Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.9

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

Аннотация. Рассматриваются уравнения, описывающие трехмерные стационарные движения двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей. Доказана теорема существования для краевой задачи, соответствующей течениям в ограниченной области, в классе слабых обобщенных решений.

Ключевые слова: краевая задача, динамика смесей, уравнения Навье — Стокса, слабые решения.

Математическая модель бинарной смеси вязких теплопроводных сжимаемых жидкостей (газов), рассмотренная в данной работе, основана на подходе, предложенном в [1], и в некотором роде является обобщением модели Навье — Стокса. Нелокальные результаты для многомерных уравнений смесей с учетом сжимаемости и вязкости составляющих на сегодняшний день получены для стационарных баротропных течений [2]. Более простые модели (в приближении Стокса и квази-стационарные модели) с позиции существования решений в целом изучены в более ранних работах [3–5]. Что касается изучения движений смесей вязких сжимаемых жидкостей с учетом температурных эффектов, то в отличие от сжимаемого теплопроводного газа (см. работы [6–8] и указанную в них библиографию) на данный момент имеются лишь результаты в случае одномерного движения [9, 10]. Методология, применяемая в данной работе, основана на опыте исследований уравнений Навье — Стокса сжимаемых вязких жидкостей [11–14]. В частности, существенное значение имеет использование аналогов так называемого эффективного вязкого давления [12, 15], для которых также удается доказать коммуникативные соотношения для слабых пределов.

1. Постановка задачи и основной результат

Предполагается, что бинарная смесь вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей (газов) заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ евклидова пространства точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ и состояние смеси характеризуется распределением плотностей $\rho_i(\boldsymbol{x})$, давлений $p_i(\boldsymbol{x})$, температур $\theta_i(\boldsymbol{x})$ и полями скоростей $\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{x})$ ее составляющих ($i = 1, 2$). Перечисленные величины удовлетворяют следующим уравнениям [1, 6, 16, 17]:

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.1a}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00390) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 30).

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \operatorname{div} \sigma^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.1b}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \theta_i \boldsymbol{u}^{(i)}) = \operatorname{div}(k(\theta_i)\nabla\theta_i) - \rho_i\theta_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)} + \Gamma_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2. \tag{1.1c}$$

Первые два уравнения (1.1a) выражают законы сохранения массы компонент смеси, уравнения (1.1b) — законы сохранения импульсов, а (1.1c) — законы сохранения энергий составляющих смеси в предположении, что работа внутренних сил пренебрежимо мала по сравнению с эффектом теплопроводности. Тензоры вязких напряжений $\sigma^{(i)}$, $i = 1, 2$, определяются равенствами [1]

$$\sigma^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) = \sum_{j=1}^{2} (2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)}\mathbb{I}), \quad i = 1, 2, \tag{1.1d}$$

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}((\nabla \otimes \boldsymbol{u}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^T),$$

в которых коэффициенты вязкости μ_{ij}, λ_{ij}, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \mu_{11} > 0, \quad 4\mu_{11}\mu_{22} - (\mu_{12} + \mu_{21})^2 > 0, \\ \nu_{11} > 0, \quad \nu_{12} = 0, \quad 4\nu_{11}\nu_{22} - (\nu_{12} + \nu_{21})^2 > 0, \\ \nu_{ij} = \lambda_{ij} + 2\mu_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \end{gathered} \tag{1.1e}$$

Предполагается, что давление p_i i-й составляющей смеси, векторы $\boldsymbol{J}^{(i)}$, $i = 1, 2$, отражающие интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, и Γ_i, отвечающие за интенсивность обмена энергией, выражаются посредством формул [16, 7, 8]

$$\begin{gathered} p_i = \rho_i^\gamma + \rho_i\theta_i, \quad \gamma > 1, \ i = 1, 2, \\ \boldsymbol{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\boldsymbol{u}^{(2)} - \boldsymbol{u}^{(1)}), \quad a > 0, \ i = 1, 2, \\ \Gamma_i = (-1)^{i+1} b(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a}{2}|\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}|^2, \quad b > 0, \ i = 1, 2. \end{gathered} \tag{1.1f}$$

Массовые силы $\boldsymbol{f}^{(i)}$, $i = 1, 2$, считаются заданными векторными полями, а величины λ_{ij}, μ_{ij}, γ, a, b — заданными константами. Уравнения (1.1a), (1.1b), (1.1c) дополним краевыми условиями:

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.1g}$$

$$k(\theta_i)\nabla\theta_i \cdot \boldsymbol{n} + L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.1h}$$

которые означают, что граница области течения является неподвижной твердой стенкой, на которой поддерживается заданный режим теплообмена с окружающей средой [8]. Следуя [8], предполагаем, что

$$k(\theta) = 1 + \theta^m, \ m = \text{const} > 1, \quad L(\theta) = 1 + \theta^{m-1}, \tag{1.1i}$$

а $\hat{\theta}$ — заданная положительная функция; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. К уравнениям и граничным условиям необходимо добавить условия для плотностей, в качестве которых примем

$$\int_\Omega \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \tag{1.1j}$$

где M_i — заданные постоянные. Отметим, что из (1.1e) следует неравенство (для любых векторных полей $\boldsymbol{u}^{(i)}$ исчезающих на $\partial\Omega$)

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega} L_{ij}(\boldsymbol{u}^{(j)})\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} \geq C_0\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}|\nabla\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\sigma^{(i)} = -\sum_{j=1}^{2}L_{ij}(\boldsymbol{u}^{(j)}), \quad L_{ij} = -\mu_{ij}\Delta - (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\nabla\operatorname{div},$$

где $C_0 > 0$ — постоянная (зависящая от λ_{ij} и μ_{ij}).

В работе используются общепринятые (см., например, [18, 19]) обозначения функциональных пространств: $L_p(\Omega)$ $(W_p^l(\Omega))$ — пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$ включительно). $C^l(\overline{\Omega})$ $(C_0^l(\Omega))$ — банахово пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geq 0$ включительно в $\overline{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не различаем обозначения пространств вектор-функций и скалярных функций.

Определение 1. *Обобщенным решением краевой задачи* (1.1) называются неотрицательные функции $\rho_i \in L_1(\Omega)$, $i = 1, 2$, положительные функции $\theta_i \in W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)$, $i = 1, 2$, и векторные поля $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие следующим условиям:

(A1) $\int\limits_{\Omega}\rho_i\,d\boldsymbol{x} = M_i$, $\rho_i\theta_i \in L_2(\Omega)$, $\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)} \in L_1(\Omega)$, $\theta_i^m\nabla\theta_i \in L_1(\Omega)$, $\rho_i^\gamma \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\rho_i|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1, 2$;

(A2) для любых дифференцируемых функций G_i с ограниченными производными $G_i' \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, и произвольных функций $\psi_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, выполняются интегральные тождества

$$\int_{\Omega}(G_i(\rho_i)\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\psi_i + (G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i)\psi_i\,\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, 2;$$

(A3) для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, выполняются интегральные тождества

$$\sum_{j=1}^{2}\Bigl(\mu_{ij}\int_{\Omega}(\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(j)}):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} + (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(j)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}\Bigr)$$
$$- \int_{\Omega}(\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\otimes\boldsymbol{u}^{(i)}):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}^{(i)})\,d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega}\rho_i^\gamma\,\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int_{\Omega}\rho_i\theta_i\,\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega}(\boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i\boldsymbol{f}^{(i)})\cdot\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2;$$

(A4) для любых $\eta_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, верны интегральные тождества

$$-\int_{\Omega}\rho_i\theta_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\eta_i\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta})\eta_i\,d\sigma + \int_{\Omega}k(\theta_i)\nabla\theta_i\cdot\nabla\eta_i\,d\boldsymbol{x}$$
$$= -\int_{\Omega}\rho_i\theta_i\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)}\eta_i\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega}\Gamma_i\eta_i\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2.$$

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Для любых* $\boldsymbol{f}^{(i)} \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, $\hat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\hat{\theta} > 0$, $\gamma > 3$, $m > m_0(\gamma)$, $m_0(\gamma) = 6(\gamma-1)(2\gamma-1)/((\gamma-3)(6\gamma-1))$ *краевая задача* (1.1) *имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Доказательству этого утверждения посвящена оставшаяся часть статьи, ограниченный объем которой позволяет лишь кратко охарактеризовать основные этапы доказательства. Обобщенное решение задачи (1.1) будет получено как предел однопараметрического (с параметром $\varepsilon \in (0, 1]$) семейства решений следующей регуляризованной задачи:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)}) + \varepsilon\rho_i = \varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3a}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) + \nabla p_i + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\boldsymbol{u}^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^{(i)}$$
$$= \operatorname{div}\sigma^{(i)} + \boldsymbol{J}^{(i)}(\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}) + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3b}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i\theta_i \boldsymbol{u}^{(i)}) = \operatorname{div}\left(k(\theta_i)\frac{\varepsilon + \theta_i}{\theta_i}\nabla\theta_i\right) - \rho_i\theta_i \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)} + \Gamma_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3c}$$

$$\boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3d}$$

$$\nabla\rho_i \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3e}$$

$$k(\theta_i)\frac{\varepsilon + \theta_i}{\theta_i}\nabla\theta_i \cdot \boldsymbol{n} + \varepsilon\ln\theta_i + L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta}) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \tag{1.3f}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i = 1, 2. \tag{1.3g}$$

2. Существование сильного обобщенного решения задачи (1.3)

Определение 2. *Сильным обобщенным решением задачи* (1.3) называются неотрицательные функции ρ_i^{ε}, $i = 1, 2$, положительные функции θ_i^{ε}, $i = 1, 2$, и векторные поля $\boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(i)}$, $i = 1, 2$, принадлежащие пространству $W_q^2(\Omega)$, $q \in [1, +\infty)$, такие, что уравнения (1.3a), (1.3b), (1.3c) выполнены п. в. в Ω, краевые условия (1.3d), (1.3e), (1.3f) — п. в. на $\partial\Omega$, и выполнено (1.3g).

Теорема 2.1. *Пусть вектор-функции* $\boldsymbol{f}^{(i)}$, $i = 1, 2$, *скалярная функция* $\hat{\theta}$, *показатели* γ *и* m *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1]$ *краевая задача* (1.3) *имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение* ρ_i^{ε}, θ_i^{ε}, $\boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(i)}$, $i = 1, 2$, *причем всякое решение этого класса удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\big\|\rho_i^{\varepsilon}\big\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} + \big\|\boldsymbol{u}_{\varepsilon}^{(i)}\big\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + \big\|\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\big\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} + \big\|\theta_i^{\varepsilon}\big\|_{L_{3m}(\Omega)}$$
$$+ \big\|\nabla\theta_i^{\varepsilon}\big\|_{L_2(\Omega)} + \big\|\nabla s_i^{\varepsilon}\big\|_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_{\partial\Omega}\operatorname{ch}\big(s_i^{\varepsilon}\big)\,d\sigma\Bigg) \le C, \tag{2.1}$$

где $s_i^{\varepsilon} = \ln\theta_i^{\varepsilon}$, $i = 1, 2$, *положительная величина* C *зависит только от* $\|\boldsymbol{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, $\|\hat{\theta}\|_{C(\partial\Omega)}$, $\min\hat{\theta}$, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, m, Ω, a, b, M_i *(и не зависит от* ε*).*

Условимся, что далее через C будут обозначаться различные постоянные, которые могут зависеть только от перечисленных выше данных задачи (но не зависят от параметра ε).

Доказательство теоремы 2.1. Докажем сначала второе утверждение теоремы (касающееся оценки (2.1)): предположим, что функции $\rho_i \geq 0$, $\theta_i > 0$, $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, класса $W_q^2(\Omega)$, $q \in [1, +\infty)$, образуют решение задачи (1.3), и докажем, что имеет место оценка (2.1). Умножая обе части уравнений (1.3b) скалярно на $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и интегрируя по частям, получим тождество

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \sigma^{(i)} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)})\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i |\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma}\, d\boldsymbol{x} + \varepsilon\gamma \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2\, d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \frac{\varepsilon}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)}) \cdot \boldsymbol{u}^{(i)}\, d\boldsymbol{x}. \quad (2.2)$$

Из этого тождества в силу (1.2) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{2} \|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{2} \|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)} + C \sum_{i=1}^{2} \|\rho_i \theta_i\|^2_{L_2(\Omega)} + C. \quad (2.3)$$

Интегрируя уравнения (1.3c) по Ω, получим тождество

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta})\, d\sigma + \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} s_i\, d\sigma = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \theta_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \Gamma_i\, d\boldsymbol{x}, \quad (2.4)$$

$s_i = \ln \theta_i$, $i = 1, 2$. Складывая равенства (2.2) и (2.4), после элементарных преобразований приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta})\, d\sigma + \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} s_i\, d\sigma = -\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \sigma^{(i)} : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(i)})\, d\boldsymbol{x}$$
$$- \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i |\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\, d\boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\, d\boldsymbol{x} - \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma}\, d\boldsymbol{x}$$
$$- \varepsilon\gamma \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-2} |\nabla \rho_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{|\Omega|} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{i=1}^{2} M_i \int\limits_{\Omega} \rho_i^{\gamma-1}\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)} \cdot \boldsymbol{u}^{(i)}\, d\boldsymbol{x}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, разделив обе части уравнений (1.3c) на θ_i и интегрируя результат по области Ω, получим следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} k(\theta_i) \frac{\varepsilon + \theta_i}{\theta_i} |\nabla s_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i) \frac{\hat{\theta}}{\theta_i}\, d\sigma - \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} s_i e^{-s_i}\, d\sigma$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \frac{\Gamma_i}{\theta_i}\, d\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega} (\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla s_i - \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla \rho_i)\, d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)\, d\sigma. \quad (2.6)$$

Правую часть равенства (2.6) представим в виде

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)\, d\sigma = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta})\, d\sigma + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)(1 + \hat{\theta})\, d\sigma - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)\theta_i\, d\sigma$$

и воспользуемся соотношением (2.5). Тогда получаем тождество

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\sigma^{(i)}:(\nabla\otimes\boldsymbol{u}^{(i)})\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}k(\theta_i)\frac{\varepsilon+\theta_i}{\theta_i}|\nabla s_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}L(\theta_i)\frac{\hat\theta}{\theta_i}\,d\sigma$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}L(\theta_i)\theta_i\,d\sigma+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\Gamma_i}{\theta_i}\,d\boldsymbol{x}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}^{(i)}|^2\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\gamma\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}(s_i^-e^{s_i^-}+s_i^+)\,d\sigma=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla s_i-\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i)\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}L(\theta_i)(1+\hat\theta)\,d\sigma+\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma-1}\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}+\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}(s_i^+e^{-s_i^+}+s_i^-)\,d\sigma,\qquad(2.7)$$

где $s^+=\max(0,s)$, $s^-=\max(0,-s)$. Используя (1.3a), нетрудно получить

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}(\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla s_i-\boldsymbol{u}^{(i)}\cdot\nabla\rho_i)\,d\boldsymbol{x}\le\frac{\varepsilon\gamma}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma-2}|\nabla\rho_i|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|\nabla s_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\theta_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\varepsilon}{4}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}s_i^-e^{s_i^-}\,d\sigma$$
$$-\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_{\Omega}s_i^+\,d\boldsymbol{x}+C\left(\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right).\qquad(2.8)$$

С учетом неравенств

$$s_i^-<\frac{1}{8}s_i^-e^{s_i^-}+1,\quad s_i^+e^{-s_i^+}<\frac{1}{8}s_i^-e^{s_i^-}-s_i^-+1$$

оценим последнее слагаемое в правой части (2.7) следующим образом:

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}(s_i^+e^{-s_i^+}+s_i^-)\,d\sigma\le\frac{\varepsilon}{4}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}s_i^-e^{s_i^-}\,d\sigma-\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}s_i^-\,d\sigma+C.\qquad(2.9)$$

Учитывая неравенства (2.8), (2.9), а также оценки

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}L(\theta_i)(1+\hat\theta)\,d\sigma\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}\theta_i^m\,d\sigma+C,$$

$$\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}M_i\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma-1}\,d\boldsymbol{x}\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,d\boldsymbol{x}+C,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\rho_i \boldsymbol{f}^{(i)}\cdot\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x}\le C\sum_{i=1}^{2}\bigl(\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\bigr),$$

из формулы (2.7) получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{1+\theta_i^m}{\theta_i^2}|\nabla\theta_i|^2\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(L(\theta_i)\frac{\hat{\theta}}{\theta_i}+L(\theta_i)\theta_i+\varepsilon|s_i|\right)d\sigma$$
$$\le C\left(\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\theta_i\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right). \quad (2.10)$$

Из (2.10), в частности, приходим к тому, что норма в $W_2^1(\Omega)$ функции $\theta_i^{\frac{m}{2}}$ ограничена правой частью неравенства. В силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{2}\|\theta_i\|^m_{L_{3m}(\Omega)}\le C\left(\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\theta_i\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right).$$

Из этого неравенства и неравенства (2.3) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{2}\bigl(\|\theta_i\|^m_{L_{3m}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\bigr)\le C\left(\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\theta_i\|^2_{L_2(\Omega)}+1\right). \quad (2.11)$$

Из условий (1.3g), интерполяционного неравенства в L_p-пространствах и неравенства Гёльдера вытекают соотношения

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^2_{L_2(\Omega)}\le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}}_{L_{2\gamma}(\Omega)}, \quad (2.12)$$

$$C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\theta_i\|^2_{L_2(\Omega)}\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|\theta_i\|^m_{L_{3m}(\Omega)}+C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\,\frac{m}{m-2}}_{L_{2\gamma}(\Omega)}. \quad (2.13)$$

Из (2.11)–(2.13), очевидно, имеем

$$\sum_{i=1}^{2}\bigl(\|\theta_i\|^m_{L_{3m}(\Omega)}+\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\bigr)\le C\left(\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}}_{L_{2\gamma}(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\,\frac{m}{m-2}}_{L_{2\gamma}(\Omega)}+1\right). \quad (2.14)$$

Для вывода других оценок решений задачи (1.3) воспользуемся оператором Боговского, обладающего свойствами [20]:

a) $\boldsymbol{v}=B[g]$ — решение задачи

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=g \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{v}=0 \text{ на } \partial\Omega;$$

b) имеет место оценка

$$\|B[g]\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\le C\|g\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Возьмем в качестве пробных функций в слабой формулировке уравнений (1.3b) функции $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}=B[g_i]$, где

$$g_i=\rho_i^\gamma-\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i^\gamma\,d\boldsymbol{x}, \quad i=1,2.$$

Используя свойство (2.15), получим при $m > 1$, $\gamma > 3$ неравенство

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma}_{L_{2\gamma}(\Omega)} \le C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}}_{L_{2\gamma}(\Omega)} + C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(j)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)}\right)\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|^{\frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}}_{L_{2\gamma}(\Omega)}$$
$$+\, C\sum_{j=1}^{2}\|\boldsymbol{u}^{(j)}\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} + C\left(\sum_{j=1}^{2}\|\theta_j\|^m_{L_{3m}(\Omega)}\right)\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} + C\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} + C. \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.16) вытекает соотношение

$$[R(\boldsymbol{\rho})]^{\gamma} \le C + C\sum_{i=1}^{9}[R(\boldsymbol{\rho})]^{\chi_i}, \tag{2.17}$$

где $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1,\rho_2)$, $R(\boldsymbol{\rho}) = \sum\limits_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)}$, $\chi_1 = \gamma\frac{2\gamma-3}{2\gamma-1}$, $\chi_2 = \frac{4\gamma-1}{2\gamma-1}$, $\chi_3 = \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\cdot\frac{m}{m-2}+1$, $\chi_4 = \frac{2\gamma}{2\gamma-1}$, $\chi_5 = \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\cdot\frac{m}{m-2}$, $\chi_6 = \frac{11\gamma}{3(2\gamma-1)}$, $\chi_7 = \frac{10\gamma}{3(2\gamma-1)}\cdot\frac{m}{m-2}+\frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}$, $\chi_8 = \frac{5\gamma}{3(2\gamma-1)}$, $\chi_9 = 1$. Так как при выполнении условий теоремы 2.1 верно неравенство $\gamma > \max\limits_{1\le i\le 9}\{\chi_i\}$, из (2.17) получаем первую оценку решений семейства краевых задач (1.3):

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \le C. \tag{2.18}$$

Из (2.14) и (2.18) вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} + \|\theta_i\|_{L_{3m}(\Omega)}\right) \le C. \tag{2.19}$$

В силу неравенств $\frac{1+\theta_i^m}{\theta_i^2} \ge 1$, $i=1,2$, $m>2$, из соотношений (2.18), (2.19), (2.13) и (2.10) следует, что

$$\sum_{i=1}^{2}\|\nabla\theta_i\|_{L_2(\Omega)} \le C. \tag{2.20}$$

Из оценок (2.18), (2.19), ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$ и неравенства Гёльдера выводим, что

$$\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} \le C,$$

поэтому из неравенства (см. [21, с. 87])

$$\sum_{i=1}^{2}\|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} \le C\left(1+\sum_{i=1}^{2}\|\rho_i\boldsymbol{u}^{(i)}\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\right)$$

получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{2}\|\varepsilon\nabla\rho_i\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} \le C. \tag{2.21}$$

Из неравенств (2.19), (2.18), (2.13) приходим к оценке выражения, стоящего в левой части неравенства (2.10), в частности, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\theta_i+\theta_i^{-1}\right)d\sigma = 2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega}\operatorname{ch}(s_i)\,d\sigma \le C, \tag{2.22}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|\nabla s_i\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\theta_i^{-2}|\nabla\theta_i|^2\,d\boldsymbol{x} \le C. \tag{2.23}$$

Оценки (2.18), (2.19), (2.20)–(2.23) доказывают неравенство (2.1).

Для доказательства первого утверждения теоремы, т. е. существования сильного обобщенного решения краевой задачи (1.3), произведем замену искомых функций по формуле $s_i = \ln\theta_i$, $i = 1,2$, в результате чего уравнения (1.3c) и граничные условия (1.3f) примут соответственно вид

$$\operatorname{div}((1+e^{ms_i})(\varepsilon+e^{s_i})\nabla s_i) = \operatorname{div}(\rho_i e^{s_i}\boldsymbol{u}^{(i)})+\rho_i e^{s_i}\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)}-\Gamma_i \text{ в } \Omega, \quad i=1,2, \tag{2.24}$$

$$\Gamma_i = (-1)^{i+1}b(e^{s_2}-e^{s_1}) + \frac{1}{2}a|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}|^2, \quad i=1,2,$$

$$(1+e^{ms_i})(\varepsilon+e^{s_i})\nabla s_i\cdot\boldsymbol{n} + \varepsilon s_i + L(e^{s_i})(e^{s_i}-\hat{\theta}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2. \tag{2.25}$$

Докажем существование сильного обобщенного решения видоизмененной краевой задачи (1.3a), (1.3b), (2.24), (1.3d), (1.3c), (2.25), (1.3g) (для удобства ссылок назовем ее *задачей* A_ε) в функциональных классах s_i, $\rho_i \in W_q^2(\Omega)$, $\rho_i \ge 0$ п. в. в Ω, $\boldsymbol{u}^{(i)} \in W_q^2(\Omega)$, $\frac{3}{2} < q < \infty$, $i=1,2$, и тем самым уравнения (1.3a), (1.3b), (2.24) будут выполнены п. в. в Ω и краевые условия (1.3d), (1.3c), (2.25) — п. в. на $\partial\Omega$. Из этого результата будет следовать первое утверждение теоремы 2.1, в частности положительность температур θ_i, $i=1,2$. Доказательство существования сильного решения задачи A_ε проведем при помощи принципа неподвижной точки Лере — Шаудера (см. [22, с. 258]). Соответствующий оператор строится в виде суперпозиции операторов, порожденных некоторыми эллиптическими краевыми задачами (ниже они формулируются) и структурой (1.3a), (1.3b), (2.24), (2.25).

Пусть показатель $p > 3$ и вектор-функция $\boldsymbol{u}_*$ принадлежит B_p, где

$$B_p = \left\{\boldsymbol{v} \in W_p^2(\Omega) : \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \partial\Omega\right\}.$$

Как известно [7, 8], краевая задача

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}_*) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|} \quad \text{в } \Omega,$$

$$\nabla\rho\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \int\limits_{\Omega}\rho\,d\boldsymbol{x} = M$$

имеет единственное неотрицательное решение $\rho \in W_q^2(\Omega)$, где $q \ge 1$ произвольно. Тем самым определен оператор S из B_p в $W_q^2(\Omega)$ такой, что $\rho = S(\boldsymbol{u}_*)$. Этот оператор непрерывен и компактен (см. [7, 8]), допускает продолжение на пространство $W_p^1(\Omega)$, если $p > \frac{3}{2}$, и пространство $L_p(\Omega)$, если $p > 3$, причем справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\rho\|_{W_p^2(\Omega)} &= \|S(\boldsymbol{u}_*)\|_{W_p^2(\Omega)} \le C_1(\varepsilon, \|\boldsymbol{u}_*\|_{W_p^1(\Omega)}), \quad p > \frac{3}{2},\\ \|\rho\|_{W_p^1(\Omega)} &= \|S(\boldsymbol{u}_*)\|_{W_p^1(\Omega)} \le C_2(\varepsilon, \|\boldsymbol{u}_*\|_{L_p(\Omega)}), \quad p > 3.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Далее, из классических результатов для эллиптических уравнений [23–25] следует, что краевая задача

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\boldsymbol{u}^{(j)} = \boldsymbol{H}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad \boldsymbol{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \tag{2.27}$$

при условии: $\boldsymbol{H}^{(i)} \in L_p(\Omega)$, $i = 1, 2$, имеет единственное решение $\boldsymbol{u}^{(i)} \in W_p^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, при этом оператор $\Lambda : L_p(\Omega) \to W_p^2(\Omega)$ такой, что $\mathbf{u} = \Lambda(\mathbf{H})$, $\mathbf{H} = (\boldsymbol{H}^{(1)}, \boldsymbol{H}^{(2)})$, $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)})$, задачи (2.27) ограничен:

$$\|\Lambda(\mathbf{H})\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C_3(p, \lambda_{ij}, \mu_{ij}, \Omega)\, \|\mathbf{H}\|_{L_p(\Omega)}. \tag{2.28}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\operatorname{div}(k\nabla s) = g \quad \text{в } \Omega, \quad k\nabla s \cdot \boldsymbol{n} + \varepsilon s = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2.29}$$

Если $g \in L_p(\Omega)$, $\varphi \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$, $k \in C^1(\Omega)$, $k > 0$, то согласно классическим результатам для эллиптических уравнений [22, 26–28] задача (2.29) имеет единственное решение $s \in W_p^2(\Omega)$, при этом выполнено неравенство

$$\|s\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C_4(\|g\|_{L_p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}). \tag{2.30}$$

Условимся оператор решения задачи (2.29) при указанных условиях обозначать через Q, т. е. $s = Q(g, k, \varphi)$.

Наконец, в соответствии со структурой уравнений (1.3b), правых частей и коэффициентов уравнений (2.24) и структурой граничных условий (2.25) следует ввести операторы

$$F^{(i)}(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, s) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho\boldsymbol{u} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \rho\, d\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})$$
$$- \nabla(\rho^\gamma) - \nabla(\rho e^s) + (-1)^{i+1}a(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \rho\boldsymbol{f}^{(i)}, \quad i = 1, 2; \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered} G_i(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, s, r) = -\operatorname{div}(\rho e^s\boldsymbol{u}) - \rho e^s \operatorname{div}\boldsymbol{u} + \Gamma_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, s, r), \\ \Gamma_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, s, r) = (-1)^{i+1}b(e^r - e^s) + \frac{1}{2}a|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2, \quad i = 1, 2; \end{gathered} \tag{2.32}$$

$$k(s) = (1 + e^{ms})(\varepsilon + e^s), \quad \varphi(s) = -L(e^s)(e^s - \hat{\theta}). \tag{2.33}$$

Если определить оператор

$$\Psi : B_p \times W_p^2(\Omega) \to B_p \times W_p^2(\Omega)$$

по формулам

$$\begin{gathered} \Psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}) = (\Lambda(\boldsymbol{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{s})), Q(\widetilde{G}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{s})), Q(\widetilde{G}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}))), \\ \boldsymbol{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}) = (F^{(1)}(S(\boldsymbol{u}^{(1)}), \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}, s_1), F^{(2)}(S(\boldsymbol{u}^{(2)}), \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(1)}, s_2)), \\ \widetilde{G}_1(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}) = Q(G_1(S(\boldsymbol{u}^{(1)}), \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}, s_1, s_2), k(s_1), \varphi(s_1)), \\ \widetilde{G}_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}) = Q(G_2(S(\boldsymbol{u}^{(2)}), \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(1)}, s_2, s_1), k(s_2), \varphi(s_2)), \end{gathered}$$

то, очевидно, его неподвижная точка $(\mathbf{u}, \boldsymbol{s})$, $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)})$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2)$ с соответствующими функциями $\rho_i = S(\boldsymbol{u}^{(i)})$, $i = 1, 2$, является решением краевой задачи A_ε. Существование неподвижной точки оператора гарантирует теорема Лере — Шаудера, поскольку оператор Ψ вполне непрерывен (следует из перечисленных свойств операторов S, Λ, Q и непрерывности в соответствующих нормах операторов (2.31)–(2.33)) и множество всех решений уравнения

$$t\Psi(\mathbf{u}, \boldsymbol{s}) = (\mathbf{u}, \boldsymbol{s}), \quad t \in [0, 1],$$

ограничено в пространстве $B_p \times W_p^2(\Omega)$.

Теорема 2.1 доказана.

3. Предельный переход

В этом разделе излагается процедура предельного перехода в регуляризованной задаче (1.3) при $\varepsilon \to 0$. В силу оценки (2.1) из семейства решений ρ_i^ε, θ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, можно извлечь последовательность (за которой сохраним прежние обозначения) такую, что при $\varepsilon \to 0$

$$\rho_i^\varepsilon \to \rho_i \quad \text{слабо в } L_{2\gamma}(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{3.1}$$

$$\theta_i^\varepsilon \to \theta_i \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \cap L_{3m}(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{3.2}$$

$$s_i^\varepsilon \to s_i \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \to \boldsymbol{u}^{(i)} \quad \text{слабо в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \tag{3.4}$$

и в силу компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, $1 \le q < 6$,

$$\theta_i^\varepsilon \to \theta_i \quad \text{сильно в } L_q(\Omega), \quad q \in [1, 3m),\ i = 1, 2, \tag{3.5}$$

$$s_i^\varepsilon \to s_i \quad \text{сильно в } L_q(\Omega), \quad q \in [1, 6),\ i = 1, 2, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)} \to \boldsymbol{u}^{(i)} \quad \text{сильно в } L_q(\Omega), \quad q \in [1, 6),\ i = 1, 2. \tag{3.7}$$

Кроме того, из (2.18), (2.19), (2.13) следует, что правая часть тождества (2.2) ограничена равномерно по ε, поэтому имеет место оценка

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\rho_i^\varepsilon\right)^{\gamma-2} \left|\nabla \rho_i^\varepsilon\right|^2 d\boldsymbol{x} \le C. \tag{3.8}$$

Из (3.8) и уравнений (1.3a) вытекает

$$\left\|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{3.9}$$

Действительно, умножая (1.3a) на ρ_i^ε и интегрируя по частям, получим

$$\varepsilon \left\|\nabla \rho_i^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \varepsilon \left\|\rho_i^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}^2 = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left(\rho_i^\varepsilon\right)^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\, d\boldsymbol{x} + \varepsilon M_i^2 |\Omega|^{-1}.$$

В силу (3.1) и (3.4) интеграл в правой части данного равенства равномерно ограничен, и мы приходим к соотношению (3.9). Учитывая оценку (2.21) и используя интерполяционное неравенство

$$\left\|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\right\|_{L_q(\Omega)} \le C_0 \left\|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}^\theta \left\|\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon\right\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}^{1-\theta},$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p}, \quad p = \frac{6\gamma}{\gamma+3} > 2, \quad 0 < \theta < 1,$$

получаем, что

$$\varepsilon \nabla \rho_i^\varepsilon \to 0 \quad \text{сильно в } L_q(\Omega) \text{ для } 1 \le q < \frac{6\gamma}{\gamma+3}. \tag{3.10}$$

Заметим далее, что из (2.18), (2.19), (2.13) и (2.10) следуют неравенства

$$\left\|\left(\theta_i^\varepsilon\right)^{\frac{m}{2}}\right\|_{W_2^1(\Omega)} \le C, \quad i = 1, 2, \tag{3.11}$$

поэтому в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_4(\partial\Omega)$ справедлива оценка

$$\left\| \theta_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} \right\|_{L_{2m}(\partial\Omega)} \le C, \quad i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Из (3.2) следует, что

$$\theta_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} \to \theta_i|_{\partial\Omega} \quad \text{в } L_q(\partial\Omega),\ q \in [1, 4)$$

поэтому из (3.12) и интерполяционного неравенства вытекает соотношение

$$\theta_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} \to \theta_i|_{\partial\Omega} \quad \text{сильно в } L_q(\partial\Omega), \quad q \in [1, 2m),\ i = 1, 2. \tag{3.13}$$

Совершая предельный переход в слабом смысле по выбранным последовательностям в уравнениях (1.3), получим, что предельные функции $\rho_i \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $\rho_i \ge 0$, $\theta_i \in W_2^1(\Omega) \cap L_{3m}(\Omega) \cap L_{2m}(\partial\Omega)$, $\theta_i > 0$, $\boldsymbol{u}^{(i)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, при $\gamma > 3$, $m > m_0(\gamma)$ ($m_0(\gamma)$ определено в теореме 1.1) удовлетворяют следующим интегральным соотношениям:

$$\int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla\psi_i \, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\, \psi_i \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2, \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} \Bigg(\mu_{ij} \int\limits_\Omega (\nabla \otimes \boldsymbol{u}^{(j)}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} + (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int\limits_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(j)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \Bigg) \\ - \int\limits_\Omega (\rho_i \boldsymbol{u}^{(i)} \otimes \boldsymbol{u}^{(i)}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}^{(i)}) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \overline{\rho_i^\gamma} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \\ + \int\limits_\Omega \rho_i \theta_i \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega (\boldsymbol{J}^{(i)} + \rho_i \boldsymbol{f}^{(i)}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi}^{(i)} \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2,\end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}- \int\limits_\Omega \rho_i \theta_i \boldsymbol{u}^{(i)} \cdot \nabla\eta_i \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta_i)(\theta_i - \hat{\theta})\eta_i \, d\sigma + \int\limits_\Omega k(\theta_i) \nabla\theta_i \cdot \nabla\eta_i \, d\boldsymbol{x} \\ = - \int\limits_\Omega \theta_i \overline{\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}} \eta_i \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \Gamma_i \eta_i \, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \eta_i \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2,\end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\int\limits_\Omega \rho_i \, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.17}$$

где $\overline{\rho_i^\gamma}$ и $\overline{\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}}$ обозначают слабые пределы последовательностей $\left(\rho_i^\varepsilon\right)^\gamma$ и $\rho_i^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ соответственно.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 требуется, таким образом, доказать формулы

$$\overline{\rho_i^\gamma} = \rho_i^\gamma, \quad i = 1, 2, \tag{3.18}$$

$$\overline{\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}} = \rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \tag{3.19}$$

и тот факт, что слабые решения ρ_i, $i = 1, 2$, уравнений неразрывности (1.1a) являются ренормализованными решениями этих уравнений (в смысле условия (A2) определения 1).

Обобщая подход, предложенный в [21], доказательство соотношений (3.18), (3.19) основываем на коммуникативном свойстве так называемых эффективных вязких потоков компонент смеси, которые в данном случае определяются формулами

$$\rho_i^\gamma + \rho_i \theta_i - (\lambda_{i1} + 2\mu_{i1}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)} - (\lambda_{i2} + 2\mu_{i2}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(2)}, \quad i = 1, 2.$$

Лемма 3.1. *Пусть ρ_i^ε, θ_i^ε, $\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, — последовательность решений задачи (1.3), существование которых гарантируется теоремой 2.1, и пусть ρ_i, θ_i, $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $i = 1, 2$, — ее предел, определенный в (3.1), (3.2), (3.4). Тогда для любой $\tau \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место соотношения*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \rho_j^\varepsilon\big[(\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon\theta_i^\varepsilon - (\lambda_{i1}+2\mu_{i1})\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} - (\lambda_{i2}+2\mu_{i2})\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}\big]\tau^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \int\limits_\Omega \rho_j\big[\overline{\rho_i^\gamma} + \rho_i\theta_i - (\lambda_{i1}+2\mu_{i1})\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(1)} - (\lambda_{i2}+2\mu_{i2})\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(2)}\big]\tau^2\,d\boldsymbol{x}, \quad i, j = 1, 2. \tag{3.20}$$

Доказательство леммы 3.1 проводится аналогично доказательству подобного утверждения в [2] (см. лемму 1) и отличается лишь очевидными техническими деталями, связанными с предельным переходом в интегралах, содержащих температуры θ_i, $i = 1, 2$.

Докажем теперь формулы (3.18). В [2, с. 62, 63] доказано, что функции ρ_i, $i = 1, 2$, являются ренормализованными решениями уравнений неразрывности (1.1a) и справедливы соотношения

$$\int\limits_\Omega \rho_i\,\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(i)}\,d\boldsymbol{x} = 0,\ i = 1, 2, \quad \int\limits_\Omega \rho_i^\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(i)}\,d\boldsymbol{x} \le \varepsilon C,\ i = 1, 2. \tag{3.21}$$

Далее, формула (3.20) при $i = j = 1$ и условие $\lambda_{12} + 2\mu_{12} = 0$ позволяют утверждать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \big[(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon - (\lambda_{11}+2\mu_{11})\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\big]\rho_1^\varepsilon\tau^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$= \int\limits_\Omega \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1 - (\lambda_{11}+2\mu_{11})\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(1)}\big]\rho_1\tau^2\,d\boldsymbol{x}. \tag{3.22}$$

Возьмем неубывающую последовательность функций τ_n такую, что $\tau_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \tau_n \le 1$, $\tau_n \to 1$ поточечно при $n \to \infty$. В силу (3.22), (3.21) для любых $m \le n$ получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\Omega \big[(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon\big]\rho_1^\varepsilon\tau_m^2\,d\boldsymbol{x} \le \limsup_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \big[(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon\big]\rho_1^\varepsilon\tau_n^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$\le \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\Omega \big[(\rho_1^\varepsilon)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon - (\lambda_{11}+2\mu_{11})\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\big]\rho_1^\varepsilon\tau_n^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+ (\lambda_{11}+2\mu_{11})\limsup_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\Omega \tau_n^2\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon\,d\boldsymbol{x}$$
$$\le \int\limits_\Omega \tau_n^2\big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1 - (\lambda_{11}+2\mu_{11})\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(1)}\big]\rho_1\,d\boldsymbol{x}$$
$$+ (\lambda_{11}+2\mu_{11})\limsup_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\Omega \big|\tau_n^2 - 1\big|\big|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\big|\rho_1^\varepsilon\,d\boldsymbol{x} + (\lambda_{11}+2\mu_{11})\limsup_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\rho_1^\varepsilon\,d\boldsymbol{x}$$
$$\le \int\limits_\Omega \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1\big]\rho_1\,d\boldsymbol{x} + (\lambda_{11}+2\mu_{11})\int\limits_\Omega \big|\tau_n^2 - 1\big||\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{(1)}|\rho_1\,d\boldsymbol{x} + \eta_1(n)$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1\big]\rho_1 \, d\boldsymbol{x} + \eta_1(n) + \eta_2(n), \tag{3.23}$$

где $\eta_1(n)$, $\eta_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, из (3.23) (в результате предельного перехода при $n \to \infty$) следуют неравенства

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\Omega} \big[\big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon\big]\rho_1^\varepsilon\tau_m^2 \, d\boldsymbol{x} \leq \int\limits_{\Omega} \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1\big]\rho_1 \, d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{3.24}$$

Далее, так как функция $z \mapsto z^\gamma + \theta z$ ($\gamma > 1$, $\theta > 0$) монотонна на $\mathbb{R}_0^+$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \tau_m^2 \big[\big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon - v^\gamma - v\theta_1^\varepsilon\big] \cdot \big(\rho_1^\varepsilon - v\big) \, d\boldsymbol{x} \geq 0$$

для любой $v \in K := \{v \in L_{2\gamma}(\Omega) : v \geq 0$ п. в. в $\Omega\}$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} \tau_m^2 \big[\big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon\big]\rho_1^\varepsilon \, d\boldsymbol{x} \geq \int\limits_{\Omega} \tau_m^2 \big[v^\gamma + v\theta_1^\varepsilon\big]\big[\rho_1^\varepsilon - v\big] \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \tau_m^2 \big[\big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_1^\varepsilon\theta_1^\varepsilon\big] v \, d\boldsymbol{x}. \tag{3.25}$$

Из (3.24), (3.25) вытекают неравенства

$$\int\limits_{\Omega} \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1\big]\rho_1 \, d\boldsymbol{x} \geq \int\limits_{\Omega} \tau_m^2 [v^\gamma + v\theta_1][\rho_1 - v] \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \tau_m^2 \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1\big] v \, d\boldsymbol{x}, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{3.26}$$

Совершая в (3.26) предельный переход при $m \to \infty$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} \big(\overline{\rho_1^\gamma} - v^\gamma\big)(\rho_1 - v) \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \theta_1(\rho_1 - v)^2 \, d\boldsymbol{x} \geq 0 \quad \forall\, v \in K. \tag{3.27}$$

Полагая в (3.27) $v = \rho_1 + \eta\psi$, $\psi \in K$, $\eta \to 0+$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \big(\overline{\rho_1^\gamma} - \rho_1^\gamma\big)\psi \, dx \leq 0 \quad \forall\, \psi \in K.$$

С другой стороны (в силу выпуклости функции $z \mapsto z^\gamma$), $\rho_1^\gamma \leq \overline{\rho_1^\gamma}$, поэтому

$$\int\limits_{\Omega} \big(\overline{\rho_1^\gamma} - \rho_1^\gamma\big)\psi \, dx = 0 \quad \forall\, \psi \in K. \tag{3.28}$$

Поскольку линейная оболочка конуса K совпадает с $L_{2\gamma}(\Omega)$, из (3.28) следует

$$\overline{\rho_1^\gamma} = \rho_1^\gamma. \tag{3.29}$$

Из формул (3.1) и (3.29) по теореме Рисса вытекает, что $\rho_1^\varepsilon \to \rho_1$ сильно в $L_\gamma(\Omega)$, откуда, в свою очередь, следует, что

$$\rho_1^\varepsilon \to \rho_1 \quad \text{сильно в } L_q(\Omega), \quad q \in [1, 2\gamma). \tag{3.30}$$

Соотношения (3.1), (3.5), (3.29), (3.30) позволяют утверждать, что

$$\int\limits_{\Omega} \tau^2 \big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma \rho_2^\varepsilon \, d\boldsymbol{x} \to \int\limits_{\Omega} \tau^2 \rho_1^\gamma \rho_2 \, d\boldsymbol{x},$$

$$\int\limits_\Omega \tau^2 \rho_1^\varepsilon \rho_2^\varepsilon \theta_1^\varepsilon\, d\boldsymbol{x} \to \int\limits_\Omega \tau^2 \rho_1 \rho_2 \theta_1\, d\boldsymbol{x} \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

поэтому в силу равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau^2 \big[\big(\rho_1^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_1^\varepsilon \theta_1^\varepsilon - (\lambda_{11} + 2\mu_{11}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)}\big] \rho_2^\varepsilon\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int\limits_\Omega \tau^2 \big[\overline{\rho_1^\gamma} + \rho_1\theta_1 - (\lambda_{11} + 2\mu_{11}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)}\big] \rho_2\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \tau \in C_0^\infty(\Omega)$$

справедлива формула

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(1)} \rho_2^\varepsilon\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \tau^2 \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(1)} \rho_2\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.31}$$

Теперь из соотношения (3.20) при $i = 2$, $j = 2$ и (3.31) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau^2 \big[\big(\rho_2^\varepsilon\big)^\gamma + \rho_2^\varepsilon \theta_2^\varepsilon - (\lambda_{22} + 2\mu_{22}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}_\varepsilon^{(2)}\big] \rho_2^\varepsilon\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int\limits_\Omega \tau^2 \big[\overline{\rho_2^\gamma} + \rho_2\theta_2 - (\lambda_{22} + 2\mu_{22}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}^{(2)}\big] \rho_2\, d\boldsymbol{x},$$

из которого, дословно повторяя вывод формул (3.29), (3.30), получаем, что

$$\overline{\rho_2^\gamma} = \rho_2^\gamma \text{ и } \rho_2^\varepsilon \to \rho_2 \quad \text{сильно в } L_q(\Omega), \quad q \in [1, 2\gamma). \tag{3.32}$$

В итоге, из (3.4), (3.30), (3.32) вытекает справедливость равенств (3.19).

Теорема 1.1 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за конструктивные замечания, позволившие повысить качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajagopal K. R., Tao L.* Mechanics of mixtures. Singapore: World Sci., 1995.
2. *Кучер Н. А., Прокудин Д. А.* Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 52–65.
3. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36, N 4. P. 1259–1281.
4. *Goj S.* Analysis for mixtures of fluids: Dissertation. Universitat Bonn. Math. Inst., 2005. http://bib.math.uni-bonn.de/downloads/bms/BMS-375.pdf.
5. *Frehse J., Weigant W.* On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. 2008. V. 53, N 4. P. 319–345.
6. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Mucha P., Pokorny M.* Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids // Math. Models Methods Appl. Sci. 2010. V. 20, N 5. P. 785–813.
8. *Mucha P., Pokorny M.* On the steady compressible Navier–Stokes–Fourier system // Commun. Math. Phys. 2007. V. 288, N 1. P. 349–377.
9. *Петров А. Н.* Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. 1982. № 56. С. 105–121.
10. *Папин А. А.* Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2007.

11. *Lions P.-L.* Existence globale des solutions pour les équations de Navier–Stokes compressible isentropiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser 1. 1993. N 316. P. 1335–1340.

12. *Lions P.-L.* Bornes sur la densité pour les équations de Navier–Stokes compressible isentropiques avec conditions aux limits de Dirichlet // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1999. N 328. P. 659–662.

13. *Feireisl E., Novotny A., Petzeltova H.* On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations // J. Math. Fluid Mech. 2001. N 3. P. 358–392.

14. *Плотников П. И., Соколовски Ж.* Стационарные решения уравнений Навье — Стокса для двухатомных газов // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 117–148.

15. *Lions P.-L.* Compacité des solutions des équations de Navier–Stokes compressible isentropiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1993. N 317. P. 115–120.

16. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.

17. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970.

18. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

19. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

20. *Боговский М. Е.* О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Тр. сем. С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. Т. 1. С. 5–40.

21. *Lions P.-L.* Mathematical topics in fluid mechanics. V. 2. Compressible models. New York: Oxford Univ. Press, 1998.

22. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

23. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

24. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга. II // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1966. Т. 42. С. 233–297.

25. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

26. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

27. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

28. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 30 сентября 2011 г., окончательный вариант — 21 июня 2012 г.

Кучер Николай Алексеевич, Прокудин Дмитрий Алексеевич
Кемеровский гос. университет, кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Терешковой, 40, к. 4216, Кемерово 650036
`nakycher@rambler.ru`, `daprokudin@kemsu.ru`

Мамонтов Александр Евгеньевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
`mamont@hydro.nsc.ru`