Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ С РАЗРЕШИМЫМИ $\mathbb{P}^2$–СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Аннотация. Подгруппа H конечной группы G называется $\mathbb{P}^2$-*субнормальной*, если существует цепочка подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$, в которой $|H_{i+1} : H_i|$ делят квадраты простых чисел для всех i. Исследуется конечная группа $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и индексы подгрупп в цепочках, соединяющих A и B с группой, делят квадраты простых чисел. В частности, без использования классификации конечных простых групп доказывается, что такая группа разрешима.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, произведение подгрупп, индекс подгруппы.

В. Д. Мазурову в связи с его 70-летием

Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Сверхразрешимой* называется группа, у которой факторы главного ряда имеют простые порядки. Согласно теореме Хупперта [1, VI.9.5] группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс. Доказательство этой теоремы использует результат Холла [1, VI.9.4] о разрешимости группы, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. Такие группы изучались в [2, 3].

В настоящей заметке данная тематика развивается в рамках факторизуемых групп на основе следующего определения.

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Для фиксированного натурального числа t положим

$$\mathbb{P}^t = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ k \leq t\}.$$

Подгруппа H называется $\mathbb{P}^t$-*субнормальной подгруппой* группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G \tag{1}$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ для всех i, при этом используется обозначение $H\ \mathbb{P}^t$ *sn* G. Цепочку (1) будем называть $\mathbb{P}^t$-*субнормальной цепью для подгруппы* H. При $t = 1$ получается понятие $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы, введенное в [4].

Без использования классификации конечных простых групп доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}^2$-субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если A и B разрешимы, то G разрешима.

2. Пусть r — наибольший простой делитель порядка группы G, подгруппы A и B разрешимы и r-замкнуты. Если $r > 3$, то G r-замкнута.

3. Если A и B сверхразрешимы и H — $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы G, то H обладает силовской башней сверхразрешимого типа и нормальна в G.

Теорема 2. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Пусть r — наибольший простой делитель порядка группы G. Если подгруппы A и B r-разложимы, то G r-замкнута и r-сверхразрешима.*

Пример 1. Простая группа $PSL(2,7) = S_4([Z_7]Z_3)$ является произведением разрешимых подгрупп S_4 и $[Z_7]Z_3$, где S_4 — симметрическая группа степени 4, а $[Z_7]Z_3$ — нециклическая группа порядка 21. Так как

$$|PSL(2,7) : S_4| = 7, \quad |PSL(2,7) : [Z_7]Z_3| = 8,$$

подгруппа S_4 $\mathbb{P}$-субнормальна, а $[Z_7]Z_3$ $\mathbb{P}^3$-субнормальна. Поэтому в формулировке теоремы 1 условие $\mathbb{P}^2$-субнормальности в п. 1 нельзя заменить условием $\mathbb{P}^3$-субнормальности.

Пример 2. В формулировке теоремы 1 требование $r > 3$ убрать нельзя. Примером служит симметрическая группа степени 4, которая является произведением $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы порядка 8 и $\mathbb{P}^2$-субнормальной подгруппы порядка 3.

Пример 3. В формулировке теоремы 2 r-разложимость подгрупп A и B нельзя ослабить до r-замкнутости. Примером служит полупрямое произведение $G = [E_{7^2}]S_3$, в котором симметрическая группа S_3 неприводимо действует на элементарной абелевой группе E_{7^2} порядка 49. Группа $G = [E_{7^2}]S_3$ является минимальной несверхразрешимой группой и обладает факторизацией $G = ([E_{7^2}]Z_3)([E_{7^2}]Z_2)$. Подгруппы $[E_{7^2}]Z_3$ и $[E_{7^2}]Z_2$ сверхразрешимы, 7-замкнуты и $\mathbb{P}$-субнормальны в G, поскольку их индексы — простые числа. Но группа G не 7-сверхразрешима.

1. Вспомогательные результаты

Используются стандартные обозначения, которые соответствуют [1]. Через $\pi(G)$ и $\pi(G : H)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G и множество всех простых делителей индекса подгруппы H в группе G, $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ — подгруппа, порожденная всеми сопряженными с H подгруппами в группе G. Запись $G = [A]B$ означает полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A. Подгруппы Фраттини и Фиттинга обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$ соответственно, а $S(G)$ и $O_p(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G и наибольшая нормальная p-подгруппа группы G соответственно.

Если $p \in \pi(G)$ и группа G содержит нормальную силовскую p-подгруппу, то G называют *p-замкнутой.* Если в p-замкнутой группе G имеется нормальная p'-холлова подгруппа, то группу G называют *p-разложимой.* Группа, у которой факторы главного ряда либо имеют порядок p, либо являются p'-группами, называется *p-сверхразрешимой.*

Пусть G — группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, \quad p_1 > p_2 > \dots > p_k, \ a_i \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что *группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа*, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_{k-1} \subset G_k = G$$

такая, что подгруппа G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе из G для всех i. Такие группы называют также *дисперсивными по Оре*.

Если H — подгруппа группы G, то

$$\mathrm{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x$$

— ее ядро, которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H. Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют *примитивной*. Общие свойства примитивных групп описаны в [1, гл. II].

Легко проверяется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, а G — разрешимая группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Если $G/N \in \mathfrak{F}$ для каждой нормальной в G неединичной подгруппы N, то G — примитивная группа.*

Неоднократно будет использоваться следующее известное утверждение.

Лемма 2. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G = AB$. Если $A \cap B$ содержит подгруппу D, нормальную в A, то $D^G \subseteq \mathrm{Core}_G B$.*

Лемма 3. *Пусть p — простое число и P — p-подгруппа группы G. Если $|G : N_G(P)| = p^a$, где $N_G(P)$ — нормализатор P в G, то $P \subseteq O_p(G)$.*

Доказательство. Пусть G_p — силовская p-подгруппа из группы G, содержащая подгруппу P. Тогда $G = N_G(P)G_p$ и $P^G \subseteq G_p$ по лемме 2, поэтому $P \subseteq O_p(G)$.

Лемма 4. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G = AB$. Если $\mathrm{Core}_G A = 1$, то $\pi(F(B)) \subseteq \pi(G : A)$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. $O_p(B) \neq 1$ для простого числа p, не делящего индекс A в G. Согласно [1, VI.4.7] существуют силовские p-подгруппы A_p и B_p из A и B соответственно такие, что $A_pB_p = B_pA_p$ и A_pB_p будет силовской p-подгруппой группы G. Поскольку p не делит индекс A в G, то A_p силовская в G и $O_p(B) \subseteq A_p$. По лемме 2 $O_p(B)^G \subseteq \mathrm{Core}_G A = 1$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G = AB$. Пусть $|G : A| = p$ — простое число, а индекс B в G нечетен. Если B разрешима, то силовская 2-подгруппа в $G/\mathrm{Core}_G A$ циклическая. В частности, если A и B разрешимы, то и G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{Core}_G A = 1$. Согласно [1, I.6.2] представление группы G перестановками на множестве правых смежных классов по подгруппе A будет точным степени p, где $p = |G : A|$. По [1, V.21.1] силовская p-подгруппа P из G имеет порядок p, а $N_G(P) = [P]H$ — группа

Фробениуса с ядром P и циклическим дополнением H. Так как B разрешима, то $F(B) \neq 1$ и по лемме 4 $F(B)$ — p-группа. Поэтому $B \subseteq N_G(P)$ и силовская 2-подгруппа B_2 из B циклическая. Но $|G : B|$ нечетен, значит, B_2 силовская в G и G разрешима.

Если $\operatorname{Core}_G A \neq 1$, то к группе $G/\operatorname{Core}_G A$ применима индукция. Лемма доказана.

Следующие две леммы известны в случае, когда $t = 1$ [5, 3.1, 4.1].

Лемма 6. *Пусть H — подгруппа группы G, N — нормальная в G подгруппа и $t \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H\ \mathbb{P}^t sn\ G$, то $(H \cap N)\ \mathbb{P}^t sn\ N$ и $HN/N\ \mathbb{P}^t sn\ G/N$;*
2) *если $N \subseteq H$ и $H/N\ \mathbb{P}^t sn\ G/N$, то $H\ \mathbb{P}^t sn\ G$;*
3) *если $H \leq K \leq G$, $H\ \mathbb{P}^t sn\ K$, $K\ \mathbb{P}^t sn\ G$, то $H\ \mathbb{P}^t sn\ G$;*
4) *если $H\ \mathbb{P}^t sn\ G$, то $H^g\ \mathbb{P}^t sn\ G$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. 1. Пусть (1) — $\mathbb{P}^t$-субнормальная цепь для подгруппы H. Рассмотрим цепочку подгрупп для подгруппы $(H \cap N)$:

$$H \cap N = (H_0 \cap N) \subseteq (H_1 \cap N) \subseteq \cdots \subseteq (H_n \cap N) = N.$$

Так как

$$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|,$$

а по лемме об индексах

$$|H_i : H_{i-1}| = |H_i : (H_i \cap N)H_{i-1}||(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|,$$

то $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|$ делит p_i^t для некоторого $p_i \in \mathbb{P}$. Поэтому $H \cap N\ \mathbb{P}^t\ sn\ N$.

Рассмотрим в фактор-группе G/N цепочку подгрупп для подгруппы HN/N:

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \cdots \subseteq H_nN/N = G/N.$$

Поскольку

$$|H_iN/N : H_{i-1}N/N| = |H_iN : H_{i-1}N| = \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|},$$

то $HN/N\ \mathbb{P}^t\ sn\ G/N$.

2. Если

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \cdots \subseteq H_nN/N = G/N$$

— $\mathbb{P}^t$-субнормальная цепь для H/N, то

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$$

будет $\mathbb{P}^t$-субнормальной цепочкой для подгруппы H.

Утверждения 3, 4 очевидны.

Лемма 7. *Пусть A и B — $\mathbb{P}^t$-субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Пусть существует цепочка*

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = G$$

такая, что $|A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{P}^t$ для всех i. Тогда пересечение $A_k \cap B$ является $\mathbb{P}^t$-субнормальной подгруппой в A_k для всех k.

Доказательство. По условию существует цепочка

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

такая, что $|B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{P}^t$ для всех j.

Зафиксируем подгруппу A_k. По тождеству Дедекинда

$$A_k = A(B \cap A_k), \quad A_k \cap B_j = (A \cap B_j)(B \cap A_k)$$

для всех j. Ясно, что $A \cap B_j \cap B \cap A_k = A \cap B$ для всех j. Поэтому

$$|A_k \cap B_j : A_k \cap B_{j-1}| = \frac{|A_k \cap B_j|}{|A_k \cap B_{j-1}|}$$
$$= \frac{|A \cap B_j||B \cap A_k|}{|A \cap B_j \cap B \cap A_k|} : \frac{|A \cap B_{j-1}||B \cap A_k|}{|A \cap B_{j-1} \cap B \cap A_k|} = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|.$$

Так как $G = AB$, то $B_j = (A \cap B_j)B$ для любого j. Поэтому

$$|B_j| = \frac{|A \cap B_j||B|}{|A \cap B|}$$

для любого j, значит,

$$|B_j : B_{j-1}| = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}| \in \mathbb{P}^t.$$

Таким образом, $|A_k \cap B_j : A_k \cap B_{j-1}| \in \mathbb{P}^t$ для любого j. Это означает, что $A_k \cap B = A_k \cap B_0$ $\mathbb{P}^t$-субнормальна в A_k. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G и A — некоторая p-подгруппа из G. Если A $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то A субнормальна в G.*

Доказательство. Пусть $|A| = p^\alpha$. Поскольку A является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, существует цепочка подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{t-1} \subset A_t = G, \quad |A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{P}, \ 1 \le i \le t.$$

Так как $|A_1 : A_0| \in \mathbb{P}$, то $|A_1| = p^{1+\alpha}$ или $|A_1| = p^\alpha q$, $p \neq q$. Если $|A_1| = p^{1+\alpha}$, то A нормальна в A_1. Если $|A_1| = p^\alpha q$, то $p > q$ и опять A нормальна в A_1. Пусть уже известно, что A субнормальна в A_j. Тогда $A \subseteq O_p(A_j)$. Поскольку $|A_{j+1} : A_j| \in \mathbb{P}$, то $|A_{j+1}| = p|A_j|$ или $|A_{j+1}| = q|A_j|$, $p \neq q$. Если $|A_{j+1}| = p|A_j|$, то $O_p(A_j) \subseteq O_p(A_{j+1})$ по лемме 3 и A субнормальна в A_{j+1}. Если $|A_{j+1}| = q|A_j|$, $p \neq q$, то $p > q$. Рассматривая представление группы A_{j+1} перестановками на множестве правых смежных классов по подгруппе A_j, получаем согласно [1, I.6.2], что $A_{j+1}/\operatorname{Core}_{A_{j+1}} A_j$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_q и силовская p-подгруппа из A_{j+1} содержится в подгруппе $\operatorname{Core}_{A_{j+1}} A_j$. Поскольку A субнормальна в A_j, то A субнормальна в $\operatorname{Core}_{A_{j+1}} A_j$, а так как $\operatorname{Core}_{A_{j+1}} A_j$ нормальна в A_{j+1}, то A субнормальна в A_{j+1}. Итак, A субнормальна в A_i для любого i, значит, A субнормальна в G. Лемма доказана.

Лемма 9 [6, 7.2.5]. *Если A и B — подгруппы группы G такие, что $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то подгруппа $A^B \cap B^A$ субнормальна в G.*

2. Доказательство теоремы 1

1. Пусть A и B — $\mathbb{P}^2$-субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$. Докажем, что группа G разрешима. Предположим, что утверждение неверно, и пусть группа G — контрпример минимального порядка. В силу леммы 6 условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G, поэтому с учетом леммы 2 можно считать, что

(1) $S(G) = \mathrm{Core}_G A = \mathrm{Core}_G B = \mathrm{Core}_A(A \cap B) = \mathrm{Core}_B(A \cap B) = 1$.

(2) Подгруппы A и B максимальны в G, $|G : A| = p$ или p^2, $|G : B| = q$ или q^2, p и q — простые числа.

По условию существуют цепочки

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = G, \quad |A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{P}^2, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_m = G, \quad |B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{P}^2, \quad j = 1, \ldots, m.$$

По тождеству Дедекинда $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$, а по лемме 7 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ будет $\mathbb{P}^2$-субнормальной в A_{n-1}. Так как подгруппа A $\mathbb{P}^2$-субнормальна в A_{n-1} и $|A_{n-1}| < |G|$, по индукции A_{n-1} разрешима и $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{P}^2$. Аналогично по индукции B_{m-1} разрешима и $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{P}^2$. Ясно, что $G = A_{n-1}B_{m-1}$ и $|G : A_{n-1}|$ равно p или p^2, $p \in \mathbb{P}$, $|G : B_{m-1}|$ равно q или q^2, $q \in \mathbb{P}$. Поэтому без ущерба для доказательства можно считать подгруппы A и B максимальными в группе G. Из определения $\mathbb{P}^2$-субнормальности следует, что $|G : A|$ равно p или p^2, $|G : B|$ равно q или q^2, p и q — простые числа.

(3) $p > q > 2$, $F(A)$ — q-группа, $F(B)$ — p-группа, $|G : A| = p^2$, $|G : B| = q^2$.

Пусть для определенности $p \geq q$. Так как подгруппа B разрешима и $|G : B|$ равно q или q^2, то $q > 2$. Предположим, что $p = q$. Тогда $|G| = p^a m$, p не делит m и m делит $|A \cap B|$. Из леммы 2 заключаем, что $O_p(A) = O_p(B) = 1$. Поскольку подгруппы A и B разрешимы, то $O_{p'}(A) \neq 1$, а так как $O_{p'}(A) \subseteq B$, опять по лемме 2 $S(G) \neq 1$; противоречие. Поэтому $p > q > 2$. Поскольку $\mathrm{Core}_G A = \mathrm{Core}_G B = 1$, то $F(A)$ — q-группа, $F(B)$ — p-группа по лемме 4. Из леммы 5 следует, что $|G : A| = p^2$, $|G : B| = q^2$.

(4) $F(B)$ не является силовской p-подгруппой группы G, и p делит порядок $A \cap B$.

Из (3) следует, что силовская p-подгруппа из B является силовской в группе G. Предположим, что $F(B)$ силовская в G. Тогда $N_G(F(B)) = B$ и $q^2 \equiv 1 \pmod p$ по теореме Силова. Это возможно лишь при $p = 3$ и $q = 2$; противоречие. Итак, $F(B)$ не является силовской подгруппой в G, в частности, p делит $|B : F(B)|$. Если p не делит порядок $A \cap B$, то

$$F(B)(A \cap B) = [F(B)](A \cap B) \neq B, \quad p^2 = |G : A| = |B : A \cap B|,$$

поэтому $|F(B)| = p$. Поскольку $C_B(F(B)) \subseteq F(B)$, то $A \cap B$ циклическая порядка, делящего $p-1$. В частности, силовская 2-подгруппа в G циклическая; противоречие. Следовательно, p делит порядок $A \cap B$.

(5) Подгруппа $A \cap B$ не является максимальной подгруппой в A.

Допустим, что $A \cap B$ максимальна в A. Так как $\mathrm{Core}_A(A \cap B) = 1$ по лемме 2, согласно [1, I.6.2] представление A перестановками на множестве правых смежных классов по $A \cap B$ будет точным степени q^2 и A будет примитивной группой с разрешимой нормальной q-подгруппой $F(A)$. По [1, II.3.2]

$$A = [F(A)](A \cap B), \quad F(A) = C_A(F(A)).$$

Поэтому $A \cap B$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}\, Q = GL(2, q)$ и $|A \cap B|$ делит

$$(q^2 - 1)(q^2 - q) = q(q-1)^2(q+1).$$

Так как p делит $|A \cap B|$, то p делит $q + 1$ и $p = 3$, $q = 2$; противоречие. Следовательно, $A \cap B$ немаксимальна в A.

(6) Окончание доказательства.

Поскольку $\mathrm{Core}_A(A \cap B) = 1$, согласно [1, I.6.2] представление группы A перестановками на множестве правых смежных классов по подгруппе $A \cap B$ точное степени q^2. Поэтому A — транзитивная импримитивная группа перестановок. Все области импримитивности имеют длину q, и их q штук, поэтому $|A|$ делит $q!(q!)^{q!}$ [1, II.1.2]. Так как $p > q$, то p не делит $|A|$, что противоречит (4). Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

2. Пусть A и B — разрешимые $\mathbb{P}^2$-субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$. Предположим, что подгруппы A и B r-замкнуты, r — наибольший простой делитель порядка группы G, $r > 3$. Требуется доказать, что группа G r-замкнута. Для определенности будем считать, что r делит $|A|$. Пусть A_r и G_r — силовские r-подгруппы из A и G соответственно, причем $A_r \subseteq G_r$. По условию A_r нормальна в A.

Из утверждения 1 следует, что группа G разрешима. Условия теоремы наследуют все фактор-группы, поэтому применима индукция по числу $|G : A| + |G : B|$. Поскольку класс всех r-замкнутых групп является насыщенной формацией, по лемме 1 группа G примитивна и в G минимальная нормальная подгруппа N единственна, $N = C_G(N) = F(G)$, $\Phi(G) = 1$ и $G = [N]M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Пусть для определенности N является p-подгруппой.

Если $p = r$, то $N \subseteq G_r$ и по индукции G_r/N нормальна в G/N, поэтому G_r нормальна в G. В дальнейшем считаем, что $p < r$. Если $N \subseteq A$, то $1 \neq A_r \subseteq C_G(N) = N$; противоречие. Поэтому подгруппа N не содержится в A.

Предположим, что подгруппа A максимальна в группе G. Тогда $G = [N]A$ и A изоморфна подгруппе из группы автоморфизмов группы N. Из $\mathbb{P}^2$-субнормальности A следует, что либо $|N| = p$, либо $|N| = p^2$. Если $|N| = p$, то A — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$; противоречие с тем, что r делит порядок A и $p < r$. Если $|N| = p^2$, то A — подгруппа полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $p(p-1)(p+1)$; противоречие с тем, что $r > 3$. Значит, A не максимальна в G.

Из $\mathbb{P}^2$-субнормальности подгруппы A следует, что существует цепочка

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A, \quad |A_i : A_{i-1}| \in \mathbb{P}^2, \quad i = 1, \ldots, n, \ n \geq 2.$$

По тождеству Дедекинда $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$, а по лемме 7 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ будет $\mathbb{P}^2$-субнормальной в A_{n-1}. Так как $G = AB = A_{n-1}B$, то

$$|G : B| = |A : A \cap B| = |A_{n-1} : A_{n-1} \cap B|.$$

Теперь $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$, подгруппы A и $A_{n-1} \cap B$ $\mathbb{P}^2$-субнормальны в A_{n-1} и

$$|A_{n-1} : A| + |A_{n-1} : A_{n-1} \cap B| < |G : A| + |G : B|.$$

По индукции A_{n-1} r-замкнута. Далее, $G = A_{n-1}B$, A_{n-1} и B — $\mathbb{P}^2$-субнормальные r-замкнутые подгруппы группы G и

$$|G : A_{n-1}| + |G : B| < |G : A| + |G : B|.$$

Поэтому к группе $G = A_{n-1}B$ с подгруппами A_{n-1} и B применима индукция. Утверждение 2 доказано.

3. Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Из утверждения 2 по индукции группа $G = AB$ со сверхразрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами A и B будет обладать нормальной $\{2, 3\}'$-холловой подгруппой H, а подгруппа H — силовской башней сверхразрешимого типа. Теорема 1 доказана полностью.

Следствие 1.1 [7, теорема 2]. *Пусть A и B — разрешимые подгруппы конечной группы G и $G = AB$. Если $|G : A|$ равно p или p^2, $|G : B|$ равно q или q^2, где p и q — простые числа, не обязательно различные, то G разрешима.*

Следствие 1.2 [5, теорема 4.2]. *Пусть группа $G = AB$ — произведение разрешимых подгрупп A и B. Если A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, то G разрешима.*

3. Доказательство теоремы 2

Пусть r — наибольший простой делитель порядка группы G, A и B — разрешимые $\mathbb{P}$-субнормальные r-разложимые подгруппы группы G и $G = AB$. Требуется доказать, что группа G r-замкнута и r-сверхразрешима. Ясно, что условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G, поэтому применима индукция по порядку группы. Из [1, VI.4.7] следует, что A_rB_r — силовская r-подгруппа группы G, где A_r и B_r — силовские r-подгруппы из A и B соответственно. Будем считать, что $A_r \neq 1$. Поскольку A разрешима, нормальная подгруппа A_r $\mathbb{P}$-субнормальна в A, поэтому она $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Из леммы 8 получаем, что $A_r \subseteq O_r(G)$. Аналогично $B_r \subseteq O_r(G)$. Поэтому $A_rB_r = O_r(G)$ и группа G r-замкнута. Остается проверить, что группа G r-сверхразрешима.

Из теоремы 1 следует, что группа G разрешима. Поскольку класс всех r-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, в силу леммы 1 группа G примитивна и $\Phi(G) = O_{r'}(G) = 1$. Из r-замкнутости и примитивности группы G следует, что

$$N = O_r(G) = A_rB_r = F(G) = C_G(N)$$

и N — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Пусть M — дополнение к подгруппе N в группе G. Тогда M — максимальная в G подгруппа и $\mathrm{Core}_G M = 1$. Предположим, что $N = A_r$. Тогда $N = A$, B — максимальная подгруппа и $|N| = r$, поскольку B — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G. Но теперь группа G r-сверхразрешима. Поэтому $A_r \neq N$ и аналогично $N \neq B_r$. Если $A_r \cap B_r \neq 1$, то $C_G(A_r \cap B_r) \supseteq \langle A, B\rangle = G$, а это противоречит тому, что N — минимальная нормальная подгруппа. Тем самым $A_r \cap B_r = 1$.

Так как A и B r-разложимы, то

$$A = A_r \times A_{r'}, \quad B = B_r \times B_{r'}.$$

Если $A_{r'} = 1$, то A_r нормальна в G; противоречие. Поэтому $A_{r'} \neq 1 \neq B_{r'}$.

Пусть $g = ab \in G$ — произвольный элемент из группы, $a \in A$, $b \in B$. Тогда

$$A_{r'}^g B_{r'} = A_{r'}^b B_{r'} = B_{r'} A_{r'}^b = B_{r'} A_{r'}^g.$$

Применяя лемму 9 к подгруппам $A_{r'}$ и $B_{r'}$, получаем, что r'-подгруппа $A_{r'}^{B_{r'}} \cap B_{r'}^{A_{r'}}$ субнормальна в G. Поскольку $O_{r'}(G) = 1$, то $A_{r'}^{B_{r'}} \cap B_{r'}^{A_{r'}} = 1$.

Так как $A_{r'}^{B_{r'}}$ нормальна, $A_{r'}B_{r'}$ и $B_{r'}^{A_{r'}}$ нормальна в $A_{r'}B_{r'}$, то

$$[A_{r'}, B_{r'}] \subseteq \left[A_{r'}^{B_{r'}}, B_{r'}^{A_{r'}}\right] \subseteq A_{r'}^{B_{r'}} \cap B_{r'}^{A_{r'}} = 1.$$

Таким образом, $G \neq N_G(A_{r'}) \supseteq \langle A_r, B_{r'}\rangle$, и $|G : N_G(A_{r'})|$ делит $|B_r|$. Но теперь $M \subseteq N_G(A_{r'})^x$ для некоторого $x \in G$; противоречие. Теорема 2 доказана.

Следствие 2.1 [8, теорема 2]. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные нильпотентные подгруппы группы G. Если $G = AB$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. По условию подгруппы A и B p-разложимы для всех $p \in \pi(G)$. Из теоремы 2 следует, что группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа и p-сверхразрешима для каждого $p \in \pi(G)$. Поэтому группа G сверхразрешима.

Пример 4. Группа, факторизуемая $\mathbb{P}$-субнормальными сверхразрешимыми подгруппами, не обязана быть сверхразрешимой. Подтверждением служит группа $G = [E_{7^2}]S_3$ из примера 3.

Пример 5. Группа, факторизуемая нильпотентными $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами, может не обладать силовской башней сверхразрешимого типа, а значит, быть несверхразрешимой. Простейшим примером служит знакопеременная группа A_4, которая является произведением $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы порядка 4 и $\mathbb{P}^2$-субнормальной подгруппы порядка 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
2. *Монахов В. С., Грибовская Е. Е.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 603–612.
3. *Монахов В. С., Селькин М. В., Грибовская Е. Е.* О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 950–960.
4. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
5. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
6. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987.
7. *Монахов В. С.* Факторизуемые группы с разрешимыми факторами нечетных индексов // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. Минск: Наука и техника, 1984. С. 105–111.
8. *Васильев А. Ф.* Новые свойства конечных динильпотентных групп // Весцi НАН Беларуси. 2004. № 2. С. 29–33.

Статья поступила 31 октября 2012 г.

Княгина Виктория Николаевна
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь,
ул. Речицкое шоссе, 35-А, Гомель 246023, Беларусь
knyagina@inbox.ru

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
Victor.Monakhov@gmail.com