Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.57

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ L–R–СКРУЧЕННЫХ СМЭШ–ПРОИЗВЕДЕНИЙ

П. Чжан, Ц. Ли, Л. Чжан

Аннотация. По H-бимодульной алгебре A построена новая алгебра $A\sharp H$, называемая L-R-*скрученным смэш-произведением*, и доказана теорема двойственности для L-R-скрученных смэш-произведений, которая обобщает теорему двойственности Блаттнера и Монтгомери для смэш-произведений. С использованием теоремы двойственности для L-R-скрученных смэш-произведений установлена взаимосвязь между глобальной размерностью H-бимодульной алгебры A и ее L-R-скрученным смэш-произведением $A\sharp H$.

Ключевые слова: алгебра Хопфа, H-бимодульная алгебра, теорема двойственности, L-R-скрученное смэш-произведение, глобальная размерность.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Понятие смэш-произведения оказалось чрезвычайно полезным в теории градуированных колец. Обобщением смэш-произведения являются L-R-смэш-произведение и скрученное смэш-произведение.

L-R-смэш-произведения введены и изучены в [1–4] с мотивацией и примерами, идущими из теории деформационного квантования. Такое произведение определяется следующим образом: если A — H-бимодульная алгебра, то L-R-смэш-произведение $A\natural H$ — это ассоциативная алгебра, заданная на $A\otimes H$ следующей операцией:

$$(a\natural h)(b\natural g) = \Sigma(a \leftharpoonup g_2)(h_1 \rightharpoonup b)\natural h_2 g_1$$

для любых $a, b \in A, g, h \in H$.

Если правое H-действие A тривиально, то $A\natural H$ совпадает с обычным смэш-произведением $A\#H$.

Скрученные смэш-произведения введены и изучены в [5] с мотивацией и примерами, исходящими из теории дублей Дринфельда. Они определяются следующим образом: если H — алгебра Хопфа с антиподом S, а A — H-бимодульная алгебра, то крученное смэш-произведение $A\star H$ — ассоциативная алгебра, определенная на $A\otimes H$ при помощи следующего умножения:

$$(a\star h)(b\star g) = \Sigma a(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3))\star h_2 g$$

для любых $a, b \in A$, $g, h \in H$.

Работа выполнена при финансовой поддержке: College Special Research Doctoral Disciplines Point Fund of China (20100097110040); Fundamental Research Funds for the Central Universities (KYZ201125).

Заметим, что при участии H-бимодульных алгебр возникают две ассоциативные алгебры, которые имеют похожие алгебраические структуры, а потому дают понятие L-R-скрученного смэш-произведения.

Цель настоящей статьи — построить L-R-скрученное смэш-произведение для бимодульных алгебр и изучить глобальную размерность L-R-скрученного смэш-произведения.

В 1995 г. Ауcландер установил взаимосвязь между гомологической размерностью косой групповой алгебры ΛG и Λ. В последнее время повысился интерес к изучению гомологической размерности алгебр смэш-произведения или, более общо, смешанного произведения. К примеру, в [6] доказано, что $\operatorname{gl.dim}(A\#H) \leq \operatorname{gl.dim}(A)$, если H полупроста, где $\operatorname{gl.dim}(A)$ — левая глобальная размерность алгебры A; в [7] доказано, что $\operatorname{gl.dim}(A\#H) = \operatorname{gl.dim}(A)$, если H и H^* полупросты.

Статья организована следующим образом. В § 2 введено понятие L-R-скрученного смэш-произведения и дано необходимое и достаточное условие того, чтобы L-R-скрученное смэш-произведение было алгеброй. В § 3 приведена теорема двойственности для L-R-скрученных смэш-произведений, обобщающая теорему двойственности Блаттнера и Монтгомери для смэш-произведений. В § 4 изучается глобальная размерность L-R-скрученных смэш-произведений и обобщается следующий результат: если H и H^* полупросты, то $\operatorname{gl.dim}(A\#H) = \operatorname{gl.dim}(A)$.

В данной статье все пространства являются k-пространствами над фиксированным полем k. В терминологии по коалгебрам, биалгебрам и алгебрам Хопфа мы следуем книге Монтгомери [8]. Пусть C — коалгебра с коумножением Δ. Используем обозначение $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ для любого $c \in C$. Антипод в алгебре Хопфа H обозначается через S, а его обратный — через S^{-1}.

§ 2. L-R-скрученные смэш-произведения

Определение. Пусть H — алгебра Хопфа с антиподом S, A — H-бимодульная алгебра с левым H-модульным действием $\rightharpoonup$ и правым H-модульным действием $\leftharpoonup$. L-R-*скрученное смэш-произведение* $A\natural H$ алгебры A с H — это векторное пространство $A \otimes H$ с произведением

$$(a \otimes h)(b \otimes g) = \sum (a \leftharpoonup g_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3)) \otimes h_2 g_1 \tag{2.1}$$

для любых $a, b \in A$, $g, h \in H$.

Далее предполагаем, что H — алгебра Хопфа с антиподом S, а A — H-бимодульная алгебра со следующим условием:

$$\sum a \leftharpoonup h_1 \otimes h_2 = \sum a \leftharpoonup h_2 \otimes h_1 \text{ для любых } a \in A,\ h \in H. \tag{$\dagger$}$$

Предложение 1. L-R-*скрученное смэш-произведение* $A\natural H$ *является алгеброй с единицей* $1_A \natural 1_H$ *тогда и только тогда, когда для любых* $a \in A$, $h, g \in H$ *выполняется равенство*

$$a \leftharpoonup (S(h)g) = a \leftharpoonup (gS(h)). \tag{$\ddagger$}$$

Доказательство. Легко видеть, что $1_A\sharp 1_H$ — единица в $A\sharp H$. Если (‡) выполняется, то для любых $a, b, c \in A$, $h, l, k \in H$ имеем

$$\begin{aligned}[](a\otimes h)(b\otimes l)](c\otimes k) &= \sum[(a\leftharpoonup l_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_3))\otimes h_2l_1](c\otimes k)\\ &= \sum\{[(a\leftharpoonup l_4)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_5))]\leftharpoonup k_2\}(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(h_4l_3))\otimes h_3l_2k_1\\ &= \sum(a\leftharpoonup l_4k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_5)k_3)(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_3)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1\\ &\overset{(\dagger)}{=} \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_5)k_3)(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a\otimes h)[(b\otimes l)(c\otimes k)] &= \sum(a\otimes h)[(b\leftharpoonup k_2)(l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_3))\otimes l_3k_2]\\ &= \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup[(b\leftharpoonup k_3)(l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4))]\leftharpoonup S(h_3))\otimes h_2l_2k_1\\ &= \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup(b\leftharpoonup k_3)\leftharpoonup S(h_5))(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1\\ &= \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup k_3S(h_5))(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1\\ &\overset{(\ddagger)}{=} \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_5)k_3)(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1,\end{aligned}$$

а потому $A\natural H$ — алгебра. Обратно, если $A\natural H$ является алгеброй, то из ассоциативности $A\natural H$ для любых $a, b, c \in A, h, l, k \in H$ имеем

$$\begin{aligned}&\sum(a\leftharpoonup l_4k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_5)k_3)(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_3)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1\\ &\qquad= \sum(a\leftharpoonup l_3k_2)(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup k_3S(h_5))(h_2l_1\rightharpoonup c\leftharpoonup S(l_4)S(h_4))\otimes h_3l_2k_1.\end{aligned}$$

Положив в равенстве выше $a = c = 1_A$, $l = 1_H$, получаем

$$\sum h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_3)k_2\otimes h_2k_1 = \sum h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup k_2S(h_3)\otimes h_2k_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}b\leftharpoonup(S(h)k) &= \sum b\leftharpoonup(S(h_2)k_2)\varepsilon(h_1k_1) = \sum S(h_1)h_2\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_4)k_2\varepsilon(h_3k_1)\\ &= \sum S(h_1)h_2\rightharpoonup b\leftharpoonup k_2S(h_4)\varepsilon(h_3k_1) = b\leftharpoonup(kS(h)).\end{aligned}$$

Легко показать, что A и H являются подалгебрами в $A\sharp H$ с отображениями включения $i : A \to A\sharp H$, $a \mapsto a\sharp 1_H$, и $j : H \to A\sharp H$, $h \mapsto 1_A\sharp h$, соответственно. Кроме того, i и j — гомоморфизмы алгебр.

Пример. Пусть (H, σ) — коквазитреугольная алгебра Хопфа, как в [8]. Определим два действия на H:

$$x\rightharpoonup h = \sum\sigma(x, h_1)h_2;\quad h\leftharpoonup x = \sum\sigma(h_2, S(x))h_1.$$

Ввиду [4] $(H, \sigma, \rightharpoonup, \leftharpoonup)$ является H-бимодульной алгеброй. Предположим, что H кокоммутативна. Тогда H коммутативна, поскольку для любых $x, y \in H$ имеем

$$\begin{aligned}xy &= \sum x_1y_1\varepsilon(x_2y_2) = \sum\underbrace{x_1y_1\sigma(x_2, y_2)}\sigma^{-1}(x_3, y_3)\\ &= \sum\sigma(x_1, y_1)y_2x_2\sigma^{-1}(x_3, y_3) = \sum y_1x_1\sigma(x_2, y_2)\sigma^{-1}(x_3, y_3) = yx.\end{aligned}$$

Таким образом, условия (†) и (‡) выполняются. Следовательно, имеем L-R-скрученное смэш-произведение $H\sharp H$ с умножением, заданным правилом

$$(h\sharp x)(g\sharp y) = \sum\sigma(h_2, S(y_2))\sigma(x_1, g_1)\sigma(g_3, x_3)h_1g_2\sharp x_2y_1.$$

§ 3. Теорема двойственности для L-R-скрученных смэш-произведений

В данном параграфе H — конечномерная алгебра Хопфа с биективным антиподом S, A — H-бимодульная алгебра, удовлетворяющая условиям (†) и (‡), а $A\sharp H$ — L-R-скрученное смэш-произведение. Покажем, что $(A\sharp H)\#H^* \cong \mathrm{End}(A\sharp H)_A$, где $A\sharp H$ — правый A-модуль посредством умножения, а $\mathrm{End}(A\sharp H)_A$ обозначает алгебру правых A-модульных эндоморфизмов.

Лемма 1. *$A\sharp H$ является левой H^*-модульной алгеброй, заданной правилами:*

$$f \rightharpoonup (a\sharp h) = a\sharp(f \rightharpoonup h) = \sum a\sharp h_1\langle f, h_2\rangle$$

для любых $f \in H^*$, $a \in A$, $h \in H$.

Доказательство. Во-первых, покажем, что $A\sharp H$ является левым H^*-модулем: для любых $f, g \in H^*$, $h \in H$ имеем

$$1_{H^*} \rightharpoonup (a\sharp h) = \sum a\sharp h_1\langle \varepsilon, h_2\rangle = a\sharp h,$$

$$(fg) \rightharpoonup (a\sharp h) = \sum a\sharp h_1\langle fg, h_2\rangle = \sum a\sharp h_1\langle f, h_2\rangle\langle g, h_3\rangle = f \rightharpoonup (g \rightharpoonup (a\sharp h)).$$

Более того, следующие вычисления показывают, что $A\sharp H$ является левой H^*-модульной алгеброй. Действительно, для любых $f \in H^*$, $a, b \in A$, $h, l \in H$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum (f_1 \rightharpoonup (a\sharp h))(f_2 \rightharpoonup (b\sharp l)) = \sum (a\sharp h_1)\langle f_1, h_2\rangle(b\sharp l_1)\langle f_2, l_2\rangle \\
&= \sum (a\sharp h_1)(b\sharp l_1)\langle f_1, h_2\rangle\langle f_2, l_2\rangle = \sum (a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3))\sharp h_2 l_1\langle f_1, h_4\rangle\langle f_2, l_3\rangle \\
&= \sum (a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3))\sharp h_2 l_1\langle f, h_4 l_3\rangle \\
&\overset{(\dagger)}{=} \sum (a \leftharpoonup l_3)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_4))\sharp h_2 l_1\langle f, h_3 l_2\rangle \\
&= \sum f \rightharpoonup ((a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3))\sharp h_2 l_1) = f \rightharpoonup ((a\sharp h)(b\sharp l)),
\end{aligned}$$

$$f \rightharpoonup (1_A\sharp 1_H) = \varepsilon_{H^*}(f)(1_A\sharp 1_H).$$

Лемма 2. *Отображение $\alpha : (A\sharp H)\#H^* \to \mathrm{End}(A\sharp H)_A$ является гомоморфизмом алгебр, определенным правилом:*

$$\alpha((x\sharp h)\#f)(y\sharp g) = (x\sharp h)(y\sharp(f \rightharpoonup g))$$

для любых $f \in H^*$, $x, y \in A$, $h, g \in H$.

Доказательство. Во-первых, для любых $h, g \in H$, $a, b, w \in A$ и $f \in H^*$ имеем

$$\begin{aligned}
&\alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp g) \leftharpoonup w) = \alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp g)(w\sharp 1_H)) \\
&= \sum \alpha((a\sharp h)\#f)(b(g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(g_3))\sharp g_2) = \sum (a\sharp h)(b(g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(g_4))\sharp g_2\langle f, g_3\rangle) \\
&= \sum (a \leftharpoonup g_3)(h_1 \rightharpoonup (b(g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(g_5))) \leftharpoonup S(h_3))\sharp h_2 g_2\langle f, g_4\rangle \\
&= \sum (a \leftharpoonup g_3)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5))(h_2 g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(g_5)S(h_4))\sharp h_3 g_2\langle f, g_4\rangle \\
&= \sum (a \leftharpoonup g_3)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5))(h_2 g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(h_4 g_5))\sharp h_3 g_2\langle f, g_4\rangle \\
&\overset{(\dagger)}{=} \sum (a \leftharpoonup g_4)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5))(h_2 g_1 \rightharpoonup w \leftharpoonup S(h_4 g_3))\sharp h_3 g_2\langle f, g_5\rangle \\
&\qquad = \alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp g)) \leftharpoonup w,
\end{aligned}$$

поэтому $\operatorname{Im}\alpha \in \operatorname{End}(A\sharp H)_A$.

Проверим, что α является гомоморфизмом алгебр. Действительно, для любых $a, b, x \in A$, $h, l, y \in H$ и $f, g \in H^*$ имеем

$$\begin{aligned}
\alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp l)\#g))(x\sharp y) &= \sum \alpha((a\sharp h)(f_1 \rightharpoonup (b\sharp l))\#f_2 g)(x\sharp y) \\
&= \sum \alpha((a\sharp h)(b\sharp l_1)\langle f_1, l_2\rangle \# f_2 g)(x\sharp y) \\
&= \sum \alpha((a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3)\sharp h_2 l_1)\#f_2 g)(x\sharp y)\langle f_1, l_3\rangle \\
&= \sum((a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3))\sharp h_2 l_1)(x\sharp(f_2 g \rightharpoonup y))\langle f_1, l_3\rangle \\
&= \sum((a \leftharpoonup l_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_3)\sharp h_2 l_1))(x\sharp y_1)\langle f_2 g, y_2\rangle\langle f_1, l_3\rangle \\
&= \sum(((a \leftharpoonup l_4)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5))) \leftharpoonup y_2)(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(h_4 l_3))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f_2 g, y_3\rangle\langle f_1, l_5\rangle \\
&= \sum((a \leftharpoonup l_4 y_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5)y_3)(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(h_4 l_3)))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f_2 g, y_4\rangle\langle f_1, l_5\rangle \\
&= \sum((a \leftharpoonup l_4 y_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5)y_3)(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_3)S(h_4)))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f_2, y_4\rangle\langle f_1, l_5\rangle\langle g, y_5\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha((a\sharp h)\#f)\alpha((b\sharp l)\#g)(x\sharp y) &= \alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp l)(x\sharp(g \rightharpoonup y))) \\
&= \alpha((a\sharp h)\#f)((b\sharp l)(x\sharp y_1))\langle g, y_2\rangle \\
&= \alpha((a\sharp h)\#f)((b \leftharpoonup y_2)(l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_3))\sharp l_2 y_1)\langle g, y_3\rangle \\
&= \sum(a\sharp h)(((b \leftharpoonup y_2)(l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_3)))\sharp(f \rightharpoonup (l_2 y_1)))\langle g, y_3\rangle \\
&= \sum(a\sharp h)(((b \leftharpoonup y_3)(l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_4)))\sharp l_2 y_1)\langle f, l_3 y_2\rangle\langle g, y_4\rangle \\
&= \sum(a \leftharpoonup l_3 y_2)(h_1 \rightharpoonup ((b \leftharpoonup y_4)(l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_5))) \rightharpoonup S(h_3))\sharp h_2 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f, l_4 y_3\rangle\langle g, y_5\rangle \\
&= \sum(a \leftharpoonup l_3 y_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup y_4 S(h_5))(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_5)S(h_4))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f, l_4 y_3\rangle\langle g, y_5\rangle \\
&\overset{(\dagger)}{=} \sum((a \leftharpoonup l_4 y_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup y_3 S(h_5))(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_3)S(h_4)))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f_1, l_5\rangle\langle f_2, y_4\rangle\langle g, y_5\rangle \\
&\overset{(\ddagger)}{=} \sum((a \leftharpoonup l_4 y_2)(h_1 \rightharpoonup b \leftharpoonup S(h_5)y_3)(h_2 l_1 \rightharpoonup x \leftharpoonup S(l_3)S(h_4)))\sharp h_3 l_2 y_1 \\
&\qquad \times \langle f_1, l_5\rangle\langle f_2, y_4\rangle\langle g, y_5\rangle.
\end{aligned}$$

Пусть f_i — базис H, а ψ_i — дуальный базис в H^* такой, что $\langle f_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$ для всех i, j. Тогда

$$\sum f_i\langle\psi_i, h\rangle = h, \quad \sum\langle\phi, f_i\rangle\psi_i = \phi$$

для любых $h \in H, \phi \in H^*$.

Определим линейное отображение $\beta : \operatorname{End}(A\sharp H)_A \to (A\sharp H)\#H^*$ при помощи

$$\beta : T \mapsto \sum(T(1\sharp f_{i(2)})(1\sharp S^{-1}(f_{i(1)}))\#\psi_i.$$

Лемма 3. *Отображения α и β взаимно обратные.*

Доказательство. Нам необходимо проверить, что

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{(A\natural H)\# H^*}, \quad \alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(A\natural H)_A}.$$

Действительно, для любых $x \in A, h \in H$ и $\phi \in H^*$ имеем

$$\begin{aligned}\beta \circ \alpha((x\natural h)\#\phi) &= \sum \alpha((x\natural h)\#\phi)(1\natural f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)}))\#\psi_i \\ &= \sum((x\natural h)(1\natural f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)})))\#\psi_i\langle\phi, f_{i(3)}\rangle \\ &= \sum((x \leftharpoonup f_{i(3)})\natural h f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)})))\#\psi_i\langle\phi, f_{i(4)}\rangle \\ &= \sum((x \leftharpoonup f_{i(4)}S^{-1}(f_{i(1)}))\natural h f_{i(3)}S^{-1}(f_{i(2)}))\#\psi_i\langle\phi, f_{i(5)}\rangle \\ &= \sum(x\natural h)\#\psi_i\langle\phi, f_i\rangle = (x\natural h)\#\phi\end{aligned}$$

и для любого $T \in \mathrm{End}(A\natural H)_A$

$$\begin{aligned}\alpha \circ \beta(T)(x\natural h) &= \sum \alpha(T(1\natural f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)}))\#\psi_i)(x\natural h) \\ &= \sum(T(1\natural f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)})))(x\natural(\psi_i \rightharpoonup h)) \\ &= \sum T(1\natural f_{i(2)})(1\natural S^{-1}(f_{i(1)}))(x\natural h_1)\langle\psi_i, h_2\rangle \\ &= \sum T(1\natural f_{i(4)})((S^{-1}(f_{i(3)}) \rightharpoonup x \leftharpoonup f_{i(1)})\natural S^{-1}(f_{i(2)})h_1)\langle\psi_i, h_2\rangle \\ &= \sum T(1\natural h_5)(S^{-1}(h_4) \rightharpoonup x \leftharpoonup h_2\natural S^{-1}(h_3)h_1) \\ &\overset{(\dagger)}{=} \sum T(1\natural h_5)(S^{-1}(h_4) \rightharpoonup x \leftharpoonup h_3\natural S^{-1}(h_2)h_1) \\ &= \sum T(1\natural h_3)(S^{-1}(h_2) \rightharpoonup x \leftharpoonup h_1\natural 1) = \sum T((1\natural h_3)(S^{-1}(h_2) \rightharpoonup x \leftharpoonup h_1\natural 1)) \\ &= \sum T(h_3 S^{-1}(h_2) \rightharpoonup x \leftharpoonup h_1 S(h_5)\natural h_4) = \sum T((y \leftharpoonup h_1 S(h_3))\natural h_2) = T(y\natural h),\end{aligned}$$

где использован тот факт, что T является правым A-модульным морфизмом.

В соответствии с доказанными выше леммами получается

Теорема 1 (теорема двойственности для L-R-скрученных смэш-произведений). *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, A — H-бимодульная алгебра, а $A\natural H$ — L-R-скрученное смэш-произведение. Тогда существует канонический изоморфизм между алгебрами $(A\natural H)\#H^*$ и $\mathrm{End}(A\natural H)_A$:*

$$(A\natural H)\#H^* \cong \mathrm{End}(A\natural H)_A.$$

Предложение 2. *Существует следующий изоморфизм правых A-модулей:*

$$\varphi : A\natural H \to H \otimes A, \quad a\natural h \mapsto \sum h_2 \otimes S^{-1}(h_1) \rightharpoonup a \leftharpoonup h_3$$

для любых $a \in A$, $h \in H$.

Доказательство. Очевидно, L-R-скрученное смэш-произведение $A\natural H$ — это правый A-модуль по умножению, и легко показать, что тензорное произведение $A \otimes H$ является правым A-модулем, определенным правилом

$$(h \otimes a) \leftharpoonup b = h \otimes ab.$$

Пусть $\theta : H \otimes A \to A\natural H$, $h \otimes a \mapsto \sum(h_1 \rightharpoonup a \leftharpoonup S(h_3))\natural h_2$. Легко доказать, что θ — правый A-модульный морфизм такой, что $\theta \circ \varphi = \mathrm{id}_{A\natural H}$, $\varphi \circ \theta = \mathrm{id}_{H\otimes A}$.

По теореме 1 и предложению 2 получаем следствие, которое будет очень полезно в § 4.

Следствие 1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, A — H-бимодульная алгебра и $A\natural H$ —* L-R-*скрученное смэш-произведение. Тогда существует канонический изоморфизм между алгебрами $(A\natural H)\#H^*$ и $M_n(A)$:*

$$(A\natural H)\#H^* \cong M_n(A),$$

где $M_n(A)$ обозначает алгебру $n \times n$-матриц над A.

Если правое действие тривиально, то L-R-скрученное смэш-произведение является обычным смэш-произведением, поэтому получаем теорему Блаттнера и Монтгомери.

Следствие 2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, A — левая H-модульная алгебра и $A\#H$ — смэш-произведение. Тогда*

$$(A\#H)\#H^* \cong M_n(A).$$

§ 4. Глобальная размерность L-R-скрученных смэш-произведений

В данном параграфе H обозначает конечномерную алгебру Хопфа, A — H-бимодульную алгебру, а $A\natural H$ — L-R-скрученное смэш-произведение. Прямыми вычислениями получаем следующую формулу:

$$a\natural h = \sum (a \leftharpoonup S^{-1}(h_2)\natural 1)(1\natural h_1).$$

Пусть аналогично предложению 2 из [9] V, W — левые $A\natural H$-модули. Если $\lambda : V \to W$ — A-модульный морфизм, то легко доказать, что отображение $\widetilde{\lambda} : V \to W$, определенное правилом $v \mapsto \sum S(t_1) \cdot \lambda(t_2 \cdot v)$, является $A\natural H$-модульным морфизмом, где t — ненулевой правый интеграл.

Предложение 3. *Пусть H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа и P — левый $A\natural H$-модуль. Тогда P — проективный левый $A\natural H$-модуль тогда и только тогда, когда P — проективный левый A-модуль.*

Доказательство. Предположим, что P является проективным левым $A\natural H$-модулем. Поскольку $A\natural H$ — свободный левый A-модуль, P — проективный левый A-модуль.

Обратно, для любых $A\natural H$-модулей M, N пусть $g : M \to N$ и $h : P \to N$ — два $A\natural H$-модульных морфизма таких, что g сюръективен. Чтобы доказать проективность P как левого $A\natural H$-модуля, достаточно найти отображение $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{A\natural H}(P, M)$, удовлетворяющее $h = g \circ \tilde{f}$.

Так как A и H — подалгебры в $A\natural H$, то M, N являются левыми A-модулями, а h, g — A-модульный и H-модульный морфизмы. Поскольку P проективен как левый A-модуль, существует отображение $f \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$ такое, что $h = g \circ f$. Определим $\tilde{f}(p) = \sum S(t_1) \cdot f(t_2 \cdot p)$ для любого $p \in P$, где t — ненулевой правый интеграл и $\varepsilon(t) = 1$. Тогда $\tilde{f}$ является $A\natural H$-гомоморфизмом таким, что

$$\begin{aligned} g\tilde{f}(p) &= \sum g(S(t_1) \cdot f(t_2 \cdot p)) = \sum S(t_1) \cdot gf(t_2 \cdot p) \\ &= \sum S(t_1) \cdot h(t_2 \cdot p) = \sum h(S(t_1)t_2 \cdot p) = h(\varepsilon(t)p) = h(p). \end{aligned}$$

Следовательно, P — проективный левый $A\natural H$-модуль, что завершает доказательство.

Из доказательства достаточности в предложении 3 получаем

Замечание. Пусть H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа и Q — левый $A\natural H$-модуль. Если Q инъективен как A-модуль, то он также инъективен как $A\natural H$-модуль.

Лемма 4. *Пусть H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа и M — правый $A\natural H$-модуль. Тогда M является плоским правым $A\natural H$-модулем тогда и только тогда, когда M является плоским правым A-модулем.*

Доказательство. Пусть M — плоский правый $A\natural H$-модуль. Рассмотрим точную последовательность правых $A\natural H$-модулей

$$0 \to K \longrightarrow F \longrightarrow M \to 0,$$

где F свободен как правый $A\natural H$-модуль. Так как $A\natural H$ является свободным правым A-модулем, то и F свободен как правый A-модуль. Из теоремы 3.62 в [10] легко получается, что M — плоский правый A-модуль.

Обратно, предположим, что M — плоский правый A-модуль. Мы рассматриваем Q (поле рациональных чисел) и Z (кольцо целых чисел) как Z-модули. Модуль $M^* = \mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)$ определяется естественным образом как левый $A\natural H$-модуль и левый A-модуль, что индуцируется правым A-модулем M (см. [10]). Таким образом, M^* инъективен как левый A-модуль (см. предложение 3.54 из [10]). По замечанию выше M^* также инъективен как левый $A\natural H$-модуль. Отсюда следует, что M является плоским как правый $A\natural H$-модуль.

Лемма 5 [6, следствие 4.1]. *Пусть H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Тогда* $\mathrm{gl.\,dim}(A\#H) \le \mathrm{gl.\,dim}(A)$.

Лемма 6 [11, лемма 2]. *Пусть A — левая H-модульная алгебра и M — правый $A\#H$-модуль. Предположим, что H^* унимодулярна, $t \in \int_H$ (пространство левых интегралов в H) такой, что $t \cdot c = 1_A$ для некоторого $c \in Z(A)$ (центр A). Тогда M является плоским правым $A\#H$-модулем тогда и только тогда, когда M плоский как правый A-модуль.*

Теорема 2. *Предположим, что H и H^* полупросты. Тогда*
(i) $\mathrm{gl.\,dim}(A\natural H) = \mathrm{gl.\,dim}(A)$,
(ii) $\mathrm{w.\,dim}(A\natural H) = \mathrm{w.\,dim}(A)$.

Доказательство. (i) Если левая глобальная размерность A бесконечна, то результат очевиден. Предположим, что левая глобальная размерность A конечна: $\mathrm{gl.\,dim}\, A = n$. Для любого $A\natural H$-модуля N рассмотрим любую его проективную резольвенту

$$\mathbf{P_N} : \dots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} N \to 0.$$

По предложению 3 $\mathbf{P_N}$ также является проективной резольвентой для N как A-модуля. Следовательно, его n-я сизигия проективна как A-модуль, а потому и проективна как $A\natural H$-модуль. Отсюда $\mathrm{p.\,dim}(N) \le n$, а значит, $\mathrm{gl.\,dim}(A\natural H) \le \mathrm{gl.\,dim}(A)$.

Заметим, что $A\natural H$ является левой H^*-модульной алгеброй по лемме 1. По лемме 5 $\mathrm{gl.\,dim}(A\#H) \le \mathrm{gl.\,dim}(A)$, поэтому $\mathrm{gl.\,dim}((A\natural H)\#H^*) \le \mathrm{gl.\,dim}(A\natural H)$. Так как $(A\natural H)\#H^* \cong M_n(A)$ по следствию 1, а $M_n(A)$ Морита-эквивалентна A, по лемме 5

$$\mathrm{gl.\,dim}(A) = \mathrm{gl.\,dim}((A\natural H)\#H^*) \le \mathrm{gl.\,dim}(A\natural H) \le \mathrm{gl.\,dim}(A).$$

Последнее влечет $\mathrm{gl.\,dim}(A\natural H) = \mathrm{gl.\,dim}(A)$.

(ii) Аналогично можно доказать, что $\mathrm{w.\,dim}(A\natural H) \le \mathrm{w.\,dim}(A)$.

Обратно, поскольку H полупроста, существует $t \in \int_H$ такой, что $\varepsilon(t) \ne 0$. Выберем $t \in \int_H$ с условием $\varepsilon(t) = 1$, тогда существует $c \in Z(A)$ такой, что $t \cdot c =$

1_A. Поэтому по лемме 6 $\mathrm{w.dim}(A\#H) \leq \mathrm{w.dim}(A)$, откуда $\mathrm{w.dim}((A\sharp H)\#H^*) \leq \mathrm{w.dim}(A\sharp H)$. Следствие 1 влечет равенство $\mathrm{w.dim}(A) = \mathrm{w.dim}((A\sharp H)\#H^*)$, стало быть,

$$\mathrm{w.dim}(A) = \mathrm{w.dim}((A\sharp H)\#H^*) \leq \mathrm{w.dim}(A\sharp H) \leq \mathrm{w.dim}(A)$$

и $\mathrm{w.dim}(A\sharp H) = \mathrm{w.dim}(A)$.

Следствие 3. *Предположим, что H и H^* полупросты. Тогда*

(i) *$A\sharp H$ полупроста (наследственна) тогда и только тогда, когда A полупроста (наследственна);*

(ii) *$A\sharp H$ является алгеброй фон Неймана тогда и только тогда, когда A является алгеброй фон Неймана.*

Замечание. (1) Напомним, что H и H^* полупросты тогда и только тогда, когда $S^2 = \mathrm{id}$ и $\dim H \neq 0$ над k по [12, следствие 3.2]. Поэтому при $S^2 = \mathrm{id}$ и $\dim(H) \neq 0$ над k алгебры H и H^* полупросты, а значит, имеет место теорема 2.

(2) Если правое действие бимодульной алгебры A тривиально, то L-R-скрученное смэш-произведение является обычным смэш-произведением $A\#H$, откуда

(i) $\mathrm{gl.dim}(A\#H) = \mathrm{gl.dim}(A)$,

(ii) $\mathrm{w.dim}(A\#H) = \mathrm{w.dim}(A)$.

В этом случае $A\#H$ полупроста (наследственна) тогда и только тогда, когда A полупроста (наследственна), а $A\#H$ является алгеброй фон Неймана тогда и только тогда, когда A является алгеброй фон Неймана.

(3) Для L-R-скрученного смэш-произведения $A\sharp H$ получаем теорему Машке в следующем виде: предположим, что H и H^* полупросты; если A полупроста, то $A\sharp H$ также полупроста.

(4) Предположим, что (H, σ) — кокоммутативная коквазитреугольная алгебра Хопфа. Тогда из приведенного примера имеем L-R-скрученное смэш-произведение $H\sharp H$, а потому снова по (1) и (3) $H\sharp H$ полупроста.

Благодарности. Автор Лян-юнь Чжан признателен профессору Юнчан Чжу за приглашение посетить Гонконгский университет науки и технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonneau P., Gerstenhaber M., Giaquinto A., Sternheimer D.* Quantum groups and deformation quantization: Explicit approaches and implicit aspects // J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 3703–3741.
2. *Bonneau P., Sternheimer D.* Hopf algebras, quantum groups and deformation quantization // Hopf algebras in noncommutative geometry and physics. New York: Marcel Dekker, 2005. P. 55–70. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 239).
3. *Panaite F., Oystaeyen F. V.* L-R smash product for (quasi) Hopf algebras // J. Algebra. 2004. V. 309, N 1. P. 168–191.
4. *Zhang L. Y.* L-R smash products for bimodule algebras // Prog. Nat. Sci. 2006. V. 13, N 6. P. 580–587.
5. *Wang S. H., Li J. Q.* On twisted smash products for bimodule algebras and the Drinfeld double // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 8. P. 2435–2444.
6. *Yang S. L.* Global dimension for Hopf actions // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 8. P. 3653–3667.
7. *Liu G. X.* A note on the global dimension of smash products // Comm. Algebra. 2005. V. 33. P. 2625–2627.
8. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; V. 82).
9. *Cohen M., Fishman D.* Hopf algebra actions // J. Algebra. 1986. V. 100. P. 363–379.

10. *Rotman J. J.* An introduction to homological algebra. New York: Springer Science+Business Media, 2008.
11. *Wang Z. X., Zhao H.* Weak global dimension of smash products of Hopf algebras // J. Math. Res. Expo. 2006. V. 26, N 1. P. 40–42.
12. *Etingof P., Gelaki S.* On finite-dimensional semisimple and cosemisimple Hopf algebras in positive characteristic // Int. Math. Res. Not. 1998. V. 16. P. 851–864.

Статья поступила 8 апреля 2012 г.

Peng Zhang (Чжан Пэн)
University of International Business and Economics,
Beijing, China

Qiang Li (Ли Цян), Liang-yun Zhang (Чжан Лян-юнь)
Nanjing Agricultural University,
Nanjing, China
zlyun@njau.edu.cn