Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.543

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

Д. Н. Азаров

Аннотация. Для некоторых свободных произведений групп конечного ранга с объединенными подгруппами получены необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости.

Ключевые слова: группа конечного ранга, свободное произведение групп с объединенными подгруппами, финитно аппроксимируемая группа.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1.

Напомним также, что G называется *группой конечного ранга*, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Примером финитно аппроксимируемой группы конечного ранга может служить любая полициклическая группа [1], а также произвольное нисходящее HNN-расширение полициклической группы [2]. В частности, для любого целого положительного числа n группа Баумслага — Солитэра $B_n = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ финитно аппроксимируема и имеет конечный ранг.

Перейдем теперь к обобщенным свободным произведениям, т. е. к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть $P = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа P порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также всевозможными соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная аппроксимируемость групп A и B. Несложные примеры показывают, что это условие не является достаточным. Один такой пример приведен ниже.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости группы P состоит в том, что на свободные множители A и B помимо условия финитной аппроксимируемости накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Примерами таких ограничений могут служить конечность подгрупп H и K, их цикличность, конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B соответственно, а также нормальность подгрупп H и K в группах A и B. Баумслаг [3] доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенные подгруппы H и K конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Здесь будет исследован вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения конечно порожденных групп конечного ранга с объединенными подгруппами, удовлетворяющими перечисленным выше ограничениям.

Напомним, что подгруппа H группы A называется *финитно отделимой*, если для каждого элемента a группы A, не принадлежащего H, существует гомоморфизм группы A на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a не принадлежит образу подгруппы H. Известно, что в произвольной полициклической группе все подгруппы финитно отделимы (см., например, [4, п. 1.3.10]).

Если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $K \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная отделимость подгрупп H и K в группах A и B [5]. В [6] доказано, что все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга являются конечными расширениями разрешимых групп и, следовательно, удовлетворяют нетривиальному тождеству. Поэтому если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, $H \neq A$ и $K \neq B$, то необходимым условием финитной аппроксимируемости группы P является финитная отделимость подгрупп H и K в группах A и B. С другой стороны, свободное произведение двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга с финитно отделимыми объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Соответствующим примером может служить построенное ниже свободное произведение двух полициклических групп с объединенными подгруппами конечных индексов, которое не является финитно аппроксимируемой группой.

Перейдем к основным результатам, доказанным в работе.

Теорема 1. *Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если A и B являются конечно порожденными группами конечного ранга, то группа P тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Так как полициклические группы финитно аппроксимируемы и в них все подгруппы финитно отделимы, непосредственным следствием теоремы 1 является следующий результат Баумслага [3]: *свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Заметим, что рассмотренное в теореме 1 свободное произведение двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Действительно, в [4, п. 11.1.4] построен пример конечно порожденной финитно аппроксимируемой разрешимой группы S конечного ранга, в которой существует нормальная подгруппа H, не являющаяся финитно отделимой. Поэтому свободное произведение двух экземпляров группы S с объединенной подгруппой H не является финитно аппроксимируемой группой. Таким образом, упомянутый выше результат Баумслага не может быть распространен с полициклических групп на конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга.

Рассмотрим вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп конечного ранга с циклическими объединенными подгруппами. Такое свободное произведение не обязано быть финитно аппроксимируемой группой. Действительно, рассмотренная выше группа Баумслага — Солитэра B_n является конечно порожденной финитно аппроксимируемой группой конечного ранга, но если $n \geq 2$, то циклическая подгруппа H группы B_n, порожденная элементом a, не финитно отделима, поэтому свободное произведение двух экземпляров группы B_n с объединенной подгруппой H не является финитно аппроксимируемой группой.

Ниже доказана

Теорема 2. *Пусть P — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с циклическими объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если A и B — конечно порожденные группы конечного ранга, то группа P тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Частным случаем этой теоремы является следующий результат Дайер [7]: *свободное произведение двух полициклических групп с циклическими объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой.*

Еще одним естественным ограничением на объединяемые подгруппы является конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B соответственно. При этом ограничении подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B, но группа P не обязана быть финитно аппроксимируемой даже в случае, если группы A и B полициклические. Соответствующий пример приведен ниже. Для случая, когда объединенные подгруппы имеют конечные индексы в свободных множителях, получен следующий критерий.

Теорема 3. *Пусть $P = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с объединенными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группах A и B соответственно. Если A и B — конечно порожденные группы конечного ранга, то следующие три условия равносильны.*

1\. *Группа P финитно аппроксимируема.*

2\. *Для всех достаточно больших простых p группа P почти аппроксимируема конечными p-группами.*

3\. *В подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.*

Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Доказательства теорем 1–3 приведены в разд. 2. В этом разделе мы построим упомянутый выше пример свободного произведения двух полициклических групп с объединенными подгруппами конечных индексов, которое не является финитно аппроксимируемой группой.

Очевидно, что группы

$$A = \langle a_1, a_2, x;\ a_1a_2 = a_2a_1,\ x^2 = 1,\ x^{-1}a_1x = a_2\rangle,$$
$$B = \langle b_1, b_2, y;\ b_1b_2 = b_2b_1,\ y^2 = 1,\ y^{-1}b_1y = b_2\rangle$$

полициклические, их подгруппы $H = \big(a_1, a_2^2\big)$ и $K = \big(b_1, b_2^3\big)$ имеют конечные индексы, отображение $a_1 \mapsto b_1$, $a_2^2 \mapsto b_2^3$ может быть продолжено до изоморфизма $\varphi : H \to K$. Покажем, что построенная таким образом группа P не финитно аппроксимируема.

Действительно, в любом конечном гомоморфном образе $\overline{P}$ группы P порядки сопряженных подгрупп $A_2 = (a_2)$ и $B_2 = (b_2)$ совпадают. Поэтому подгруппа C, порожденная элементом $c = a_2^2 = b_2^3$, имеет один и тот же индекс s в каждой из подгрупп A_2 и B_2 группы $\overline{P}$. Так как элементы a_2^2 и b_2^3 принадлежат C, то s делит каждое из чисел 2 и 3. Поэтому $s = 1$, т. е. в группе $\overline{P}$ имеет место равенство $A_2 = C = B_2$. Следовательно, коммутатор $[a_2, b_2]$ равен 1 в любом конечном гомоморфном образе $\overline{P}$ группы P, но в самой группе P этот коммутатор, как легко видеть, отличен от 1. Таким образом, группа P не финитно аппроксимируема.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа H конечного индекса, являющаяся разрешимой минимаксной группой.*

Доказательство. Напомним, что группа называется *минимаксной*, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности для подгрупп. В [6] доказано, что если G — финитно аппроксимируемая группа конечного ранга, то в группе G существует подгруппа H конечного индекса, являющаяся локально разрешимой группой. Поскольку в нашем случае группа G еще и конечно порожденная, ее подгруппа H конечного индекса также конечно порождена и поэтому разрешима. По теореме Зайцева — Робинсона любая конечно порожденная разрешимая группа конечного ранга минимаксна. Эта теорема даже в более общем виде доказана в [4, п. 5.2.8]. Таким образом, H — разрешимая минимаксная подгруппа конечного индекса группы G. Без потери общности можно считать, что она нормальна.

Лемма 2. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ — семейства всех нормальных подгрупп конечного индекса в группах A и B соответственно, $\Lambda = \{(i,j) \in I \times J : (A_i \cap H)\varphi = B_j \cap K\}$. Для каждого $\lambda = (i,j)$ из Λ введем следующие обозначения: $A_\lambda = A_i$, $B_\lambda = B_j$. Если*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K, \tag{1}$$

то группа P финитно аппроксимируема. Если группа P финитно аппроксимируема, группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, $H \neq A$ и $K \neq B$, то выполняются условия (1) *и, в частности, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Первое утверждение леммы 2 хорошо известно как фильтрационная теорема Баумслага и доказано в [3]. Второе утверждение леммы представляет собой обращение фильтрационной теоремы Баумслага и доказано в [5].

Лемма 3. *Пусть P — свободное произведение групп A и B с объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Пусть A и B — конечно порожденные группы конечного ранга. Если группа P финитно аппроксимируема, то имеют место фильтрационные условия* (1) *и, в частности, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.*

Доказательство. Пусть A и B — конечно порожденные группы конечного ранга и группа P финитно аппроксимируема. Тогда по лемме 1 группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, и поэтому в силу леммы 2 имеют место фильтрационные условия (1), в частности, подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно.

Лемма 4. *Группа конечного ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса.*

Это утверждение даже в более общем виде доказано в [8].

Лемма 5. *Пусть G — группа конечного ранга и H — подгруппа конечного индекса группы G. Тогда в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что $N \subseteq H$.*

Доказательство. Пусть индекс $[G : H]$ конечен, обозначим его через n. По лемме 4 в группе G существует только конечное число подгрупп индекса n. Пусть N — пересечение всех таких подгрупп. Тогда $N \subseteq H$ и очевидно, что N имеет конечный индекс в группе G. Так как любой автоморфизм φ группы G переставляет между собой ее подгруппы индекса n, то φ оставляет на месте их пересечение. Поэтому N — характеристическая подгруппа группы G. Лемма доказана.

Напомним, что элемент a группы G называется *полным*, если для каждого целого положительного числа n уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G. Группа G называется *полной*, если все ее элементы полны. Группу G будем называть *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных полных подгрупп. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована. Для разрешимых групп конечного ранга имеет место и обратное утверждение.

Лемма 6. *Разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована. Более того, почти разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Доказательство. Первое утверждение леммы даже в более общем виде доказано в [4, п. 5.3.2]. Пусть G — группа конечного ранга, содержащая разрешимую подгруппу H конечного индекса, и группа G редуцирована. Тогда H также редуцирована и является разрешимой группой конечного ранга. Поэтому в силу первой части леммы H финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что H — подгруппа конечного индекса группы G, следует, что и G финитно аппроксимируема.

Лемма 7. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга. Если G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то группа G финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — конечная нормальная подгруппа группы G и фактор-группа G/H финитно аппроксимируема. Покажем, что и G финитно аппроксимируема.

Так как фактор-группа G/H финитно аппроксимируема, она редуцирована. Покажем, что и G редуцирована.

Пусть A — полная подгруппа группы G. Поскольку фактор-группа полной группы сама полна, подгруппа AH/H группы G/H полна. Отсюда и из того, что G/H редуцирована, следует, что AH/H — единичная подгруппа, т. е. $AH = H$. Значит, $A \subseteq H$, и поэтому подгруппа A конечна. Отсюда и из того, что подгруппа A полная, вытекает, что $A = 1$. Таким образом, G — почти разрешимая редуцированная группа конечного ранга. Поэтому в силу леммы 6 группа G финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть P — свободное произведение конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами H и K. Пусть подгруппы H и K финитно отделимы в группах A и B соответственно. Тогда группа P финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Будем считать, что A и B — подгруппы группы P. Тогда $A \cap B = H = K$. Очевидно, что H — нормальная подгруппа группы P и фактор-группа P/H является свободным произведением подгрупп A/H и B/H. Пусть $g \in P$ и $g \neq 1$. Покажем, что существует гомоморфизм группы P на конечную группу, переводящий g в элемент, отличный от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Так как H финитно отделима в A и в B, фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы. Поэтому группа $P/H = A/H * B/H$ представляет собой свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп. Следовательно, группа P/H финитно аппроксимируема. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы P на фактор-группу P/H. Тогда $g\varepsilon$ — неединичный элемент финитно аппроксимируемой группы P/H. Тем самым существует гомоморфизм ρ группы P/H на некоторую конечную группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Гомоморфизм $\varepsilon\rho$ искомый.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как H финитно аппроксимируема, в ней существует подгруппа M конечного индекса, не содержащая g. Подгруппа H наследует от группы A свойство конечности ранга. Поэтому в силу леммы 5 в группе H существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что $N \subseteq M$. Таким образом, N — характеристическая подгруппа группы H, которая, в свою очередь, нормальна в группе P. Поэтому N нормальна в P. Отсюда и из того, что $N \leq H$, следует, что $P/N = (A/N * B/N,\ H/N)$ — свободное произведение групп A/N и B/N с объединенной подгруппой H/N. Заметим, что объединенная подгруппа H/N конечна.

По условию A и B — конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы конечного ранга. Поэтому в силу леммы 1 группы A и B почти разрешимы.

Докажем, что фактор-группы A/N и B/N финитно аппроксимируемы. Введем следующие обозначения: $\overline{A} = A/N$, $\overline{H} = H/N$. Так как A — почти разрешимая группа конечного ранга, ее фактор-группа $\overline{A}$ также является почти разрешимой группой конечного ранга. Заметим, что $\overline{H}$ — конечная нормальная подгруппа группы $\overline{A}$ и фактор-группа $\overline{A}/\overline{H} \cong A/H$ финитно аппроксимируема. Используя лемму 7, получаем, что группа $\overline{A} = A/N$ финитно аппроксимируема. Аналогично проверяется, что и фактор-группа B/N финитно аппроксимируема.

Таким образом, фактор-группа P/N является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп A/N и B/N с конечной объединенной подгруппой H/N. Поэтому в силу отмеченного выше результата Баумслага группа P/N финитно аппроксимируема. Пусть ε — естественный гомоморфизм группы P на фактор-группу P/N. Так как $\operatorname{Ker}\varepsilon = N$, $N \subseteq M$ и $g \notin M$, то $g\varepsilon$ — неединичный элемент финитно аппроксимируемой группы P/N. Теперь искомый гомоморфизм группы P на конечную группу строится точно так же, как и в случае, когда $g \notin H$. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 1 обеспечивается леммами 3 и 8.

Лемма 9. *Пусть N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга, H — неединичная циклическая подгруппа группы N и подгруппа H финитно отделима в группе N. Тогда для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H \cap L = H^l$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $l = p^k$ — степень простого числа p. Обозначим через h порождающий элемент подгруппы H, а через h_1 — элемент $h^{p^{k-1}}$. Покажем, что существует целое положительное число s такое, что уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N. Допустим противное, т. е. что для любого целого положительного числа s уравнение $x^{p^s} = h^{p^{k-1}}$ разрешимо в группе N. Отсюда и из того, что в нильпотентной группе без кручения извлечение корня однозначно, вытекает, что для каждого целого положительного числа t в группе N существует элемент x_t такой, что ${x_t}^{p^t} = h$. Тогда ${x_{t+1}}^{p^{t+1}} = h = {x_t}^{p^t}$. Отсюда и из однозначности извлечения корня в группе N следует, что $x_{t+1}^p = x_t$. Поэтому подгруппа X группы N, порожденная всеми элементами x_t, изоморфна группе p-ичных дробей, а фактор-группа X/H квазициклическая. Но это невозможно, так как в силу финитной отделимости подгруппы H в группе N фактор-группа X/H должна быть финитно аппроксимируемой.

Зафиксируем число s, для которого уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N, и рассмотрим степенную подгруппу $V = N^{p^{sc}}$, где c — ступень нильпотентности группы N. По лемме 2 в [9] из любого элемента v подгруппы V в группе N извлекается корень степени p^s. Отсюда и из того, что уравнение $x^{p^s} = h_1$ не разрешимо в группе N, следует, что $h_1 \notin V$.

Очевидно, что фактор-группа N/V является p-группой с ограниченными порядками элементов. В силу теоремы Прюфера факторы производного ряда группы N/V раскладываются в прямое произведение циклических групп, причем число прямых сомножителей в этих разложениях конечно за счет конечности ранга группы N. Поэтому все факторы производного ряда группы N/V конечны и, следовательно, N/V — конечная p-группа. Из элементарных свойств конечных p-групп следует, что существует ряд

$$N/V = N_1/V \geq N_2/V \geq \cdots \geq N_r/V = V/V,$$

где $N_{i+1}/V = (N_i/V)^p$, $i = 1, \ldots, r-1$. Так как для всех $i = 2, \ldots, r$ подгруппа N_i/V характеристична в N_{i-1}/V, то N_i/V характеристична в N/V. Отсюда и из того, что V характеристична в N, получим, что N_i характеристична в N для всех $i = 1, \ldots, r$. Поскольку

$$N_i/N_{i+1} \cong (N_i/V)/(N_{i+1}/V) = (N_i/V)/(N_i/V)^p,$$

то N_i/N_{i+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$. Так как

$$N = N_1 \geq N_2 \geq \cdots \geq N_r = V$$

и $h_1 \notin V$, найдется число j такое, что $h_1 \in N_j$ и $h_1 \notin N_{j+1}$. Поэтому из того, что группа N_j/N_{j+1} удовлетворяет тождеству $x^p = 1$, следует, что $|h_1 N_{j+1}| =$

p. Отсюда и из того, что $h_1 = h^{p^{k-1}}$, вытекает, что $|hN_{j+1}| = p^k$. Значит, $H \cap N_{j+1} = H^{p^k}$. Кроме того, N_{j+1} характеристична в N и имеет в N конечный индекс (так как содержит подгруппу V, имеющую в N конечный индекс). Таким образом, в качестве искомой подгруппы L можем взять подгруппу N_{j+1}.

Рассмотрим теперь общий случай, когда разложение числа l на простые множители имеет вид $l = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$. В силу рассмотренного выше частного случая для каждого $i = 1, \dots, n$ в группе N существует характеристическая подгруппа L_i конечного индекса такая, что $H \cap L_i = H^{p_i^{k_i}}$. Тогда подгруппа $L = \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i$ является характеристической подгруппой конечного индекса группы L и $H \cap L = H^l$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда в G существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq G$, где N — нильпотентная группа без кручения, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения и G/A — конечная группа.*

Доказательство. Для произвольной группы X через $\operatorname{Fitt} X$ будем обозначать подгруппу Фиттинга группы X, а через $\tau(X)$ — наибольшую нормальную периодическую подгруппу группы X. Известная теорема Грюнберга — Мальцева (см., например, [4, п. 5.2.2]) утверждает, что в разрешимой минимаксной группе X подгруппа $\operatorname{Fitt} X$ нильпотентна, а фактор-группа $X/\operatorname{Fitt} X$ почти абелева.

По лемме 1 в группе G существует нормальная разрешимая минимаксная подгруппа S конечного индекса. В силу отмеченного выше результата Грюнберга — Мальцева подгруппа $F = \operatorname{Fitt} S$ нильпотентна, а фактор-группа S/F содержит абелеву подгруппу конечного индекса. Отсюда и из того, что группа G/F является конечным расширением группы S/F, следует, что и группа G/F содержит абелеву подгруппу конечного индекса, причем эта подгруппа является конечно порожденной абелевой группой, поэтому она содержит конечно порожденную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса. Таким образом, группа G/F является конечным расширением конечно порожденной абелевой группы без кручения.

Очевидно, что в разрешимой минимаксной группе любая периодическая подгруппа удовлетворяет условию минимальности. Поэтому $\tau(S)$ — черниковская группа, т. е. конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп. С другой стороны, $\tau(S)$ не может содержать квазициклических подгрупп, так как группа G финитно аппроксимируема. Следовательно, $\tau(S)$ конечна.

Поскольку $\tau(S)$ — конечная группа, ее подгруппа $\tau(F)$ также конечна. Обозначим через n порядок группы $\tau(F)$, а через c — ступень нильпотентности группы F. Рассмотрим степенную подгруппу $N = F^{n^c}$. Покажем, что N — группа без кручения. Пусть a — элемент конечного порядка группы N. По лемме 2 из [9] существует $b \in F$ такой, что $a = b^n$. Очевидно, что b — элемент конечного порядка группы F. Так как F нильпотентна, множество всех элементов конечного порядка группы F является подгруппой и, очевидно, совпадает с $\tau(F)$. Из последних двух обстоятельств следует, что $b \in \tau(F)$. Но поскольку порядок группы $\tau(F)$ равен n, то $b^n = 1$, т. е. $a = 1$. Таким образом, N — нильпотентная группа без кручения. Как и в доказательстве леммы 9, используя конечность ранга группы F, легко видеть, что F/N — конечная группа.

Так как N характеристична в F и F характеристична в S, то N характеристична в S. Отсюда и из того, что S нормальна в G, следует, что N нормальна в G. Поскольку фактор-группа G/F является конечным расширением конечно порожденной абелевой группы и F/N — конечная нильпотентная группа, G/N — конечное расширение полициклической группы, поэтому в силу теоремы Гирша [1] группа G/N финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что F/N — конечная подгруппа группы G/N, следует, что в группе G/N существует нормальная подгруппа L/N конечного индекса, тривиально пересекающая F/N. Поэтому L/N вложима в группу $(G/N)/(F/N) \cong G/F$. Отсюда в силу того, что группа G/F является конечным расширением конечно порожденной абелевой группы без кручения, группа L/N содержит конечно порожденную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса. Но поскольку L/N имеет конечный индекс в G/N, и G/N содержит конечно порожденную абелеву подгруппу без кручения конечного индекса. Обозначим ее через A/N. Без потери общности можно считать, что A/N нормальна в G/N. Тогда A — нормальная подгруппа конечного индекса группы G.

Таким образом, получаем нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq G$, где N — нильпотентная группа без кручения, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения и G/A — конечная группа. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга и H — финитно отделимая бесконечная циклическая подгруппа группы G. Тогда существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа l в группе G существует нормальная подгруппа W конечного индекса такая, что $H \cap W = H^{ml}$.*

Доказательство. По лемме 10 в группе G существует нормальный ряд $1 \leq N \leq A \leq G$, где N — нильпотентная группа без кручения, A/N — конечно порожденная абелева группа без кручения и G/A — конечная группа. Обозначим через m целое положительное число, для которого $H^m = H \cap A$.

Рассмотрим сначала случай, когда $H^m \subseteq N$. Очевидно, что в этом случае $H^m = H \cap N$. Поэтому из финитной отделимости подгруппы H в группе G следует финитная отделимость подгруппы H^m в группе N. Кроме того, N — нильпотентная группа без кручения конечного ранга. Из последних двух обстоятельств по лемме 9 следует, что для любого целого положительного числа l в группе N существует характеристическая подгруппа L конечного индекса такая, что $H^m \cap L = (H^m)^l = H^{ml}$. С другой стороны, $H^m \cap L = H \cap A \cap L = H \cap L$. Таким образом, $H \cap L = H^{ml}$. Поскольку L характеристична в N и N нормальна в G, то L нормальна в G. Пусть $\sigma : G \to G/L$ — естественный гомоморфизм. Тогда равенство $H \cap L = H^{ml}$ примет вид $H \cap \operatorname{Ker} \sigma = H^{ml}$. Так как G/A — конечная группа, A/N — конечно порожденная абелева группа и N/L — конечная нильпотентная группа, группа G/L является конечным расширением полициклической группы. Поэтому G/L финитно аппроксимируема. Таким образом, $H\sigma$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G/L, так что существует гомоморфизм ψ группы G/L на конечную группу, инъективный на $H\sigma$. Тогда $\operatorname{Ker} \sigma\psi \cap H = \operatorname{Ker} \sigma \cap H = H^{ml}$. Тем самым в качестве искомой подгруппы W можно взять подгруппу $\operatorname{Ker} \sigma\psi$.

Рассмотрим случай, когда $H^m \nsubseteq N$. Пусть $\varepsilon : G \to G/N$ — естественный гомоморфизм. Так как $H^m \subseteq A$, то $H^m\varepsilon$ — подгруппа конечно порожденной абелевой группы без кручения $A\varepsilon = A/N$. Отсюда и из того, что $H^m \nsubseteq N$, следует, что $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа группы $A\varepsilon$. Очевидно, что $H^m\varepsilon \subseteq H\varepsilon \cap A\varepsilon$. Имеет место и обратное включение. Действительно, пусть $x \in H\varepsilon \cap A\varepsilon$, т. е. $x = h\varepsilon = a\varepsilon$, где $h \in H, a \in A$. Тогда $h^{-1}a \in N$, откуда ввиду того, что $N \subseteq A$, вытекает, что $h \in A$. Следовательно, $h \in H \cap A = H^m$, и поэтому $x \in H^m\varepsilon$. Таким образом, $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$. Поскольку $H^m\varepsilon$ — бесконечная циклическая подгруппа конечно порожденной абелевой группы без кручения $A\varepsilon$, по лемме 9 для любого целого положительного числа l в группе $A\varepsilon$ существует характеристическая подгруппа X конечного индекса такая, что $H^m\varepsilon \cap X = (H^m\varepsilon)^l = (H\varepsilon)^{ml}$. Отсюда и из того, что $H\varepsilon \cap A\varepsilon = H^m\varepsilon$, получаем $H\varepsilon \cap X = H\varepsilon \cap A\varepsilon \cap X = H^m\varepsilon \cap X = (H\varepsilon)^{ml}$. Так как X — характеристическая подгруппа конечного индекса группы $A\varepsilon$ и $A\varepsilon$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы $G\varepsilon$, то X — нормальная подгруппа группы $G\varepsilon$ и фактор-группа $G\varepsilon/X$ конечна. Пусть $\rho : G\varepsilon \to G\varepsilon/X$ — естественный гомоморфизм. Так как ядро X гомоморфизма ρ высекает в бесконечной циклической подгруппе $H\varepsilon$ подгруппу $(H\varepsilon)^{ml}$, порядок группы $H\varepsilon\rho$ равен ml. Поэтому если через W обозначить ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$, то $H \cap W = H^{ml}$. Поскольку $G/W \cong G\rho\varepsilon = G\varepsilon/X$ — конечная группа, W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть A и B — финитно аппроксимируемые группы, H и K — бесконечные циклические финитно отделимые подгруппы групп A и B соответственно и P — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Пусть существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H \cap M = H^{ml}$ и $K \cap N = K^{nl}$. Тогда группа P финитно аппроксимируема.*

Доказательство. По условию в группе A существует нормальная подгруппа U конечного индекса такая, что $H \cap U = H^{mn}$. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A. Так как группа A финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, имеем

$$\bigcap_{i\in I} A_i = 1, \quad \bigcap_{i\in I} A_iH = H. \tag{2}$$

Пусть $U_i = A_i \cap U$ для каждого $i \in I$. Тогда U_i — нормальная подгруппа конечного индекса группы A и в силу (2)

$$\bigcap_{i\in I} U_i = 1, \quad \bigcap_{i\in I} U_iH = H. \tag{3}$$

Поскольку $H \cap U = H^{mn}$, для подходящего целого положительного числа l_i $H \cap U_i = H^{mn} \cap A_i = H^{mnl_i}$. Так как число mnl_i делится на n, по условию в группе B существует нормальная подгруппа V_i конечного индекса такая, что $K \cap V_i = K^{mnl_i}$. Тогда

$$(H \cap U_i)\varphi = H^{mnl_i}\varphi = K^{mnl_i} = K \cap V_i.$$

Тем самым для каждого $i \in I$ подгруппа U_i принадлежит семейству $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, введенному в формулировке леммы 2. Отсюда и из (3) следует, что

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda H = H.$$

Аналогично проверяется, что

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda K = K.$$

Значит, в силу леммы 2 группа P финитно аппроксимируема.

Лемма 13. *Пусть P — свободное произведение конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с циклическими объединенными подгруппами H и K, финитно отделимыми в группах A и B соответственно. Тогда группа P финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Так как свободное произведение двух финитно аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является финитно аппроксимируемой группой, можем считать, что подгруппы H и K бесконечны. Поскольку группы A и B конечно порождены, финитно аппроксимируемы и имеют конечный ранг, а бесконечные циклические подгруппы H и K финитно отделимы в A и B соответственно, то в силу леммы 11 существуют целые положительные числа m и n такие, что для любого целого положительного числа l в группах A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов такие, что $H\cap M = H^{ml}$ и $K\cap N = K^{nl}$. Таким образом, выполняются все условия леммы 12, в силу которой группа P финитно аппроксимируема. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 2 обеспечивается леммами 3 и 13.

Лемма 14. *Пусть P — свободное произведение конечно порожденных групп A и B конечного ранга с объединенными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группах A и B соответственно. Пусть группа P финитно аппроксимируема. Тогда в подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$.*

Доказательство. Результат леммы очевиден, если $H = A$ или $K = B$. Например, если $K = B$, то в качестве подгруппы U можно взять пересечение всех подгрупп группы A, сопряженных с H, а в качестве V — образ подгруппы U относительно φ. Поэтому можно считать, что $H \neq A$ и $K \neq B$. Тогда по лемме 3 из финитной аппроксимируемости группы P следует, что выполняются фильтрационные условия (1).

Пусть $x_1,\dots,x_m$ и $y_1,\dots,y_n$ — системы представителей левых смежных классов групп A и B по подгруппам H и K соответственно. Тогда множества

$$X = \{x_i^{-1}x_j \mid i,j = 1,\dots,m;\ i\neq j\}, \quad Y = \{y_i^{-1}y_j \mid i,j = 1,\dots,n;\ i\neq j\}$$

не пересекаются с подгруппами H и K соответственно. Отсюда и из условий (1) следует, что для любых элементов x из X и y из Y найдутся элементы λ_x и λ_y из Λ такие, что $x\notin A_{\lambda_x}H$, $y\notin B_{\lambda_y}K$. Подгруппы

$$U = \bigcap_{z\in X\cup Y} A_{\lambda_z} \quad \text{и} \quad V = \bigcap_{z\in X\cup Y} B_{\lambda_z}$$

являются нормальными подгруппами конечных индексов групп A и B соответственно (поскольку этим свойством обладают все A_λ и B_λ). Поэтому для завершения доказательства леммы остается проверить, что $U\leq H$, $V\leq K$ и $U\varphi = V$.

Пусть x — произвольный элемент из X. Тогда $x \notin A_{\lambda_x}H$ и, следовательно, $x \notin UH$. Поэтому множество X не пересекается с подгруппой UH, т. е. элементы $x_1, \dots, x_m$ попарно не сравнимы слева по модулю UH. Отсюда следует, что $[A : UH] \geq m = [A : H]$. Это неравенство может выполняться только в случае, когда $UH = H$, т. е. когда $U \leq H$. Аналогично проверяется, что $V \leq K$. Проверка равенства $U\varphi = V$ сводится к прямому вычислению:

$$U\varphi = (U \cap H)\varphi = \Big(\bigcap_{z \in X \cap Y} (A_{\lambda_z} \cap H)\Big)\varphi = \bigcap_{z \in X \cap Y} (A_{\lambda_z} \cap H)\varphi = \bigcap_{z \in X \cap Y} (B_{\lambda_z} \cap K) = V \cap K = V.$$

Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть G — конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда для всех достаточно больших простых p группа G почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Доказательство. По лемме 1 в группе G существует разрешимая минимаксная подгруппа H конечного индекса. Так как группа H финитно аппроксимируема, она редуцирована. В [4, п. 5.3.9] доказано, что если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p. Отсюда следует справедливость леммы 15.

Лемма 16. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B, т. е. A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$. Пусть A имеет конечный ранг. Если A и B почти аппроксимируемы конечными p-группами, то и G почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Это утверждение даже в более общем виде доказано в [8].

Лемма 17. *Пусть P — свободное произведение конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с объединенными подгруппами H и K, имеющими конечные индексы в группах A и B соответственно. Пусть в подгруппах H и K существуют подгруппы U и V конечных индексов, инвариантные в группах A и B соответственно и такие, что $U\varphi = V$. Тогда для всех достаточно больших простых p группа P почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Доказательство. Будем считать группы A и B подгруппами группы P. Тогда $A \cap B = H = K$ и $U = V$ — нормальная подгруппа группы P. По лемме 15 группы A и B, а значит, и подгруппа U почти аппроксимируемы конечными p-группами для всех достаточно больших простых p. Фактор-группа P/U является свободным произведением конечных групп A/U и B/U с объединенной подгруппой H/U. Хорошо известно [3], что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой является почти свободной группой. Поэтому в группе P/U существует свободная подгруппа G/U конечного индекса. Так как G имеет конечный индекс в P, для доказательства почти аппроксимируемости группы P конечными p-группами достаточно установить это свойство для G. Группа G является расширением группы U с помощью свободной группы. Хорошо известно, что любое такое расширение расщепляемо. Поэтому группа G является расщепляемым расширением группы U с помощью свободной группы. Так как группа U почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p, а все свободные группы аппроксимируемы конечными p-группами для любого простого p, группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для всех достаточно больших простых p в силу леммы 16. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 3 обеспечивается леммами 14 и 17, а также тем очевидным фактом, что любая группа, почти аппроксимируемая конечными p-группами, финитно аппроксимируема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.

2. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182, N 1. P. 65–78.

3. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

4. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.

5. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 3. P. 703–706.

6. *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 185–188.

7. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133, N 1. P. 131–143.

8. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевск. сб. 2010. Т. 11, № 3. С. 11–21.

9. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.

Статья поступила 22 февраля 2012 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики,
ул. Ермака, 37, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru