Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.98

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ТИПА ХИЛЛЕ — ФИЛЛИПСА ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

О. В. Лопушанский, С. В. Шарин

Аннотация. Для генераторов n-параметрических сильно непрерывных полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве, построено функциональное исчисление типа Хилле — Филлипса, использующее в качестве символов аналитические функции из образа преобразования Лапласа сверточной алгебры медленно растущих обобщенных функций с носителями в положительном конусе $\mathbb{R}^n_+$. Образ такого исчисления описан с помощью коммутанта полугруппы сдвигов вдоль конуса. Рассмотрены дифференциальные свойства исчисления и примеры.

Ключевые слова: исчисление Хилле — Филлипса, обобщенные функции медленного роста, преобразование Лапласа.

1. Введение

Функциональное исчисление Хилле — Филлипса, построенное в [1], придает содержание символу $f(A)$ в случае, если A — генератор C_0-полугруппы $0 \leq t \longmapsto T(t)$ в некотором банаховом пространстве E, а f принадлежит алгебре $\mathscr{A}_\omega$ комплекснозначных аналитических функций вида $f(z) = \int\limits_0^\infty e^{tz}\, d\sigma(t)$, $\operatorname{Re} z \leq \omega$, где σ принадлежит сверточной алгебре мер на $[0, \infty)$. При этом функциональное исчисление рассматривается как отображение $\Phi_A : f \longmapsto f(A)$, где $f(A)x = \int\limits_0^\infty T(t)x\, d\sigma(t)$, $x \in E$, осуществляющее алгебраический гомоморфизм из алгебры символов $\mathscr{A}_\omega$ в алгебру $\mathscr{L}(E)$ линейных непрерывных операторов.

Нельсон [2] и Балакришнан [3] распространили такое исчисление на более широкие классы аналитических функций. А. Р. Миротин в серии работ [4–6] построил функциональное исчисление для функций Бернштейна и исследовал его свойства. Приложение исчисления Хилле — Филлипса к гидрологии, в частности, к моделированию движения приповерхностных вод рассмотрено в [7].

Мы строим обобщение функционального исчисления Хилле — Филлипса для генераторов $A = (A_1, \dots, A_n)$ n-параметрических равномерно ограниченных C_0-полугрупп $e^{tA} = e^{t_1 A_1 + \dots + t_n A_n}$, действующих в некотором банаховом пространстве E. Вместо алгебры мер на $[0, \infty)$ (рассмотренной в классическом случае) используем сверточную алгебру Владимирова S'_+ медленно растущих обобщенных функций Шварца с носителями в $\mathbb{R}^n_+$. В этом случае алгебра символов исчисления типа Хилле — Филлипса состоит из аналитических в трубчатой комплексной области $\mathbb{C}^n_+ = \left\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^n : y \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+\right\}$ функций $\hat{f}$, являющихся преобразованиями Лапласа распределений из S'_+. Функциональное исчисление $\Phi_A : \hat{f} \longmapsto \hat{f}(A)$ (теорема 2) определяем по формулам

$$\hat{f}(A)\hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(f \star x)(t)\,dt, \quad \hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}x(t)\,dt,$$

где $f \star x$ обозначает обобщение кросс-корреляции (см. формулу (2)) распределения $f \in S'_+$ и E-значной функции x, носитель $\operatorname{supp} x$ которой лежит в положительном конусе $\mathbb{R}^n_+$. Пространство $\widehat{S}_A$ всех элементов $\hat{x}_A$ плотно в E (лемма 3). В отличие от классического случая оператор $\hat{f}(A)$ неограниченный на E и имеет плотную область определения $\widehat{S}_A$. Кроме того, справедливо равенство

$$\widehat{\partial^k f}(A)\hat{x}_A = (-1)^{|k|}\hat{f}(A)\widehat{\partial^k x}_A, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+,$$

причем для нахождения выражения из правой стороны последнего равенства можно воспользоваться теоремой 3.

Полученные результаты проиллюстрированы на примерах, в частности, рассмотрен случай n-параметрической гауссовской полугруппы.

2. Основные понятия и обозначения

Пусть $\mathscr{L}(X)$ — пространство линейных непрерывных операторов над локально выпуклым пространством X, а X' — сопряженное к X пространство линейных непрерывных функционалов. Далее пространства $\mathscr{L}(X)$ и X' наделяем локально выпуклой топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах в X.

Для произвольных $t, s \in \mathbb{C}^n$ (или $t, s \in \mathbb{R}^n$) и мультииндексов $m, k \in \mathbb{Z}^n_+$ используем обозначения: $ts := t_1s_1 + \dots + t_ns_n$, $|t| := \sqrt{t\bar{t}}$, $|k| := k_1 + \dots + k_n$, $m! := m_1! \dots m_n!$, $t^m = t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$ и $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdots \partial_n^{k_n}$, где $\partial_j^{k_j} := \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, $j = 1, \dots, n$. Для произвольных мультииндексов $m, k \in \mathbb{Z}^n_+$ запись $m \preccurlyeq k$ означает $m_j \le k_j$ для всех $j = 1, \dots, n$. Стандартный ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n$ обозначаем через $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $\mathbb{R}^n_+ := \times_{j=1}^n [0, \infty)$ — неотрицательный замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$. Следуя [1, 8], n-параметрическое семейство $\big\{U(t) : t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|)$, называем *n-параметрической полугруппой операторов*, если $U(\cdot)$ — отображение $U(\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \longmapsto \mathscr{L}(E)$, удовлетворяющее условиям:

а) $U(t + s) = U(t) \circ U(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}^n_+$,

б) $U(0) = I$ — единичный оператор из $\mathscr{L}(E)$.

Полугруппу $\big\{U(t) : t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ называют *сильно непрерывной* (или *C_0-полугруппой*), если для всех $x \in E$ справедливо равенство

$$\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni t \to 0} \|U(t)x - x\| = 0.$$

Коммутантом $[U(t)]^c$ полугруппы $\big\{U(t) : t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ называют подалгебру в $\mathscr{L}(E)$ вида $[U(t)]^c := \big\{B \in \mathscr{L}(E) : U(t) \circ B = B \circ U(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$.

Каждой n-параметрической полугруппе $\big\{U(t) : t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$ поставим в соответствие маргинальные однопараметрические полугруппы $\{V(t_j) := U(te_j) : t_j \in \mathbb{R}_+\}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $U(t)$ представляется в виде композиции $U(t) = V(t_1) \circ \dots \circ V(t_n)$ этих полугрупп, коммутирующих между собой (см. [1]).

Генератор A_j *маргинальной полугруппы* $\{V(t_j) : t_j \in \mathbb{R}_+\}$, $j = 1,\dots,n$, определяем по формуле

$$A_j x := \lim_{t_j\to+0} \frac{V(t_j)x - x}{t_j} = \partial_j^1 V(t_j)x\,|_{t_j=+0}, \quad x \in \mathfrak{D}(A_j),$$

где $\mathfrak{D}(A_j)$ состоит из всех $x \in E$, для которых приведенный выше предел существует. *Генератором полугруппы* $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+^n\}$ называем оператор $A := (A_1,\dots,A_n)$. Обозначим $\mathfrak{D}(A) := \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{D}(A_j)$.

Пусть $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+^n\}$ — C_0-полугруппа. Тогда справедливы следующие свойства (см. [8]):

а) если $x \in \mathfrak{D}(A_j)$, то $U(t)x \in \mathfrak{D}(A_j)$ и $A_jU(t)x = U(t)A_jx$, $j = 1,\dots,n$;

б) если $x \in E$ и $t \in \mathbb{R}_+^n$, то $U(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ и $\mathfrak{D}(A)$ плотно в E;

в) если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то $A_iA_jx = A_jA_ix$ для всех $i,j = 1,\dots,n$.

Чтобы подчеркнуть тот факт, что генератором полугруппы $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+^n\}$ является оператор $A = (A_1,\dots,A_n)$, в дальнейшем будем использовать стандартное обозначение $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}_+^n}$, где $e^{tA} := e^{t_1A_1} \circ \dots \circ e^{t_nA_n}$, а $\{e^{t_jA_j}\}_{t_j\ge0}$ — соответствующая маргинальная полугруппа. Отметим, что это обозначение отнюдь не значит, что соответствующую полугруппу понимаем как операторную экспоненту.

Пусть $S^{\alpha,\beta}$ обозначает банахово пространство функций на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |t^m\partial^k\varphi(t)|, \quad \alpha,\beta,m,k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Каждое вложение $S^{\alpha,\beta} \hookrightarrow S^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ и $\gamma \preccurlyeq \beta$ компактно (см. [9, 10]). Поэтому пространство Шварца $S := \bigcap\limits_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n} S^{\alpha,\beta}$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$ наделим топологией проективного предела $\lim\operatorname{pr}_{\alpha,\beta} S^{\alpha,\beta}$ относительно этих вложений. Следовательно, S — монтелево ядерное FS-пространство [10, 11], а его сильно сопряженное пространство S' медленно растущих распределений Шварца является монтелевым ядерным DFS-пространством. Как обычно, символ $\langle f,\varphi\rangle$ обозначает значение функционала $f \in S'$ на основной функции $\varphi \in S$.

Пусть S'_+ — замкнутое подпространство в S' тех распределений, носители которых содержатся в $\mathbb{R}_+^n$. Известно, что S'_+ — алгебра относительно свертки распределений, определяемой по формуле $\langle f*g,\varphi\rangle = \langle f(s),\langle g(p),\varphi(p+s)\rangle\rangle$, $\varphi \in S$ [9]. Единичным элементом этой алгебры является функция Дирака δ.

3. Вспомогательные утверждения

Определим пространство $S_+^{\alpha,\beta} = \{\psi|_{\mathbb{R}_+^n} : \psi \in S^{\alpha,\beta}\}$, наделенное нормой

$$\|\varphi\|_{S_+^{\alpha,\beta}} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}_+^n} |t^m\partial^k\varphi(t)|, \quad \alpha,\beta,m,k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Здесь $\psi|_{\mathbb{R}_+^n}$ обозначает сужение функции ψ на конус $\mathbb{R}_+^n$. Заметим, что все производные $\partial^k\varphi(t)$ в точках границы конуса $\mathbb{R}_+^n$ понимаем как односторонние, причем все они могут быть непрерывно продолжены на все пространство $\mathbb{R}^n$ (см. лемму 1). Обозначим $S_+ = \bigcap\{S_+^{\alpha,\beta} : \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$ и наделим это пространство топологией проективного предела $\lim\operatorname{pr}_{\alpha,\beta} S_+^{\alpha,\beta}$ относительно компактных вложений $S_+^{\alpha,\beta} \hookrightarrow S_+^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ и $\gamma \preccurlyeq \beta$.

Лемма 1. *Существует линейный непрерывный оператор расширения*

$$\Lambda : S_+ \ni \varphi \longmapsto \Lambda\varphi \in S$$

такой, что $\Lambda\varphi(t) = \varphi(t)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^n_+$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R} \ni \tau \longmapsto \chi(\tau)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, равная 1 на $[0,1]$ и 0 для $\tau \geq 2$.

В [12] показано существование последовательности действительных чисел $\{a_r\}$, удовлетворяющей для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ следующим условиям:

(i) $\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_+} |a_r| 2^{rk} < \infty$;

(ii) $\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r(-2^r)^k = 1$.

Для произвольной функции $\varphi \in S_+$ определим функцию $\varphi_n : [0,+\infty) \ni t_n \longmapsto \varphi(t_1,\dots,t_n)$ переменной t_n с фиксированными другими переменными. Покажем, что образ $\Re(\Lambda_n)$ линейного оператора

$$\Lambda_n : \varphi_n(t_n) \longmapsto \begin{cases} \varphi_n(t_n), & t_n \in [0,+\infty), \\ \sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r \chi(-2^r t_n)\varphi_n(-2^r t_n), & t_n \in (-\infty,0), \end{cases}$$

состоит из бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на $\mathbb{R}$ функций. Действительно, поскольку $-2^r \to -\infty$ при $r \to \infty$, сумма в определении оператора Λ_n конечна для $t_n < 0$. Более того, из (i) и (ii) следует равенство

$$\lim_{t_n\to -0} \partial_n^k \Lambda_n\varphi_n(t_n) = \partial_n^k\Lambda_n\varphi_n(0) = \lim_{t_n\to+0}\partial_n^k\varphi_n(t_n)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, т. е. функция $\Lambda_n\varphi_n$ бесконечно дифференцируема. Свойство (i) влечет существование такой константы $C_{\beta_n} > 0$, что

$$\max_{m_n\leq\alpha_n;\, k_n\leq\beta_n} \sup_{t_n\in\mathbb{R}} \left| t_n^{m_n}\partial_n^{k_n}\Lambda_n\varphi_n(t_n)\right| \leq C_{\beta_n} \max_{m_n\leq\alpha_n;\, k_n\leq\beta_n} \sup_{t_n\in[0,\infty)} \left| t_n^{m_n}\partial_n^{k_n}\varphi_n(t_n)\right|.$$

Это неравенство очевидно для $t_n \geq 0$. Для каждого $t_n \in (-\infty,0)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| t_n^{m_n}\partial_n^{k_n}\Lambda_n\varphi_n(t_n)\right| &\leq \sum_{r\in\mathbb{Z}_+} |a_r| 2^{rk_n} \sum_{i=0}^{k_n} \mathrm{C}_{k_n}^i |\chi^{(i)}(-2^r t_n)| \left| t_n^{m_n}\varphi_n^{(k_n-i)}(-2^r t_n)\right| \\ &\leq C_{\beta_n} \max_{m_n\leq\alpha_n;\, k_n\leq\beta_n} \sup_{t_n\in[0,\infty)} \left| t_n^{m_n}\partial_n^{k_n}\varphi_n(t_n)\right|, \end{aligned}$$

где константа $C_{\beta_n} = \max\limits_{k_n\leq\beta_n} \sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_+} |a_r|\, 2^{rk_n} \sum\limits_{i=0}^{k_n} \mathrm{C}_{k_n}^i \sup\limits_{\tau\in[0,2]} |\chi^{(i)}(\tau)|$ зависит от $\{a_r\}$ и χ, но не зависит от фиксированных переменных (здесь $\mathrm{C}_{k_n}^i$ — биномиальные коэффициенты).

Для тех же $\{a_r\}$ и χ можем рекурсивно определить похожим способом операторы $\Lambda_{n-1},\dots,\Lambda_1$ относительно переменных $t_{n-1},\dots,t_1$, причем каждый оператор Λ_j определен на образе $\Re(\Lambda_{j+1})$ предыдущего оператора. Получим

$$\Lambda_j \circ \dots \circ \Lambda_n : S_+ \ni \varphi \longmapsto \begin{cases} \varphi_j(t_j), & t_j \in [0,\infty), \\ \sum\limits_{r\in\mathbb{Z}_+} a_r\chi(-2^r t_j)\varphi_j(-2^r t_j), & t_j \in (-\infty,0), \end{cases}$$

где $\varphi_j : [0,\infty) \ni t_j \longmapsto (\Lambda_{j+1}\circ\dots\circ\Lambda_n)\varphi(t_1,\dots,t_j,\dots,t_n)$, $j = n-1, n-2,\dots,2,1,$ — функция переменной t_j с фиксированными другими переменными.

Как и выше, существует такая не зависящая от фиксированных переменных константа C_{β_j}, что

$$\max_{m_j\le\alpha_j;\,k_j\le\beta_j}\sup_{t_j\in\mathbb{R}}\left|t_j^{m_j}\partial_j^{k_j}\Lambda_j\varphi_j(t_j)\right|\le C_{\beta_j}\max_{m_j\le\alpha_j;\,k_j\le\beta_j}\sup_{t_j\in[0,\infty)}\left|t_j^{m_j}\partial_j^{k_j}\varphi_j(t_j)\right|.$$

Свойство (ii) влечет бесконечную дифференцируемость функции $(\Lambda_j\circ\dots\circ\Lambda_n)\varphi$ переменных $(t_j,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n-j+1}$ для всех $j=1,\dots,n-1$.

Подставляя $t_{j+1}^{m_{j+1}}\dots t_n^{m_n}\partial_{j+1}^{k_{j+1}}\dots\partial_n^{k_n}\varphi_j$ вместо функций φ_j и используя предыдущие неравенства поочередно по $j=n,\dots,1$, получим

$$\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}^n}|t^m\partial^k\Lambda\varphi(t)|\le C_{\beta_1}\dots C_{\beta_n}\max_{m\preccurlyeq\alpha;\,k\preccurlyeq\beta}\sup_{t\in\mathbb{R}^n_+}|t^m\partial^k\varphi(t)|,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+,$$

где $\Lambda=\Lambda_1\circ\dots\circ\Lambda_n$. Таким образом, оператор расширения Λ — линейное непрерывное отображение из S_+ в S. Лемма доказана.

Используя лемму 1, можем определить действие обобщенной функции $f\in S'_+$ на основную $\varphi\in S_+$ по правилу $\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\Lambda\varphi\rangle$. Это определение корректно, поскольку оператор Λ изменяет основную функцию за пределами носителя обобщенной.

Пусть $(E,\|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство и $E\otimes_{\mathfrak{p}}S_+$ — тензорное произведение пространств, причем символ $\otimes_{\mathfrak{p}}$ обозначает пополнение алгебраического тензорного произведения $\otimes$ в проективной тензорной топологии (см. [13]).

Лемма 2. *Каждый элемент $x\in E\otimes_{\mathfrak{p}}S_+$ можно представить (вообще говоря, не единственным образом) в виде суммы абсолютно сходящегося ряда*

$$x=\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j x_j\otimes\varphi_j,\quad \lambda_j\in\mathbb{C},\ x_j\in E,\ \varphi_j\in S_+, \tag{1}$$

где $\sum_j|\lambda_j|<\infty$, а последовательности $\{x_j\}$ и $\{\varphi_j\}$ сходятся к нулю в соответствующих пространствах.

Доказательство. Выберем в S_+ базу замкнутых абсолютно выпуклых ограниченных множеств B_γ таких, что $S_+=\bigcup_\gamma\mathfrak{B}_\gamma$, где $\mathfrak{B}_\gamma=\mathbb{C}\cdot B_\gamma$ — подпространство с нормой $\|x\|_\gamma=\inf\{|\lambda|:x\in\lambda B_\gamma\}$. Из полноты S_+ и замкнутости B_γ следует, что $\mathfrak{B}_\gamma$ — банаховы пространства. Из ограниченности B_γ вытекает, что каждое вложение $\mathfrak{B}_\gamma\hookrightarrow S_+$ непрерывно. Таким образом, пополненное проективное тензорное произведение банаховых пространств $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathfrak{B}_\gamma$ непрерывно вложено в $E\otimes_{\mathfrak{p}}S_+$. Из теоремы [13, III.6.4] о представлении элементов проективного тензорного произведения банаховых пространств следует, что каждый элемент $x\in E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathfrak{B}_\gamma$ можно представить в виде (1). Непрерывность вложения $E\otimes_{\mathfrak{p}}\mathfrak{B}_\gamma\hookrightarrow E\otimes_{\mathfrak{p}}S_+$ влечет абсолютную сходимость ряда (1) в $E\otimes_{\mathfrak{p}}S_+$. Лемма доказана.

4. Кросс-корреляция и полугруппы сдвигов

Для произвольного $s\in\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим оператор сдвига T_s, который определен на пространстве S_+ формулой $T_s:\varphi(t)\longmapsto\varphi(t+s)|_{\mathbb{R}^n_+}$ для всех $\varphi\in S_+$. Легко показать, что $T=\{T_s:s\in\mathbb{R}^n_+\}$ — n-параметрическая C_0-полугруппа.

Кросс-корреляцией распределения $f \in S'_+$ *и функции* $\varphi \in S_+$ назовем функцию вида

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle = \langle f(s), \varphi(t+s)\rangle, \quad t \in \mathbb{R}^n_+.$$

Каждому распределению f сопоставим оператор кросс-корреляции $K_f : \varphi \longmapsto f \star \varphi$. Дальше (см. теорему 1) будет показано, что $K_f \in \mathscr{L}(S_+)$.

Пусть $S^{\alpha,\beta}(E)$ — пространство бесконечно дифференцируемых векторнозначных функций $x : \mathbb{R}^n \ni t \longmapsto x(t) \in E$ с конечной нормой

$$\|x\|_{S^{\alpha,\beta}(E)} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \|t^m\partial^k x(t)\|, \quad \alpha,\beta,m,k \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Пространство $S(E) := \bigcap\limits_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_+} S^{\alpha,\beta}(E)$ бесконечно дифференцируемых векторнозначных быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^n$ наделим топологией проективного предела $\lim\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}\, S^{\alpha,\beta}(E)$ относительно компактных вложений $S^{\alpha,\beta}(E) \looparrowright S^{\eta,\gamma}(E)$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ и $\gamma \preccurlyeq \beta$.

Известен [14] топологический изоморфизм $S(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} S$, где справа — пополнение тензорного произведения в инъективной тензорной локально выпуклой топологии. Из ядерности S следуют изоморфизмы $S(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} S \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S$.

Определим пространство $S^{\alpha,\beta}_+(E) = \{x|_{\mathbb{R}^n_+} : x \in S^{\alpha,\beta}(E)\}$, наделенное нормой

$$\|x\|_{S^{\alpha,\beta}_+(E)} := \max_{m\preccurlyeq\alpha;\, k\preccurlyeq\beta} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \|t^m\partial^k x(t)\|, \quad \alpha,\beta,m,k \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Заметим, что, как и выше, все производные $\partial^k x(t)$ в точках границы конуса $\mathbb{R}^n_+$ понимаем как односторонние. Пространство $S_+(E) = \bigcap\big\{S^{\alpha,\beta}_+(E) : \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n_+\big\}$ наделим топологией проективного предела $\lim\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}\, S^{\alpha,\beta}_+(E)$ относительно компактных вложений $S^{\alpha,\beta}_+(E) \looparrowright S^{\eta,\gamma}_+(E)$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ и $\gamma \preccurlyeq \beta$. Очевидно, что $S_+(E)$ — замкнутое подпространство $S(E)$.

Поскольку замкнутые подпространства ядерных пространств также ядерны, имеем $S_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} S_+ \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$. Поэтому каждый элемент $x \in S_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$ можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда $x = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j$ вида (1), где $\varphi_j \in S_+$. Следовательно, для произвольного распределения $f \in S'_+$ и функции $x \in S_+(E)$ можем однозначно определить оператор $S_+(E) \ni x \longmapsto \langle f, x\rangle \in E$ следующим образом:

$$\langle f,\, x\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \langle f, \varphi_j\rangle x_j.$$

Пусть I — единичный оператор в банаховом пространстве E. В силу леммы 2 для $K \in \mathscr{L}(S_+)$ равенство $(I \otimes K)x := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K\varphi_j$, где $x \in S_+(E)$ представлен в виде (1), однозначно определяет оператор $I \otimes K \in \mathscr{L}(S_+(E))$. Таким образом, определенными считаем следующие операторы:

$$(I \otimes T_s)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes T_s\varphi_j, \quad (I \otimes K_f)x := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes K_f\varphi_j,$$

где $s \in \mathbb{R}^n_+$, $x \in S_+(E)$ и $f \in S'_+$. Пространство $S_+(E)$ инвариантно относительно действия этих операторов.

Обобщенной кросс-корреляцией распределения $f \in S'_+$ *и элемента* $x \in S_+(E)$ назовем векторнозначную функцию из $S_+(E)$ вида

$$(f \star x)(t) := \langle f(s), (I \otimes T_s)x(t)\rangle = \langle f(s), x(t+s)\rangle, \quad s \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2}$$

Соответствующий оператор обобщенной кросс-корреляции имеет вид

$$I \otimes K_f : S_+(E) \ni x \longmapsto (I \otimes K_f)x =: f \star x \in S_+(E).$$

Рассмотрим C_0-полугруппу обобщенных сдвигов $I \otimes T = \{I \otimes T_s : s \in \mathbb{R}^n_+\}$, определенную на пространстве $S_+(E)$.

Оператор $I \otimes K$, где $K \in \mathscr{L}(S_+)$, называем *инвариантным* по отношению к полугруппе обобщенных сдвигов $I \otimes T$, если

$$I \otimes (K \circ T_s) = I \otimes (T_s \circ K) \quad \text{для всех } s \in \mathbb{R}^n_+.$$

Теорема 1. (i) *Отображение* $\mathscr{K} : S'_+ \ni f \longmapsto K_f \in \mathscr{L}(S_+)$ *осуществляет изоморфизм из сверточной алгебры* S'_+ *на коммутант* $[T]^c \subset \mathscr{L}(S_+)$ *полугруппы сдвигов* T*, при этом* K_δ *— единичный оператор и*

$$K_{f*g} = K_f \circ K_g, \quad f, g \in S'_+. \tag{3}$$

(ii) *Для любого распределения* $f \in S'_+$ *оператор* $I \otimes K_f$ *инвариантен относительно полугруппы обобщенных сдвигов* $I \otimes T$*. Наоборот, для произвольного оператора* $K \in \mathscr{L}(S_+)$ *такого, что* $I \otimes K$ *инвариантен относительно* $I \otimes T$*, найдется такая единственная обобщенная функция* $f \in S'_+$*, что* $K = K_f$ *и* $I \otimes K = I \otimes K_f$.

Доказательство. (i) Из непрерывности $f \in S'_+$ и определения обобщенной производной следует, что $\partial^k(f \star \varphi) = f \star \partial^k\varphi = (-1)^{|k|}(\partial^k f \star \varphi)$ для произвольного $k \in \mathbb{Z}^n_+$. Поэтому $f \star \varphi$ — бесконечно дифференцируемая функция. Отсюда получаем

$$\partial^k(f \star x) = f \star \partial^k x = (-1)^{|k|}(\partial^k f \star x), \quad x \in S_+(E),\ k \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{4}$$

Полугруппа T непрерывна на S_+, поскольку

$$\|T_s\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}_+} = \max_{m \preccurlyeq \alpha;\, k \preccurlyeq \beta} \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} |t^m \partial^k (T_s\varphi)(t)| \le \max_{m \preccurlyeq \alpha;\, k \preccurlyeq \beta} \sup_{t \in \mathbb{R}^n_+} |t^m \partial^k \varphi(t)| = \|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}_+}$$

для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $s \in \mathbb{R}^n_+$ и $\varphi \in S_+$. Из непрерывности функционала f следует, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ существует такая константа $C > 0$, что $\|K_f\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}_+} \le C\|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}_+}$.

Найдем носитель $f \star \varphi$. Отметим, что

$$f \star \varphi \not\equiv 0 \Longleftrightarrow \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi(t+s) \ne \varnothing \Longleftrightarrow \exists s_0 \in \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi(t+s).$$

Поскольку

$$s_0 \in \operatorname{supp} \varphi(t+s) \Longleftrightarrow s_0 + t \in \operatorname{supp} \varphi \Longleftrightarrow t \in \operatorname{supp} \varphi - s_0$$

и $s_0 \in \operatorname{supp} f$, используя тот факт, что по определению $t \in \mathbb{R}^n_+$, получим $t \in (\operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} f) \cap \mathbb{R}^n_+$. Следовательно, $\operatorname{supp}(f \star \varphi) \subset (\operatorname{supp} \varphi - \operatorname{supp} f) \cap \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n_+$. Таким образом, для любого $f \in S'_+$ имеем $K_f \in \mathscr{L}(S_+)$.

Для любой функции $\varphi \in S_+$ и произвольных $s, r \in \mathbb{R}^n_+$ справедливы равенства

$$(K_f T_s)\varphi = \langle f(r), (T_r T_s)\varphi(t)\rangle = T_s\langle f(r), T_r\varphi(t)\rangle = (T_s K_f)\varphi. \tag{5}$$

Отсюда для произвольного $f \in S'_+$ получаем $K_f \in [T]^c$.

Пусть $K \in \mathscr{L}(S_+)$ — любой оператор с коммутативным свойством $K \circ T_s = T_s \circ K$ для всех $s \in \mathbb{R}^n_+$. Функционал $f : \varphi \longmapsto (K\varphi)(0)$ принадлежит пространству S'_+. Легко видеть, что $(K\varphi)(0) = \langle f, \varphi \rangle = (f \star \varphi)(0)$, т. е. $(K\varphi)(0) = (K_f \varphi)(0)$. Подставляя в последнее равенство $T_s\varphi$ вместо φ и используя коммутативное свойство, получим, что образ отображения $\mathscr{K}$ совпадает с коммутантом $[T]^c$.

Поскольку S_+ — монтелево пространство [13, IV.5], на пространстве $\mathscr{L}(S_+)$ топологии равномерной сходимости на компактах и на ограниченных множествах совпадают. Отображение $S'_+ \times S_+ \ni (f, \varphi) \longmapsto (K_f \varphi) \in S_+$ раздельно непрерывно. Из теоремы Банаха — Штейнгауза и бочечности пространств S'_+ и S_+ [13, II.7] следует, что это отображение равностепенно непрерывно. Следовательно, $\mathscr{K}$ — непрерывное отображение, имеющее замкнутый образ $[T]^c$.

С другой стороны, ядерность пространства S_+ влечет $\mathscr{L}(S_+) \simeq S_+ \otimes_{\mathfrak{p}} S'_+$. Поскольку S'_+ — ядерное DFS-пространство (является замкнутым подпространством ядерного DFS-пространства S' [11]), в S'_+ существует счетная база замкнутых абсолютно выпуклых ограниченных множеств B'_γ таких, что $S'_+ = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}'_\gamma$, где $\mathfrak{B}'_\gamma := \mathbb{C} \cdot B'_\gamma$ — пространство с нормой $\|x\|_\gamma = \inf\{|\lambda| : x \in \lambda B'_\gamma\}$. Из полноты S'_+ и замкнутости B'_γ следует, что $\mathfrak{B}'_\gamma$ — банаховы пространства. Из ограниченности B'_γ вытекает, что вложения $\mathfrak{B}'_\gamma \hookrightarrow S'_+$ непрерывны. Значит, из теоремы об открытом отображении для ультраборнологических пространств [15] следует изоморфизм $\lim\operatorname{ind}_{\gamma\to\infty} \mathfrak{B}'_\gamma \simeq S'_+$ для соответствующего индуктивного предела пространств. Пусть $\mathfrak{B}_\gamma \subset S_+$ — банаховы пространства из доказательства леммы 2. Аналогично можно доказать изоморфизм $\lim\operatorname{ind}_{\gamma\to\infty} \mathfrak{B}_\gamma \simeq S_+$. Значит, $S_+ \otimes_{\mathfrak{p}} S'_+ \simeq \lim\operatorname{ind}_{\gamma\to\infty} \mathfrak{B}_\gamma \otimes_{\mathfrak{p}} \mathfrak{B}'_\gamma$, т. е. $\mathscr{L}(S_+)$ — ультраборнологическое пространство. Из выше упомянутой теоремы об открытом отображении следует, что $\mathscr{K}$ — топологический изоморфизм из S'_+ на $[T]^c$.

Проверим свойство (3). Для любых $f, g \in S'_+$, $\varphi \in S_+$ имеем

$$\begin{aligned}(K_f K_g)\varphi(t) &= \langle f(q), T_q \langle g(p), T_p \varphi(t)\rangle\rangle = \langle f(q), \langle g(p), \varphi(t + p + q)\rangle\rangle \\ &= \langle f(q), \langle g(p), \varphi(t + (p + q))\rangle\rangle = \langle (f * g)(s), \varphi(t + s)\rangle = (K_{f*g}\varphi)(t).\end{aligned}$$

В частности, $K_f \circ K_\delta = K_{f*\delta} = K_f = K_{\delta * f} = K_\delta \circ K_f$ для всех $f \in S'_+$, значит, K_δ — единичный оператор в $\mathscr{L}(S_+)$. Таким образом, $\mathscr{K}$ — изоморфизм алгебр.

(ii) Свойство (3) влечет $(I \otimes K_f) \circ (I \otimes K_g) = I \otimes (K_f \circ K_g) = I \otimes K_{f*g}$. Из равенства (5) следует, что для произвольного $f \in S'_+$ оператор обобщенной кросс-корреляции $I \otimes K_f$ инвариантен относительно $I \otimes T$, т. е. $[I \otimes (K_f T_s)]x = [I \otimes (T_s K_f)]x$ для всех векторнозначных функций $x \in S_+(E)$.

Обратно, пусть $K \in \mathscr{L}(S_+)$ — произвольный оператор такой, что $I \otimes K$ инвариантен относительно $I \otimes T$. Определим функционал $f : S_+ \ni \varphi \longmapsto (K\varphi)(0)$. Имеем $[(I \otimes K)x](0) = \langle f, x\rangle = (f \star x)(0) = [(I \otimes K_f)x](0)$ для всех $x \in S_+(E)$. Подставляя $(I \otimes T_s)x$ вместо x и используя инвариантность, получим

$$[I \otimes (T_s K)x](0) = [I \otimes (K T_s)x](0) = (f \star x)(s).$$

Таким образом, $[(I \otimes K)x](t) = [(I \otimes K_f)x](t)$ для всех x, т. е. $I \otimes K = I \otimes K_f$.

5. Алгебра символов

Пусть $\mathbb{C}^n_+ = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^n : y \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+\}$ — трубчатая область в $\mathbb{C}^n$. Преобразование Фурье $F : f \longmapsto F[f]$ изоморфно преобразует S' на себя. В частности, F определено на S'_+, и его образ $F[S'_+]$ — замкнутое подпространство в

S'. Обобщенное преобразование Лапласа $\hat{f}(z)$ распределения $f \in S'_+$, которое можно определить по формуле

$$\hat{f}(z) := F[f(t)e^{-ty}](x) = \langle f(t), e^{\mathrm{i}tz}\rangle, \quad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^n_+, \tag{6}$$

является комплексной аналитической функцией в трубчатой области $\mathbb{C}^n_+$. Каждая аналитическая функция $\hat{f}(z) = \hat{f}(x+\mathrm{i}y)$ сходится к $F[f](x)$ при $y \to 0$ в топологии пространства S', более того, предельная функция $F[f]$ принадлежит $F[S'_+]$. Известно, что $\widehat{f * g}(z) = \hat{f}(z)\cdot\hat{g}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^n_+$, поэтому образ $\widehat{S'_+}$ пространства S'_+ при отображении (6) есть мультипликативная алгебра аналитических функций на $\mathbb{C}^n_+$ (см. [9, § 9]). Всюду дальше пространство $\widehat{S'_+}$ наделяем топологией, индуцированной обобщенным преобразованием Лапласа.

Формулу (6) можно использовать для определения преобразования Лапласа $\widehat{\varphi} = L[\varphi]$ функций из пространства $S_+ \subset S'_+$, а именно положим $\widehat{\varphi}(z) := \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{\mathrm{i}tz}\varphi(t)\,dt$ для всех $z \in \mathbb{C}^n_+$. Рассмотрим соответствующее отображение $L : \varphi \longmapsto L[\varphi]$ из S_+ на образ $\widehat{S_+} := L[S_+]$, который также наделяем индуцированной топологией относительно отображения $L : S_+ \longrightarrow \widehat{S_+}$. Тогда L — изоморфизм сверточной алгебры S_+ на мультипликативную подалгебру $\widehat{S_+} \subset \widehat{S'_+}$ аналитических функций. Используя отображение L и его обратное L^{-1}, для каждого $f \in S'_+$ определяем оператор $\widehat{K}_f := L \circ K_f \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{S_+})$ и полугруппу $\widehat{T} : \mathbb{R}^n_+ \ni s \longmapsto \widehat{T}_s := L \circ T_s \circ L^{-1} \in \mathscr{L}(\widehat{S_+})$.

Поскольку функция $T_s\varphi$, $s \in \mathbb{R}^n_+$, принадлежит S_+, для любого $f \in S'_+$ получим

$$\widehat{K}_f\widehat{\varphi}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{\mathrm{i}tz}\langle f(s), T_s\varphi(t)\rangle\,dt = \left\langle f(s), \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{\mathrm{i}tz} T_s\varphi(t)\,dt\right\rangle = \langle f(s), \widehat{T}_s\widehat{\varphi}(z)\rangle.$$

Более того, для всех $f, g \in S'_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\big(\widehat{K}_f\widehat{K}_g\big)\widehat{\varphi}(z) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{\mathrm{i}tz}\,\langle f(q), \langle g(p), \varphi(t+p+q)\rangle\rangle\,dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{\mathrm{i}tz}\,\langle (f*g)(s), \varphi(t+s)\rangle\,dt = \widehat{K}_{f*g}\widehat{\varphi}(z).\end{aligned}$$

Таким образом, из вышесказанного и теоремы 1 получаем следующий результат.

Следствие. *Отображение* $\Phi : \widehat{S'_+} \ni \hat{f} \longmapsto \widehat{K}_f \in \mathscr{L}(\widehat{S_+})$ *осуществляет изоморфизм из алгебры* $\widehat{S'_+}$ *на коммутант* $[\widehat{T}]^c$ *в алгебре* $\mathscr{L}(\widehat{S_+})$. *В частности,* $\Phi[\hat{f}\cdot\hat{g}] = \widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \circ \widehat{K}_g$ *для всех* $f, g \in S'_+$, *и* $\Phi[\hat{\delta}] = \widehat{K}_\delta$ *— единичный оператор в* $\mathscr{L}(\widehat{S_+})$.

6. Функциональное исчисление

Допустим, что в комплексном банаховом пространстве E определено семейство равномерно ограниченных n-параметрических C_0-полугрупп $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^n_+}$, т. е. существует такая константа $M > 0$, что неравенство $\|e^{tA}\|_{\mathscr{L}(E)} \le M$ справедливо для всех $t \in \mathbb{R}^n_+$.

Сначала рассмотрим элементарное исчисление типа Хилле — Филлипса, определенное для всех $\varphi \in S_+$ по формуле

$$\widehat{\varphi}(A) := \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}\varphi(t)\,dt.$$

Отображение $\widehat{\varphi} \longmapsto \widehat{\varphi}(A)$ — непрерывный изоморфизм из мультипликативной алгебры аналитических функций $\widehat{S_+}$ в алгебру $\mathscr{L}(E)$-значных функций [1, теорема 15.2.1]. Из свойств интеграла Бохнера следует, что

$$\|\widehat{\varphi}(A)\|_{\mathscr{L}(E)} \le M \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\varphi(t)|\,dt \le MC \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{dt}{(1+|t|^2)^{k/2}},$$

где $C = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n_+} (1+|t|^2)^{k/2}|\varphi(t)| < \infty$, поскольку $\varphi \in S_+$. Отметим, что интеграл в правой части сходится для всех $k > n$. Следовательно, $\widehat{\varphi}(A) \in \mathscr{L}(E)$ для каждого A.

Рассмотрим линейное отображение

$$L_A : S_+(E) \ni x \longmapsto \hat{x}_A \in \widehat{S}_A, \quad \hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}x(t)\,dt,$$

где $\widehat{S}_A := L_A[S_+(E)]$ — пространство функций от A. Используя лемму 2 и формулу (1), подынтегральную функцию в последнем интеграле можно записать в виде ряда $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j e^{tA}x_j\varphi_j(t)$ [13, III.6.4]. Поэтому каждый элемент пространства $\widehat{S}_A$ можно представить в виде

$$\hat{x}_A = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}x_j\varphi_j(t)\,dt = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j\widehat{\varphi}_j(A)x_j,$$

где справа стоит сходящийся в пространстве E ряд для каждого A. На $\widehat{S}_A$ зададим индуцированную отображением L_A локально выпуклую топологию. Именно, пусть

$$\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A = \bigl\{\hat{x}_A : x \in S^{\alpha,\beta}_+(E)\bigr\}$$

обозначает банахово пространство, наделенное индуцированной топологией относительно отображения $S^{\alpha,\beta}_+(E) \ni x \longmapsto \hat{x}_A$ при фиксированных $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$.

Пространство $\widehat{S}_A = \bigcap\bigl\{\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+\bigr\}$ наделим топологией проективного предела $\lim\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}\,\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A$ относительно вложений $\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A \hookrightarrow \widehat{S}^{\eta,\gamma}_A$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ и $\gamma \preccurlyeq \beta$.

Определим n-параметрическую полугруппу на $\widehat{S}_A$ по правилу

$$\widehat{I\otimes T} : \mathbb{R}^n_+ \ni s \longmapsto \widehat{I\otimes T_s} \in \mathscr{L}(\widehat{S}_A), \quad (\widehat{I\otimes T_s})\hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(I\otimes T_s)x(t)\,dt.$$

Очевидно, что

$$(\widehat{I\otimes T_s})\hat{x}_A - \hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(I\otimes T_s)x(t)\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}x(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}((I\otimes T_s)x(t) - x(t))\,dt.$$

Из определения индуцированной топологии на $\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A$ и сильной непрерывности полугруппы $I\otimes T$ следует, что

$$\lim_{\mathbb{R}^n_+\ni s\to 0} \|(\widehat{I\otimes T_s})\hat{x}_A - \hat{x}_A\|_{\widehat{S}^{\alpha,\beta}_A} = \lim_{\mathbb{R}^n_+\ni s\to 0} \|(I\otimes T_s)x - x\|_{S^{\alpha,\beta}_+(E)} = 0$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$. Таким образом, $\widehat{I\otimes T}$ — C_0-полугруппа на $\widehat{S}_A$.

Лемма 3. *Образ $R(\widehat{I \otimes T_s})$ оператора $\widehat{I \otimes T_s}$ плотен в E для каждого $s \in \mathbb{R}^n_+$. Как следствие, подпространство $\widehat{S}_A$ плотно в E для каждого A.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует такое $s_0 \in \mathbb{R}^n_+$, что $R(\widehat{I \otimes T_{s_0}})$ не плотно в E. Тогда по теореме Хана — Банаха существует такой ненулевой функционал $x' \in E'$, что для всех $\hat{x}_A \in \widehat{S}_A$ имеем $\langle x', \widehat{I \otimes T_{s_0}} \hat{x}_A \rangle = 0$. Из свойств интеграла Бохнера [1, 3.7] получаем

$$\big\langle x', (I \otimes T_{s_0}) \hat{x}_A \big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \langle x', e^{tA} (I \otimes T_{s_0}) x(t) \rangle \, dt$$

для всех $x \in S_+(E)$. Не ограничивая общности, можем выбрать элемент $x \in S_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$ в виде $y \otimes \varphi$, где $y \in E$, $\varphi \in S_+$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \times^n [0, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n_+$. Тогда

$$\int\limits_{\times^n [0,\varepsilon]} \langle x', e^{tA} y \rangle T_{s_0} \varphi(t) \, dt = 0.$$

Поскольку φ можно выбирать произвольным образом, из основной леммы вариационного исчисления следует, что $\langle x', e^{tA} y \rangle \equiv 0$ для всех $t \in \times^n [0, \varepsilon]$. Пользуясь C_0-свойством полугруппы $\{e^{tA}\}_{t \in \mathbb{R}^n_+}$, при $t = 0$ получим $\langle x', y \rangle = 0$ для всех $y \in E$, откуда $x' = 0$, что приводит к противоречию.

Плотность подпространства $\widehat{S}_A$ в E вытекает из того, что $R(\widehat{I \otimes T_s}) \subset \widehat{S}_A$ для каждого $s \in \mathbb{R}^n_+$.

Теорема 2. *Отображение*

$$\Phi_A : \widehat{S'_+} \ni \hat{f} \longmapsto \hat{f}(A) \in \mathscr{L}(\widehat{S}_A), \quad \hat{f}(A) \hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} (f \star x)(t) \, dt,$$

является топологическим изоморфизмом из $\widehat{S'_+}$ на коммутативную подалгебру в $\mathscr{L}(\widehat{S}_A)$ всех операторов вида

$$\widehat{I \otimes K} : \widehat{S}_A \ni \hat{x}_A \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} (I \otimes K) x(t) \, dt \in \widehat{S}_A, \quad \text{где } K \in [T]^c. \tag{7}$$

Операторы из образа $\Phi_A[\widehat{S'_+}]$ обладают следующими свойствами:

$$\hat{\delta}(A) = I, \quad \widehat{f * g}(A) = \hat{f}(A) \circ \hat{g}(A), \quad f, g \in S'_+, \tag{8}$$

$$\widehat{\partial^k f}(A) \hat{x}_A = (-1)^{|k|} \hat{f}(A) \widehat{\partial^k x}_A, \quad k \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{9}$$

Доказательство. Функция $\mathbb{R}^n_+ \ni s \longmapsto (I \otimes T_s) x \in S_+(E)$ при $x \in S_+(E)$ непрерывна, поэтому из свойств интеграла Бохнера и определения полугруппы $\widehat{I \otimes T}$ вытекает, что для произвольного $f \in S'_+$ (см. [1, 3.7]) справедливы следующие равенства:

$$\hat{f}(A) \hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} (f \star x)(t) \, dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} \langle f(s), (I \otimes T_s) x(t) \rangle \, dt$$

$$= \left\langle f(s), \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} (I \otimes T_s) x(t) \, dt \right\rangle = \langle f(s), (\widehat{I \otimes T_s}) \hat{x}_A \rangle, \tag{10}$$

откуда $L_A \circ (I \otimes K_f) = \hat{f}(A) \circ L_A$. Таким образом, диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{S}_A \ni \hat{x}_A & \xrightarrow{\hat{f}(A)} & \hat{f}(A)\hat{x}_A \in \widehat{S}_A \\
{\scriptstyle L_A}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle L_A} \\
S_+(E) \ni x & \xrightarrow{I\otimes K_f} & (I \otimes K_f)x \in S_+(E)
\end{array}$$

коммутативна, т. е. оператор $\hat{f}(A) := L_A \circ (I \otimes K_f) \circ L_A^{-1}$ корректно определен на $\widehat{S}_A$, где L_A^{-1} — обратное отображение. Из непрерывности $I \otimes K_f$ и L_A и открытости L_A следует, что $\hat{f}(A) \in \mathscr{L}(\widehat{S}_A)$.

Как и в доказательстве теоремы 1, легко показать, что отображение $S'_+ \times S_+(E) \ni (f, x) \longmapsto f \star x \in S_+(E)$ раздельно непрерывно. Из непрерывности отображений L и L_A вытекает, что отображение

$$\Psi : \widehat{S'_+} \times \widehat{S}_A \ni (\hat{f}, \hat{x}_A) \longmapsto \hat{f}(A)\hat{x}_A \in \widehat{S}_A$$

также раздельно непрерывно. По теореме Банаха — Штейнгауза Ψ равностепенно непрерывно. Это эквивалентно непрерывности отображения Φ_A из $\widehat{S'_+}$ в $\mathscr{L}(\widehat{S}_A)$.

Из формулы (10) следует, что равенства

$$\begin{aligned}
\hat{f}(A)(\widehat{I \otimes T_r})\hat{x}_A &= \langle f(s), (\widehat{I \otimes T_s})(\widehat{I \otimes T_r})\hat{x}_A\rangle \\
&= \left\langle f(s), \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(I \otimes T_s)(I \otimes T_r)x(t)\,dt \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(f \star x)(t + r)\,dt \\
&= \widehat{I \otimes T_r} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(f \star x)(t)\,dt = (\widehat{I \otimes T_r})\hat{f}(A)\hat{x}_A
\end{aligned}$$

выполняются для всех $r \in \mathbb{R}^n_+$ и $\hat{x}_A \in \widehat{S}_A$. Значит, для каждого $f \in S'_+$ оператор $\hat{f}(A)$ принадлежит подалгебре операторов вида (7).

Наоборот, для произвольного оператора $K \in \mathscr{L}(S_+)$ такого, что $I \otimes K$ инвариантен относительно $I \otimes T$, по теореме 1(ii) найдется такая единственная обобщенная функция $f \in S'_+$, что $I \otimes K = I \otimes K_f$. Следовательно, каждый оператор $\widehat{I \otimes K}$ можно представить в виде

$$\hat{f}(A)\hat{x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(f \star x)(t)\,dt.$$

Поэтому образ Φ_A совпадает с подалгеброй операторов вида (7). Для того чтобы показать, что Φ_A — топологический изоморфизм, достаточно применить теорему об открытом отображении из [15] подобно тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1.

Пользуясь полугрупповыми свойствами семейства операторов $\widehat{I \otimes T}$, легко доказать свойство (8). Именно, отображение Φ_A является алгебраическим гомоморфизмом, поскольку

$$\begin{aligned}
\hat{f}(A)\hat{g}(A)\hat{x}_A &= \langle f(q), \widehat{I \otimes T_q}\langle g(p), (\widehat{I \otimes T_p})\hat{x}_A\rangle\rangle = \langle f(q), \langle g(p), (\widehat{I \otimes T_{p+q}})\hat{x}_A\rangle\rangle \\
&= \langle (f * g)(s), (\widehat{I \otimes T_s})\hat{x}_A\rangle = \widehat{f * g}(A)\hat{x}_A.
\end{aligned}$$

Оператор $\Phi_A(\hat\delta) = \hat\delta(A)$ единичный в $\mathscr{L}(\widehat{S}_A)$, поскольку для $f = \delta$ имеем

$$\hat\delta(A)\hat x_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(\delta\star x)(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}x(t)\,dt = \hat x_A.$$

Осталось доказать свойство (9). Используя равенство (4), окончательно получим

$$\widehat{\partial^k f}(A)\hat x_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(\partial^k f\star x)(t)\,dt$$
$$= (-1)^{|k|}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}(f\star\partial^k x)(t)\,dt = (-1)^{|k|}\hat f(A)\widehat{\partial^k x}_A.$$

Теорема доказана.

Обозначим $\mathfrak{D}(A^\infty) = \bigcap\limits_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+}\mathfrak{D}(A^\alpha)$, где $\mathfrak{D}(A^\alpha) := \bigcap\limits_{j=1}^{n}\mathfrak{D}\big(A_j^{\alpha_j}\big)$, а $\mathfrak{D}\big(A_j^{\alpha_j}\big)$ — область определения оператора $A_j^{\alpha_j}$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_+$.

Теорема 3. *Для любой n-параметрической C_0-полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^n_+}$ справедливо вложение $\widehat{S}_A\subset\mathfrak{D}(A^\infty)$. Кроме того,*

$$\hat f(A)\widehat{\partial_j^{k_j}x}_A = (-1)^{k_j}A_j^{k_j}\hat f(A)\hat x_A - \sum_{l=0}^{k_j-1}(-A_j)^{k_j-l-1}\lim_{t_j\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA}\partial_j^l(f\star x)(t)\check d_j t$$

для произвольного $k_j\in\mathbb{Z}_+$, где обозначено $\check d_j t := dt_1\dots dt_{j-1}\,dt_{j+1}\dots dt_n$ для всех $j = 1,\dots,n$.

Доказательство. Интегрируя по частям по переменной $t_j\in[0,\infty)$, получим

$$\int\limits_0^\infty e^{t_jA_j}\partial_j^1 x(t)\,dt_j = \lim_{t_j\to+\infty}e^{t_jA_j}x(t) - \lim_{t_j\to+0}e^{t_jA_j}x(t) - A_j\int\limits_0^\infty e^{t_jA_j}x(t)\,dt_j$$
$$= -A_j\int\limits_0^\infty e^{t_jA_j}x(t)\,dt_j - x(t_1,\dots,t_{j-1},0,t_{j+1},\dots,t_n),$$

поскольку функция $x\in S_+(E)$ равна нулю на бесконечности. Заметим, что в последнем равенстве существование границ следует из сильной непрерывности полугруппы $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}^n_+}$ и непрерывности функции $x\in S_+(E)$. Следовательно,

$$\widehat{\partial_j^1 x}_A = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}\partial_j^1 x(t)\,dt = -A_j\hat x_A - \lim_{t_j\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA}x(t)\,\check d_j t,\quad j = 1,\dots,n.$$

Отсюда $\hat x_A\in\mathfrak{D}(A_j)$. Поступая аналогично со всеми производными и индексами, получим $\widehat{S}_A\subset\mathfrak{D}(A^\infty)$. Используя равенство (4) и интегрируя по частям k_j раз по переменной $t_j \in [0, \infty)$, имеем

$$\hat{f}(A)\widehat{\partial_j^{k_j} x}_A = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA}\big(f \star \partial_j^{k_j} x\big)(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} \partial_j^{k_j} (f \star x)(t)\, dt$$

$$= (-1)^{k_j} A_j^{k_j} \hat{f}(A)\hat{x}_A - \sum_{l=0}^{k_j-1} (-A_j)^{k_j-l-1} \lim_{t_j \to +0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA} \partial_j^l (f \star x)(t)\, \check{d}_j t.$$

Пример 1. Пусть $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, и $A = \big(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n}\big)$. Рассмотрим принадлежащую пространству $S_+(L_p(\mathbb{R}^n)) \simeq L_p(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$ функцию вида $x : \mathbb{R}^n \ni t \longmapsto y \otimes \varphi(t) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, где $y \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in S_+$. Известно, что оператор A генерирует полугруппу сдвигов, поэтому получаем

$$e^{tA} x = e^{t_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \dots + t_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}} y(\xi)\varphi(t) = y(\xi + t)\varphi(t), \quad \hat{x}_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y(\xi + t)\varphi(t)\, dt.$$

Для произвольного $f \in S'_+$ кросс-корреляция имеет вид

$$(f \star x)(\xi, t) = y(\xi)(f \star \varphi)(t).$$

Рассмотрим произвольный элемент $x \in L_p(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$. Используя (1), имеем

$$\hat{x}_A(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{tA} x_j(\xi)\varphi_j(t)\, dt = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n_+} x_j(\xi + t)\varphi_j(t)\, dt$$

и

$$(f \star x)(\xi, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j(\xi)(f \star \varphi_j)(t)$$

для любого $f \in S'_+$. Из формулы (10) следует, что на плотном подпространстве $\widehat{S}_A \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ функциональное исчисление определено по формуле

$$\hat{f}(A)\hat{x}_A(\xi) = (f \circledast \hat{x}_A)(\xi), \quad \text{где } (f \circledast \hat{x}_A)(\xi) := \langle f(s), (\widehat{I \otimes T_s})\hat{x}_A(\xi) \rangle,$$

для всех $\hat{x}_A(\xi) \in \widehat{S}_A \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Используя формулу (9) и теорему 3, для произвольного $j = 1, \dots, n$ получим

$$\widehat{\partial_j^1 f}(A)\hat{x}_A(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \circledast \hat{x}_A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA}(f \star x)(\xi, t)\, \check{d}_j t$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \circledast \hat{x}_A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} \Big\langle f(s), \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA} x(\xi, t + s)\, \check{d}_j t \Big\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f \circledast \hat{x}_A)(\xi) + \lim_{t_j \to +0} (f \circledast \check{x})(\xi, t_j),$$

где $\check{x}(\xi, t_j) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{tA} x(\xi, t)\, \check{d}_j t$. Рассмотрим линейный оператор $\widehat{\partial_j^1 f}(A)$ на подпространстве $\check{\mathfrak{D}}\big[\widehat{\partial_j^1 f}(A)\big] \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ функций $\hat{x}_A(\xi)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t_j \to +0} \check{x}(\xi, t_j) = \check{x}_j(\xi) \in L_p(\mathbb{R}^n)$$

при заданных функциях $\check{x}_j(\xi) \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\operatorname{div} := \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j$. Тогда для каждой функции $\hat{x} \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} \check{\mathfrak{D}}\big[\widehat{\partial_j^1 f}(A)\big]$ имеем

$$\widehat{\operatorname{div} f}(A)\hat{x}(\xi) = \operatorname{div}(f \circledast \hat{x})(\xi) + \sum_{j=1}^{n} (f \circledast \check{x}_j)(\xi).$$

В частности, при $f = \delta$ получим $\widehat{\operatorname{div}\delta}(A)\hat{x} = \operatorname{div}\hat{x} + \sum\limits_{j=1}^{n} \check{x}_j$.

Пример 2. Пусть снова $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, и $A = \big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}\big)$. Обозначим через $\mathfrak{g}_t(\zeta) = \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4\pi t_j}} e^{-\frac{\zeta_j^2}{4t_j}}$ ядро Гаусса — Вейерштрасса. Используя свойства гамма-функции, $e^{tA}y$, $t \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$, можно записать в виде обобщенного преобразования Вейерштрасса

$$\begin{aligned} e^{tA}y(\xi) = e^{t_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \dots + t_n \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}} y(\xi) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{2|m|} y(\xi)}{\partial \xi_1^{2m_1} \dots \partial \xi_n^{2m_n}} t^m \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{(2m)!} \frac{\partial^{2|m|} y(\xi)}{\partial \xi_1^{2m_1} \dots \partial \xi_n^{2m_n}} \frac{2^n (2m-1)!}{(m-1)!} t^m \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} y(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta)(-\zeta)^k \, d\zeta \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta) \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} y(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}} (-\zeta)^k \, d\zeta &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta) y(\xi - \zeta) \, d\zeta = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \end{aligned}$$

для каждой ограниченной целой функции $y : \mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto y(\xi)$. Поскольку все такие функции плотны в $L_p(\mathbb{R}^n)$, имеем $e^{tA}y = \mathfrak{g}_t * y$ для всех $y \in L_p(\mathbb{R}^n)$. В частности, если $x \in L_p(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$, то функции вида

$$\hat{x}_A(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} [\mathfrak{g}_t * x(\cdot, t)](\xi) \, dt, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

образуют плотное подпространство $\widehat{S}_A$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$. В этом случае формула операторного исчисления приобретет вид

$$\hat{f}(A)\hat{x} = \langle f(t), \mathfrak{g}_t * \hat{x} \rangle, \quad f \in S'_+, \ \hat{x} \in \widehat{S}_A.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Nelson E. A.* Functional calculus using singular Laplace integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 88. P. 400–413.
3. *Balakrishnan A. V.* An operational calculus for infinitesimal operators of semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 91. P. 330–353.
4. *Миротин А. Р.* О $\mathscr{T}$-исчислении генераторов C_0-полугрупп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 571–582.

5. *Миротин А. Р.* О функциях, переводящих генераторы C_0-полугрупп в генераторы голоморфных полугрупп // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 144–154.
6. *Миротин А. Р.* О некоторых свойствах многомерного функционального исчисления Бохнера — Филлипса // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1300–1312.
7. *Baeumer B., Haase M., Kovács M.* Unbounded functional calculus for bounded groups with applications // J. Evol. Eqs. 2009. V. 9, N 1. P. 171–195.
8. *Butzer P. L., Berens H.* Semi-groups of operators and approximation. New York: Springer-Verl., 1967.
9. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
10. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 4. С. 97–131.
11. *Komatsu H.* An introduction to the theory of generalized functions. Tokyo: Tokyo Univ. Publ., 2000.
12. *Seeley R. T.* Extensions of C^∞-functions defined in a half-space // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 625–626.
13. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
14. *Schwartz L.* Espaces de fonctions différentielles à valeurs vectorielles // J. Anal. Math. 1954/55. V. 4. P. 88–148.
15. *Райков Д. А.* Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 2. С. 353–372.

Статья поступила 6 июня 2013 г.

Лопушанский Олег Васильевич
Институт математики Жешовского университета,
ул. Рейтана, 16А, Жешов 35310, Польша
ovlopusz@ur.edu.pl

Шарин Сергей Владимирович
Прикарпатский национальный университет имени Василя Стефаника,
ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск 76018, Украина
sharynsir@yahoo.com