathbb{R}^n$ — дискретное отображение, тогда f будем называть *отображением с конечным искажением длины* и писать $f\in FLD$, если f дифференцируемо п. в. в D, обладает N- и N^{-1}-свойствами и, кроме того, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$.

Замечание 1. Понятие отображений с конечным искажением длины может быть также приведено и в более общем случае для отображений, априори не предполагающихся дискретными, как это сделано, например, в работе [6] (см. также разд. 8.1 в [7]). Приведенное в настоящей статье определение, данное для дискретных отображений, эквивалентно тому, которое может быть дано в указанной общей ситуации (см., например, разд. 8.1 и следствие 8.1 в [7], а также следствие 3.14 в [6]). В связи с этим далее мы упоминаем о требовании дискретности отображения, когда это необходимо.

Свойство ACP для класса $W_{\rm loc}^{1,n}$, включающего в себя, в частности, класс отображений с ограниченным искажением, известно как лемма Фугледе (см., например, теорему 28.2 в [15]). Кроме того, свойство ACP^{-1} для этих же отображений установлено Е. А. Полецким [16, лемма 6]. Исходя из приведенных определений и комментарий, заключаем, что произвольное отображение f с ограниченным искажением является также и отображением с конечным искажением длины, $f\in FLD$ (см. также теорему 4.7 в [6] либо теорему 8.2 в [7]).

Будем говорить, что функция $\varphi:D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ и писать $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty,$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x)$. Функции с конечным средним колебанием введены А. Игнатьевым и В. Рязановым в работе [17] (см. также разд. 11.2 в [7]) и представляют собой обобщение функций класса BMO, т. е. с ограниченным средним колебанием по Джону — Ниренбергу [18].

Полагаем $l(f'(x)) := \inf\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$. Напомним, что *внутренняя дилатация отображения f в точке x* определяется как $K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}$, если $J(x,f) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных случаях. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_O(x,f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x,f) \neq 0$, $K_O(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x,f) = \infty$ в остальных точках. Хорошо известно, что $K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f)$ всюду, где эти величины определены корректно (см. соотношения (2.7) и (2.8) в [1, гл. I, разд. 2.1]. Из сказанного выше, а также определения отображений с ограниченным искажением, суть которого, в частности, сводится к выполнению п. в. неравенства вида $K_O(x,f) \leq K$, следует, что для внутренних дилатаций $K_I(x,f)$ отображений f, указанных выше, при п. в. x выполняется неравенство $K_I(x,f) \leq K^{n-1}$. Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующее

Утверждение $1'$. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b,\delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C(\log(1/|x-b|))^p, \tag{2}$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ такая, что $K_I(x,f) \leq Q(x)$ при п. в. $x \in D$ и $Q(x) \in FMO(b)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Замечание 2. Условие (2) является более сильным, чем условие (1), и из утверждения $1'$ следует утверждение 1.

2. Предварительные сведения. Основная лемма

Всюду далее для произвольной области $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$, и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$ символ $\mu(y,f,G)$ обозначает топологический индекс отображения f в точке y относительно области G (см., например, [1, гл. II, § 2]). Везде ниже подразумеваем, что отображение f сохраняет ориентацию, т. е. $\mu(y,f,G) > 0$ для всех указанных выше y и G, если не оговорено противное. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение, и пусть существует область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, такая, что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu(f(x),f,G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x,f)$. Следующие определения см., например, в [2, гл. II, п. 3], а также в [5, разд. 3.11]. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение, $\beta : [a,b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая

$\alpha : [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c)}$; (3) для $c < c' \le b$ не существует кривой $\alpha' : [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,c')}$.

Пусть $x_1, \dots , x_k$ — различные точки множества $f^{-1}(\beta(a))$ и $m = \sum\limits_{i=1}^{k} i(x_i, f)$. Говорят, что последовательность кривых $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ есть *максимальная последовательность поднятий кривой β при отображении f с началом в точках* $x_1, \dots , x_k$, если

(a) каждая кривая α_j есть максимальное поднятие кривой β при отображении f,

(b) $\mathrm{card}\{j : a_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$, $1 \le i \le k$,

(c) $\mathrm{card}\{j : a_j(t) = x\} \le i(x, f)$ для всех $x \in D$ и при всех t.

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x_1, \dots , x_k \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1, \dots , x_k$ (см. [2, гл. II, теорема 3.2]). Следующее утверждение доказано автором (см., например, [19, теорема 3.1]).

Предложение 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина, Γ — семейство кривых в D, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — натуральное число такое, что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1, \dots , \alpha_m$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = x$ имеет место при всех $x \in G$, всех t и не более чем $i(x, f)$ индексах j. Тогда*

$$M(\Gamma') \le \frac{1}{m} \int\limits_D K_I(x, f)\rho^n(x)\, dm(x) \tag{3}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

В частности, предложение 1 уточняет результат О. Мартио, В. И. Рязанова, У. Сребро и Э. Якубова, показавших справедливость его заключения при $m = 1$ (см., например, теорему 6.10 в [6] либо теорему 8.6 в [7]). Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y в множестве E, т. е. $N(y, f, E) = \mathrm{card}\{x \in E : f(x) = y\}$. Далее символ $\Gamma(E, F, D)$ означает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Компактное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой емкости* и будем писать $\operatorname{cap} G = 0$, если существует континуум $T \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $M(\Gamma(T, G, \mathbb{R}^n)) = 0$ (см., например, [2, гл. III, разд. 2; гл. II, предложение 10.2]). Будем говорить, что произвольное множество G_0 *имеет емкость нуль*, если любое его компактное подмножество G имеет емкость нуль. Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны (любая компонента их связности вырождается в точку), т. е. условие $\operatorname{cap} G = 0$ влечет, что $\operatorname{Int} G = \varnothing$ (см., например, следствие 2.5 в [2, гл. III]). Открытое множество $U \subset D$, $\overline{U} \subset D$, называется *нормальной окрестностью* точки $x \in D$ при отображении $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ и $\partial f(U) = f(\partial U)$ (см., например, [2, гл. I, разд. 4]).

Предложение 2. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение. Тогда для каждого $x \in D$ существует s_x такое, что при всех $s \in (0, s_x)$ компонента связности множества $f^{-1}(B(f(x), s))$, содержащая точку x и обозначаемая символом $U(x, f, s)$, является нормальной окрестностью точки x при* *отображении* f, *при этом* $f(U(x,f,s)) = B(f(x),s)$ *и* $\operatorname{diam} U(x,f,s) \to 0$ *при* $s \to 0$ (*см., например, лемму* 4.9 *в* [2, гл. I]).

Важную роль при доказательстве основных результатов работы играют следующие два утверждения (см. следствие 8.1, предложение 8.5 и теорему 8.6 в [7], а также соответственно лемму 5.2 в [20]).

Предложение 3. *Каждое открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение* $f : D \to \mathbb{R}^n$, *обладающее* N- *и* N^{-1}-*свойствами Лузина и такое, что* $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, *удовлетворяет неравенству вида*

$$M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x) \tag{4}$$

для любого семейства кривых Γ *в области* D *и* $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ *при* $Q(x) = K_I(x,f)$.

Предложение 4. *Пусть* $Q : \mathbb{B}^n \to [1,\infty]$ — *измеримая по Лебегу функция,* $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — *открытое дискретное отображение, удовлетворяющее неравенству* (4) *при* $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ *для любого семейства кривых* Γ *в* $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ *и* $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Пусть, кроме того,*

$$\operatorname{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0.$$

Предположим, что существует $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *такое, что при* $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x) = o(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)),$$

где $\psi(t)$ — *неотрицательная на* $(0,\infty)$ *функция такая, что* $\psi(t) > 0$ *п. в. и*

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$.

Основную смысловую нагрузку в настоящей статье несет в себе следующая

Лемма 1. *Пусть* $b \in D$ *и* $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — *открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение,* $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, *обладающее* N- *и* N^{-1}-*свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число* $\delta > 0$ *такое, что при всех* $x \in B(b,\delta)$ *имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C(\log(1/|x-b|))^p, \tag{5}$$

где $p > 0$ *и* $C > 0$ — *некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция* $Q : D \to [1,\infty]$, *числа* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b,\partial D)$, $A > 0$ *и борелевская функция* $\psi(t) : [0,\varepsilon_0] \to (0,\infty)$ *такие, что* $K_I(x,f) \leq Q(x)$ *п. в. и*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-b|)\;dm(x) \leq \frac{AI^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}{\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}} \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0/2), \tag{6}$$

где

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{7}$$

Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Доказательство. Предположим противное, а именно что точка b является существенно особой точкой отображения f. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$ и $C = 1$. В таком случае сфера $S(0, \delta)$ является компактным множеством в $D \setminus \{0\}$, поэтому найдется $R > 0$ такое, что

$$f(S(0, \delta)) \subset B(0, R). \tag{8}$$

Поскольку $b = 0$ — существенно особая точка отображения f, ввиду условий (3) и (6), а также предложений 3 и 4 отображение f в $B(0, \delta) \setminus \{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества емкости нуль, т. е. $N(y, f, B(0, \delta) \setminus \{0\}) = \infty$ при всех $y \in \mathbb{R}^n \setminus E$, где $\operatorname{cap} E = 0$. Так как E имеет емкость нуль, множество $\mathbb{R}^n \setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(0, R))$.

Пусть $k_0 > \frac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку $N(y_0, f, B(0, \delta) \setminus \{0\}) = \infty$, найдутся точки $x_1, \dots, x_{k_0} \in f^{-1}(y_0)$, $x_1, \dots, x_{k_0} \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$. По предложению 2 при некотором фиксированном $r > 0$ каждая точка x_j, $j = 1, \dots, k_0$, имеет нормальную окрестность $U_j := U(x_j, f, r)$ такую, что $\overline{U}_l \cap \overline{U}_m = \varnothing$ при всех $l \neq m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k_0$ и $1 \leq m \leq k_0$.

Полагаем $d := \min\{\varepsilon_0, \operatorname{dist}(0, \overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_{k_0})\}$. Пусть $a \in (0, d)$ и $V := B(0, \delta) \setminus \overline{B(0, a)}$. В силу неравенства (5), соотношения $\partial f(V) \subset f(\partial V)$, справедливого для произвольного открытого отображения f, а также предположения о том, что $C = 1$, имеем

$$f(V) \subset B(0, (\log(1/a))^p). \tag{9}$$

Поскольку $z_0 := y_0 + re \in \overline{B(y_0, r)} = f(\overline{U(x_j, f, r)})$, $j = 1, \dots, k_0$, где e — единичный вектор, будем иметь $z_0 \in f(V)$. Следовательно, найдется последовательность точек $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{k_0}$, $\tilde{x}_j \in \overline{U}_j$, $1 \leq j \leq k_0$, такая, что $f(\tilde{x}_j) = z_0$. Заметим, что $k_0 \leq \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\tilde{x}_j, f) = m'$. Обозначим через H полусферу $H = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : (e, y_0) > 0\}$, через Γ' — семейство всех кривых $\beta : \left[r, \left(\log \frac{1}{a}\right)^p\right) \to \mathbb{R}^n$ вида $\beta(t) = y_0 + te$, $e \in H$, а через Γ — максимальную последовательность поднятий кривой β при отображении f относительно области V с началом в точках $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{k_0}$, $\tilde{x}_j \in \overline{U}_j$, $1 \leq j \leq k_0$, состоящую из m' кривых, $m' = \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\tilde{x}_j, f)$, которая существует в силу теоремы 3.2 в [2, гл. II]. По предложению 1

$$M(\Gamma') \leq \frac{1}{m'} \int\limits_D K_I(x, f) \rho^n(x)\, dm(x) \leq \frac{1}{k_0} \int\limits_D K_I(x, f) \rho^n(x)\, dm(x) \tag{10}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

При любом фиксированном $e \in H$ покажем, что для каждой кривой $\beta = y_0 + te$ и каждого максимального ее поднятия $\alpha(t) : [r, c) \to V$ с началом в точке $\tilde{x}_{j_0}$, $\alpha \in \Gamma$, $1 \leq j_0 \leq k_0$, существует последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ и $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим противное. Тогда найдется $e_0 \in H$ такое, что кривая $\alpha(t)$, $t \in [r, c)$, являющаяся максимальным поднятием кривой $\beta = y_0 + te_0$, лежит внутри V вместе со своим замыканием. Пусть $C(c, \alpha(t))$ обозначает предельное множество кривой α при $t \to c - 0$, тогда для каждого $x \in C(c, \alpha(t))$ найдется последовательность $t_k \to \infty$, такая, что $x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)$. В силу непрерывности f с учетом предположения, что $C(c, \alpha(t)) \subset V$, будем иметь

$$f(x) = f(\lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)) = \lim_{k\to\infty} \beta(t_k) = \beta(c),$$

откуда следует, что отображение f постоянно на множестве $C(c, \alpha(t))$. Так как по условию f дискретно, а множество $C(c, \alpha(t))$, очевидно, связно, имеем $C(c, \alpha(t)) = p_1 \in V$.

Полагаем $b_0 := \left(\log \frac{1}{a}\right)^p$. Пусть $c \neq b_0$. Тогда можно построить новое максимальное поднятие α' кривой β с началом в точке p_1. Объединяя поднятия α и α', получаем еще одно поднятие α'' кривой β с началом в точке $\tilde{x}_{j_0}$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия α. Значит, $c = b_0$.

В таком случае $C(b_0, \alpha(t))$ — континуум внутри V, при этом согласно доказанному $C(b_0, \alpha(t)) = p_1' \in V$ и, значит, α продолжается до замкнутой кривой, определенной на отрезке $\left[r, \left(\log \frac{1}{a}\right)^p\right]$. Обозначим эту кривую через α (обозначения не меняем). Тогда при всех $t \in \left[r, \left(\log \frac{1}{a}\right)^p\right]$ имеем $\beta(t) = f(\alpha(t)) \subset f(V)$, в частности, полагая (в явном выражении $\beta = y_0 + te_0$ для кривой β) $t := \left(\log \frac{1}{a}\right)^p$, рассмотрим элемент z_1, определяемый по правилу $z_1 := y_0 + \left(\log \frac{1}{a}\right)^p e_0$. Ввиду включения (9) имеем

$$z_1 = y_0 + (\log(1/a))^p e_0 \in f(V) \subset B(0, (\log(1/a))^p). \tag{11}$$

Однако, поскольку $e_0 \in H$,

$$\begin{aligned} |z_1| = |y_0 + (\log(1/a))^p e_0| &= \sqrt{|y_0|^2 + 2(y_0, (\log(1/a))^p e_0) + (\log(1/a))^{2p}} \\ &\geq \sqrt{|y_0|^2 + (\log(1/a))^{2p}} \geq (\log(1/a))^p. \end{aligned} \tag{12}$$

Соотношение (12) противоречит (11), что, в свою очередь, опровергает предположение о включении замыкания кривой $\alpha(t)$ в множество V.

Следовательно, $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to c - 0$ и некоторой последовательности $r_k \in [r, c)$ такой, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$, что и требовалось установить.

Заметим, что ситуация, когда $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), S(0, \delta)) \to 0$ при $k \to c - 0$, исключена. Действительно, пусть возможность, указанная выше, имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0, \delta)$ и подпоследовательность номеров k_l, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\alpha(r_{k_l}) \to p_2$ при $l \to \infty$. Отсюда по непрерывности f получаем, что $\beta(r_{k_l}) \to f(p_2)$ при $l \to \infty$, а это невозможно ввиду соотношения (8), поскольку при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in \left[r, \left(\log \frac{1}{a}\right)^p\right)$ имеем $|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \geq |y_0| > R$ по выбору y_0.

Из сказанного выше следует, что найдется последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ и $\alpha(r_k) \to p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку согласно построению α имеет начало вне шара $B(0, d)$. Рассмотрим функцию

$$\rho_a(x) = \begin{cases} \psi(|x|)/I(a, d), & x \in B(0, d) \setminus B(0, a), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus (B(0, d) \setminus B(0, a)), \end{cases}$$

где величина $I(a, d)$ определена так же, как в (7), а ψ — функция из условия леммы. Поскольку по условию леммы $\psi(t) > 0$, имеем $I(a, d) > 0$ при всех $0 < a < d$, поэтому функция $\rho_a(x)$, заданная выше, определена корректно. Заметим, что функция $\rho_a(x)$ борелевская и, кроме того, поскольку $\rho_a(x)$ радиальна, в силу установленных выше свойств кривых из семейства Γ, а также теоремы 5.7 в [15] для любой (локально спрямляемой) кривой $\alpha\in\Gamma$ имеем

$$\int\limits_{\alpha}\rho_a(x)|dx|\geq\frac{1}{I(a,d)}\int\limits_a^d\psi(t)\,dt=1,$$

т. е. $\rho_a(x)\in\operatorname{adm}\Gamma$. В таком случае из соотношения (10) получаем

$$\begin{aligned}M(\Gamma')&\leq\frac{1}{k_0I^n(a,d)}\int\limits_{a<|x|<d}K_I(x,f)\psi^n(|x|)\,dm(x)\\&\leq\frac{I^n(a,\varepsilon_0)}{k_0I^n(a,d)I^n(a,\varepsilon_0)}\int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x)\\&=\left(1+\frac{I(d,\varepsilon_0)}{I(a,d)}\right)^n\frac{1}{k_0I^n(a,\varepsilon_0)}\int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x)\\&\leq\frac{2}{k_0I^n(a,\varepsilon_0)}\int\limits_{a<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\psi^n(|x|)\,dm(x)\end{aligned}\tag{13}$$

при всех $a\in(0,d_1)$ и некотором d_1, $d_1\leq d$, поскольку в силу соотношения (6) $I^n(a,d)\to\infty$ при $a\to\infty$. Снова из (6) и (13) получаем, что при $a\in(0,d_1)$

$$M(\Gamma')\leq\frac{2A}{k_0\left(\log\log\frac{1}{a}\right)^{n-1}}.\tag{14}$$

С другой стороны, в силу [15, разд. 7.7]

$$M(\Gamma')=\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{(\log\frac{1}{a})^p}{r}\right)^{n-1}}.\tag{15}$$

Тогда из неравенств (14) и (15) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{(\log\frac{1}{a})^p}{r}\right)^{n-1}}\leq\frac{2A}{k_0\left(\log\log\frac{1}{a}\right)^{n-1}},$$

откуда

$$\left(\log\left(\frac{(\log\frac{1}{a})^p}{r}\right)^{(\frac{2}{\omega_{n-1}})^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}\geq\left(\log\left(\log\frac{1}{a}\right)^{(\frac{k_0}{2A})^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1},$$

$$\left(\frac{(\log\frac{1}{a})^p}{r}\right)^{(\frac{2}{\omega_{n-1}})^{\frac{1}{n-1}}}\geq\left(\log\frac{1}{a}\right)^{(\frac{k_0}{2A})^{\frac{1}{n-1}}},$$

$$\frac{1}{r^{(\frac{2}{\omega_{n-1}})^{\frac{1}{n-1}}}}\geq\left(\log\frac{1}{a}\right)^{(\frac{k_0}{2A})^{\frac{1}{n-1}}-p(\frac{2}{\omega_{n-1}})^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Поскольку по выбору $k_0>\frac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, в правой части последнего соотношения логарифм берется в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a\to 0$, получаем

$$\frac{1}{r^{(\frac{2}{\omega_{n-1}})^{\frac{1}{n-1}}}}\geq\infty,$$

что невозможно. Возникшее противоречие означает, что $b=0$ не может быть существенно особой точкой для отображения f. $\square$

Следующее утверждение вытекает непосредственно из леммы 5 в [21] при $\psi(t)=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$ и оценки (3) при $m=1$.

Предложение 5. *Предположим, что $b\in D$, $f:D\to B(0,R)$ — открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина, и существуют измеримая по Лебегу функция $Q:D\to[1,\infty]$, числа $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$, и $A>0$ такие, что $K_I(x,f)\le Q(x)$ п. в., при этом имеют место соотношения (6) и (7) с $\psi(t)=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$, т. е.*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)}{|x-b|^n\log^n\frac{1}{|x-b|}}\,dm(x)\le A\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}\quad\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).\tag{16}$$

Тогда при всех $x\in B(b,\varepsilon_0)$ имеет место оценка

$$|f(x)-f(b)|\le\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|x-b|}}\right\}^{\beta_n},\tag{17}$$

где постоянные α_n и $\beta_n=\left(\frac{\omega_{n-1}}{A}\right)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R.

Следствие 1. *Предположим, что в условиях леммы 1 вместо соотношений (6) и (7) имеет место условие (16), а вместо условия (5) — более сильное предположение*

$$\lim_{x\to b}\frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{\beta_n}}=0,\tag{18}$$

где $\beta_n=\left(\frac{\omega_{n-1}}{A}\right)^{1/(n-1)}$. Тогда точка $x=b$ является устранимой для отображения f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$. По лемме 1 точка b не может быть существенно особой для f. Предположим, что $b=0$ является для отображения f полюсом. Рассмотрим композицию отображений $h=g\circ f$, где $g(x)=\frac{x}{|x|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что отображение h снова является отображением с конечным искажением длины (т. е. дифференцируемым п. в. отображением, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающим N- и N^{-1}-свойствами Лузина), при этом $K_I(x,f)=K_I(x,h)$ и $h(0)=0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h по построению ограниченное. В таком случае найдутся $\varepsilon_1>0$ и $R>0$ такие, что $|h(x)|\le R$ при $|x|<\varepsilon_1$. Следовательно, возможно применение предложения 5. По неравенству (17)

$$|h(x)|=\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\left\{\frac{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}{\log\frac{1}{|x|}}\right\}^{\beta_n}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|f(x)|}{\left\{\log\frac{1}{|x|}\right\}^{\beta_n}}\ge\frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)\left\{\log\frac{1}{\varepsilon_0}\right\}^{\beta_n}}.$$

Однако последнее соотношение противоречит (18). Полученное противоречие доказывает, что точка $b=0$ является устранимой для отображения f. $\square$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство утверждения $1'$ вытекает из оценки (16), справедливой для произвольной функции $Q \in FMO(b)$ (см., например, следствие 2.3 в [17] либо лемму 6.1 в [7, гл. VI]), а также леммы 1. $\Box$

Следствие 2. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ такая, что $K_I(x, f) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и $Q(x) \in FMO(b)$.*

Тогда существует $p_0 > 0$, при котором оценка вида

$$\lim_{x \to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0 \tag{19}$$

влечет, что $b = 0$ является устранимой особой точкой для отображения f.

Доказательство вытекает из утверждения $1'$ и следствия 1. $\Box$

Всюду далее $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, dS, \tag{20}$$

где dS — элемент площади поверхности S.

Теорема 1. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое п. в. отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N- и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta)$ имеет место неравенство (2), где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$ такая, что $K_I(x, f) \le Q(x)$ при п. в. $x \in D$ и $q_b(r) \le C\left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}$ при $r \to 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Если, кроме того, при $p_0 = \left(\frac{1}{C}\right)^{1/(n-1)}$ имеет место оценка вида (19), то точка $b = 0$ является устранимой для отображения f.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < \min\{\mathrm{dist}(0, \partial D), 1\}$. Полагаем $\psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \Bigg(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n}\, dS \Bigg)\, dr \le C\omega_{n-1} I(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

где, как и прежде, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}$. Отсюда заключаем, что при указанной выше функции ψ имеют место условия (6) и (7) леммы 1. Таким образом, первое утверждение теоремы 1 установлено. Второе утверждение этой теоремы вытекает из следствия 1. $\Box$

4. Основные следствия. Точность условий

Напомним, что $y_0 \in D$ — точка ветвления отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности U точки y_0 сужение отображения $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления f принято обозначать через B_f. В более ранней работе автора доказано следующее утверждение (см., например, теорему 1 в [22]). Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, для которого либо $K_O(x, f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$, либо $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, и $m(B_f) = 0$. Тогда f является отображением с конечным искажением длины, т. е. дифференцируемым п. в. отображением, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающим N- и N^{-1}-свойствами Лузина. Исходя из сказанного выше, на основании утверждения $1'$ и теоремы 1 получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $b \in D$ и $f : D\setminus\{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$, для которого либо $K_O(x, f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$, либо $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$, и $m(B_f) = 0$. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta)$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C(\log(1/|x - b|))^p,$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$ такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при п. в. $x \in D$ и $Q(x) \in FMO(b)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

Более того, существует $p_0 > 0$, при котором условие вида

$$\lim_{x\to b} \frac{|f(x)|}{\left(\log \frac{1}{|x-b|}\right)^{p_0}} = 0$$

влечет, что точка b является устранимой особой точкой отображения f.

Теорема 3. *Каждое из утверждений теоремы 2 имеет место, если в предположениях этой теоремы вместо условия $Q(x) \in FMO(b)$ потребовать, чтобы $q_b(r) \leq C\left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}$ при $r \to 0$. В этом случае в качестве p_0 можно взять $p_0 = (1/C)^{1/(n-1)}$.*

Следующий результат показывает, что условия на Q, приведенные выше в каждом из утверждений, нельзя ослабить, например, требованием $Q \in L^q_{\mathrm{loc}}$, $q \geq 1$, каким бы большим ни было такое число q.

Теорема 4. *При каждом $p > 0$ и $q \in [1,\infty)$ найдется гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^n\setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, более того, $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ и $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, такой, что $K_I \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$,*

$$|f(x)| \leq 2(\log(1/|x|))^p \tag{21}$$

при всех $x \in B(0, 1/e) \setminus \{0\}$, при этом точка $b = 0$ является для отображения f существенно особой точкой.

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} x,$$

где $\alpha \in (0, n/q(n-1))$. За счет увеличения q можно считать, что $\alpha < 1$. Заметим, что f отображает $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на $\{1 < |y| < 2\}$ в $\mathbb{R}^n$ и предельное множество $C(f, 0)$

равно $\{|y|=1\}$. В частности, отсюда следует, что $x_0=0$ является существенно особой точкой для f. Из определения f также видно, что $f\in C^1(\mathbb{B}^n\setminus\{0\})$ и, следовательно, $f\in W_{\rm loc}^{1,n}$, причем $K_I(x,f)=\big(\frac{1+|x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha}\big)^{n-1}\le\frac{C}{|x|^{(n-1)\alpha}}$ (см. предложение 6.3 в [7, гл. VI]). Стало быть, $K_I(x,f)\in L^q(\mathbb{B}^n)$, поскольку $\alpha(n-1)q<n$. Кроме того, заметим, что f — локально квазиконформное отображение, поэтому $f^{-1}\in W_{\rm loc}^{1,n}$ и, значит, оно является отображением с конечным искажением длины (дифференцируемым п. в. отображением, $f\in ACP\cap ACP^{-1}$, обладающим N- и N^{-1}-свойствами Лузина) в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$ в силу теоремы 4.6 в [6] (см. также теорему 8.1 в [7, гл. VIII]).

По сказанному выше отображение f ограничено в $\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$, в частности, удовлетворяет неравенству $|f(x)|\le 2$ при $x\in\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$. С другой стороны, функция $s(x):=\big(\log\frac{1}{|x|}\big)^q$ при $|x|\le 1/e$ удовлетворяет неравенству $|s(x)|\ge 1$. Отсюда следует соотношение (21).

Таким образом, построено отображение f, имеющее существенно особую точку, которое удовлетворяет, также и всем остальным требованиям теоремы. □

Следующее утверждение указывает на то, что требование открытости f в результатах, приведенных выше, является существенным.

Теорема 5. *Существует дискретное отображение $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, такое, что $K_I\equiv 1$, удовлетворяющее условию*

$$|f(x)|\le(\log(1/|x|))^p \tag{22}$$

при всех $x\in B(0,1/e)\setminus\{0\}$ и любом $p>0$, при этом точка $b=0$ является для отображения f существенно особой точкой.

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ кубами

$$C_{k_1,\dots,k_n}=\prod_{i=1}^n[2k_i-1,2k_i+1],\quad k_i\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим произвольный куб $C_{k_1,\dots,k_n}$ с $k_1,\dots,k_n\ge 0$; случай k_i разных знаков может быть рассмотрен по аналогии. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)\in C_{k_1,\dots,k_n}$. Если $k_1=0$, то $g_{m_1}:=\mathrm{id}$. Пусть $k_1>0$. Положим $f_{1,\dots,1,1}(x)=y_{1,\dots,1}$, где $y_{1,\dots,1,1}$ — симметрическое отражение точки x относительно гиперплоскости $x_1=2k_1-1$. Если $2k_1-3=-1$, то процесс завершен. Пусть $2k_1-3>-1$, тогда $f_{1,\dots,1,2}(x)=y_{1,\dots,1,2}$, где $y_{1,\dots,1,2}$ — симметрическое отражение точки $y_{1,\dots,1}$ относительно гиперплоскости $x_1=2k_1-3$. Если $2k_1-5=-1$, то процесс завершен. Если нет, то продолжаем процесс: $f_{1,\dots,1,3}(x)=y_{1,\dots,1,3}$, и т. д. За конечное число шагов m_1 имеем отображение $g_{m_1}=f_{1,\dots,1,m_1}\circ\dots\circ f_{1,\dots,1,1}$ такое, что образ $g_{m_1}(x)$ точки x лежит в кубе $C_{0,k_2,k_3,\dots,k_n}$.

Далее, если $k_2=0$, то $g_{m_2}:=g_{m_1}$. При $k_2>0$ для точки $x_{m_1}:=g_{m_1}(x)$ проделываем ту же операцию относительно координаты x_2. Полагаем $f_{1,\dots,1,2,m_1}(x)=y_{1,\dots,1,2,m_1}$, где $y_{1,\dots,1,2,m_1}$ — симметрическое отражение точки x_{m_1} относительно гиперплоскости $x_2=2k_2-1$. Если $2k_2-3=-1$, то процесс завершен. Если нет, продолжаем до тех пор, пока не получим отображение $g_{m_2}=f_{1,\dots,m_2,m_1}\circ\dots\circ f_{1,\dots,2,m_1}$ такое, что $g_{m_2}(x_{m_1})\in C_{0,0,k_3,\dots,k_n}$.

Через некоторое число шагов $m_0=m_1+m_2+\dots+m_n$ приходим к отображению $G_0=g_{m_n}\circ g_{m_{n-1}}\circ\dots g_{m_2}\circ g_{m_1}$ такому, что образ x_{m_n} точки x при отображении G_0 лежит в кубе $C_{0,0,0,\dots,0}$. Сжатие $G_1(x)=\frac{\sqrt{n}}{n}x$ переводит $C_{0,0,0,\dots,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^n}$. Положим $G_2:=G_1\circ G_0$.

Заметим, что точка $z_0 = \infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2, причем $C(G_2, \infty) = A_0 \subset \overline{\mathbb{B}^n}$. Тогда отображение

$$g := G_2 \circ G_3, \tag{23}$$

где $G_3(x) = \frac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку $b = 0$, причем

$$C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^n}. \tag{24}$$

По построению отображение G_2, заданное соотношением (23), дискретно, сохраняет длины кривых в $\mathbb{R}^n$, дифференцируемо всюду вне точек целочисленной решетки и обладает N- и N^{-1}-свойствами, поэтому оно, а следовательно, и отображение g по определению являются отображениями с конечным искажением длины. Кроме того, легко видеть, что $K_I(x, g) = 1$. Наконец, $|g(x)| \le 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и, значит, соотношение (22) выполнено при всех $x \in B(0, 1/e) \setminus \{0\}$.

Таким образом, отображение, удовлетворяющее всем условиям теоремы, построено. $\square$

Результаты настоящей статьи опубликованы в виде препринта в [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993. (Results in mathematic and related areas; V. 26, N 3).
3. *Решетняк Ю. Г.* Обобщенные производные и дифференцируемость почти всюду // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 323–334.
4. *Bojarski B., Iwaniec T.* Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in $\mathbb{R}^n$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. 1983. V. 8, N 2. P. 257–324.
5. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math. 1972. V. 509. P. 1–14.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U.,Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 2004. V. 93, N 1. P. 215–236.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
8. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009.
9. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.
10. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. 2003. V. 22. P. 1397–1420.
11. *Миклюков В. М.* Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях // Укр. мат. вестн. 2004. Т. 1, № 3. С. 349–372.
12. *Салимов Р. Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат. 2008. Т. 72, № 5. С. 141–148.
13. *Troyanov M., Vodop'yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.
14. *Ukhlov A. D., Vodop'yanov S. K.* Sobolev spaces and mappings with bounded $(P;Q)$-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Mat. 2009. V. 52, N 4. P. 349–370.
15. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
16. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для неголоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.
17. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. 2005. Т. 2, № 3. С. 395–417.

18. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.

19. *Sevost'yanov E. A.* The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion // Complex Variables Elliptic Equ. 2010. V. 55, N 1–3. P. 91–101.

20. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 1. С. 159–174.

21. *Севостьянов Е. А.* О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, № 10. С. 1389–1400.

22. *Севостьянов Е. А.* Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 7. С. 969–975.

23. *Sevost'yanov E.* On the local behavior of the mappings with non-bounded characteristics. arXiv: 1103.2547v1 [math.CV] 13 Mar 2011, see www.arxiv.org. P. 1–14.

Статья поступила 16 апреля 2011 г.

Севостьянов Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
`brusin2006@rambler.ru, esevostyanov2009@mail.ru`