Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

И. С. Кащенко, С. А. Кащенко

Аннотация. Изучается локальная динамика в окрестности состояния равновесия уравнения, содержащего запаздывание по времени и интегральное распределение по пространственной переменной. В случаях, близких к критическим, в зависимости от соотношения между малыми параметрами построены специальные уравнения — квазинормальные формы, которые описывают поведение решений исходной задачи.

Ключевые слова: локальная динамика, запаздывание, отклонение пространственной переменной, малый параметр, квазинормальная форма.

§ 1. Введение

Работа тесно примыкает к статьям [1–3] и является их существенным дополнением и развитием.

Рассматривается вопрос о поведении решений с начальными условиями из достаточно малой окрестности (в пространстве $C_{[-T,0]\times[0,2\pi]}$) нулевого состояния равновесия уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = f\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T, x+s)\,ds\right) \tag{1}$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \tag{2}$$

Уравнения вида (1), (2) возникают во многих прикладных задачах (см. например, [4–8]).

Относительно функции $f(u)$ предполагается, что

$$f(u) = au + bu^2 + cu^3 + o(u^3),$$

а функция $F(s)$, характеризующая распределенное отклонение пространственной переменной, задана формулой

$$F(s) = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\exp(-\varkappa(s+h)^2), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)\,ds = 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № 14.124.13.5948–МК).

Основные предположения состоят в том, что величины T и $\varkappa$ достаточно большие. Более точно, для некоторой положительной постоянной $\varkappa_0$

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad \varkappa = \varkappa_0 \varepsilon^{-2} \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{3}$$

Одновременно с (1), (2) будет рассмотрен вопрос о локальной динамике краевой задачи параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = d\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t-T, x+s)\, ds\right) \quad (d > 0), \tag{4}$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{5}$$

Структура работы такова. В § 2 будут приведены известные результаты для уравнения с большим запаздыванием

$$\dot{u} + u = f(u(t - T)), \tag{6}$$

а в § 3 будет рассмотрен случай, когда запаздывание отсутствует, но имеется сосредоточенное малое отклонение пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = d\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u(t, x - h)), \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{7}$$

Наконец, в § 4 на основе построений из § 2, 3 будет исследована локальная динамика краевых задач (1), (2) и (4), (5).

§ 2. Уравнение с большим запаздыванием

В [9–14] рассматривался вопрос о поведении решений с начальными условиями из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия скалярного уравнения с запаздыванием (6). Приведем основные результаты из [9]. После замены времени $t \to Tt$ уравнение (6) принимает вид

$$\varepsilon \dot{u} + u = au(t-1) + bu^2(t-1) + cu^3(t-1) + o(u^3). \tag{8}$$

При условии $a = \pm(1 + o(1))$ вещественные части бесконечного множества корней $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$ характеристического уравнения, получающегося линеаризацией в нуле уравнения (8)

$$\varepsilon\lambda + 1 = \pm(1 + o(1)) \exp(-\lambda), \tag{9}$$

при каждом k стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тем самым можно говорить о том, что критический случай в задаче об устойчивости решения $u \equiv 0$ имеет бесконечную размерность. В [9] показано, что при условии

$$a = 1 + \varepsilon^2 a_1$$

локальная (в окрестности нуля) динамика (8) определяется нелокальным поведением решений краевой задачи параболического типа

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_1\xi + b\xi^2, \quad \xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{10}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$. Решения (8) и (10) связывает формула

$$u = \varepsilon^2 \xi(\varepsilon^2(1 + o(1))t, (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))t) + O(\varepsilon^2).$$

Если $a = -(1+\varepsilon^2 a_1)$, то соответствующая краевая задача, как и (10), играющая роль нормальной формы, имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a_1\xi - (b^2+c)\xi^3, \quad \xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \tag{11}$$

Связь решений (8) и (11) устанавливает равенство

$$u = \varepsilon\xi(\varepsilon^2(1+o(1))t, (1-\varepsilon+\varepsilon^2+o(\varepsilon^2))t) + o(\varepsilon).$$

Как показано в [13, 14], динамические свойства решений уравнения (8) резко усложняются при условии, когда параметр a «сильнее» отличается от ± 1. Опишем соответствующие построения, ограничиваясь рассмотрением случая, когда параметр a «близок» к -1. Пусть

$$a = -(1+\varepsilon^{2\alpha}a_1), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Фиксируем произвольно номер n и положительные числа $\omega_1, \dots, \omega_n$. Тогда роль краевой задачи (11) играет существенно более сложное уравнение вырожденного параболического типа

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \omega_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 \xi + a_1\xi - (b^2+c)\xi^3 \tag{12}$$

с краевым условием следующего вида: для любого нечетного количества из пространственных переменных $x_1, \dots, x_n$ ставятся π-антипериодические краевые условия, а для остальных — периодические. Таким образом получаем целый набор краевых задач, зависящих также от параметров n и ω_j $(j = 1, \dots, n)$. Связь функций $\xi(\tau, x_1, \dots, x_n)$ и $u(t, \varepsilon)$ устанавливает формула

$$u = \varepsilon^\alpha\xi(\varepsilon^{2\alpha}(1+o(1))t, (\varepsilon^{\alpha-1}\omega_1+\theta_1+o(1))t, \dots, (\varepsilon^{\alpha-1}\omega_n+\theta_n+o(1))t) + o(\varepsilon^\alpha).$$

Здесь $\theta_j = \theta_j(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ такие, что $\omega_j\varepsilon^{1-\alpha} + \theta_j$ нечетно кратно π.

§ 3. Уравнения с малой диффузией и отклонением пространственной переменной

В [1, 15, 16] исследовалась локальная динамика краевой задачи параболического типа (7). Такая краевая задача возникает в лазерной оптике [2, 17].

Напомним, что коэффициент диффузии ε предполагается достаточно малым: $0 < \varepsilon \ll 1$. В [2] исследован, в частности, случай, когда $h \sim \varepsilon$, $a < -1$. Здесь предполагаем, что, как и выше, $a = -1 + o(1)$. Тогда при условии $h \sim \varepsilon$ все корни характеристического уравнения

$$\lambda_k + 1 = a\exp(-ihk) - d\varepsilon^2k^2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{13}$$

имеют отрицательную вещественную часть и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \to 0$. Ниже предполагаем, что для некоторых h_1, a_1, α и γ выполнены соотношения

$$h = \varepsilon^\gamma h_1, \quad a = -(1+\varepsilon^{2\alpha}a_1), \quad 0 < \alpha, \gamma < 1. \tag{14}$$

При выполнении условий (14) вещественные части бесконечного числа корней (9) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тем самым снова реализуется критический в задаче об устойчивости нулевого решения случай бесконечной размерности.

Рассмотрим наиболее интересную ситуацию, когда параметр α удовлетворяет неравенству

$$0 < \alpha < \alpha_0 = \min(\gamma, 1-\gamma).$$

Введем несколько обозначений. Пусть положительные параметры z и v произвольно фиксированы, а параметры Δ и δ заданы равенствами $\Delta = 1-\alpha$, $\delta = \gamma - \alpha$. Отметим, что $\delta < \Delta < 1$ и $0 < \delta < \gamma$. Через $\Theta_1 = \Theta_1(\varepsilon, z) \in [0, 2\pi)$ обозначим такое выражение, для которого величина $h_1 z \varepsilon^{\gamma-\Delta} + \Theta_1$ является нечетно кратным π, через $\Theta_2 = \Theta_2(\varepsilon, z) \in [0,2)$, такое, что $z\varepsilon^{-\Delta} + h_1^{-1}\varepsilon^{-\gamma}\Theta_1 + \Theta_2$ является целым нечетным числом. Наконец $\Theta_3 = \Theta_3(\varepsilon, v) \in [0,1)$ такое, что $\varepsilon^{-\delta} v + \Theta_3$ целое.

Фиксируем пару целых чисел n и m. В силу приведенных выше построений число

$$k = k(\varepsilon) = \big(z\varepsilon^{-\Delta} + h_1^{-1}\varepsilon^{-\gamma}\Theta_1 + \Theta_2\big)(2n+1) + (\varepsilon^{-\delta} v + \Theta_3)m$$

целое при любом $\varepsilon > 0$. Корни $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения (13) с номерами такого вида допускают представление

$$\lambda_k(\varepsilon) = -i(\varepsilon^{\alpha}(h_1 v + \varepsilon^{\delta} h_1 \Theta_3)m \\ + \varepsilon^{\gamma} h_1 \Theta_2 (2n+1) + o(\varepsilon^{\gamma})) + \varepsilon^{2\alpha}(a_1 - h_1^2 v^2 m^2 - dz^2(2n+1)^2) + o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon^{\alpha}\xi(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^{2\alpha} u_2(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^{3\alpha} u_3(\tau, x_1, x_2) + \ldots, \tag{15}$$

где $\tau = \varepsilon^{2\alpha} t$, $x_1 = \big(\varepsilon^{-\Delta} z + \varepsilon^{-\gamma} h_1^{-1}\Theta_1 + \Theta_2\big)x - \varepsilon^{\gamma} h_1 \Theta_2 t$, $x_2 = (\varepsilon^{-\delta} v + \Theta_3)x - \varepsilon^{\alpha}(h_1 v + \varepsilon^{\delta} h_1 \Theta_3)t$. Зависимость от x_2 в (15) 2π-периодичная, а от x_1 функции ξ и u_3 зависят π-антипериодически, а u_2 периодически с периодом π. Подставляя (15) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, на третьем шаге из условия разрешимости уравнения относительно u_3 приходим к уравнению для определения $\xi(\tau, x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = dz^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} h_1^2 v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} + a_1 \xi - (b^2 + c)\xi^3$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv -\xi(\tau, x_1 + \pi, x_2).$$

Это зависящее от параметров v и z семейство краевых задач, как и (11) для (6), играет роль нормальной формы для (7). По ее установившимся режимам с помощью формулы (15) определяются асимптотические по невязке решения исходной краевой задачи.

Используя построения, на основе которых выше была построена краевая задача (12), получаем более сложное уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = d\left(z_1 \frac{\partial}{\partial x_{11}} + \dots + z_p \frac{\partial}{\partial x_{1p}}\right)^2 \xi \\ + \frac{1}{2} h_1^2 \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_{21}} + \dots + v_q \frac{\partial}{\partial x_{2q}}\right)^2 \xi + a_1 \xi - (b^2 + c)\xi^3 \tag{16}$$

с теми же, что и в (12), наборами краевых условий по $x_{11}, \ldots, x_{1p}$ и условиями 2π-периодичности по каждому из аргументов $x_{21}, \ldots, x_{2q}$. Целые p и q, а также положительные параметры z_j $(j = 1, \ldots, p)$ и v_s $(s = 1, \ldots, q)$ произвольны. Решения (7) и (16) связаны формулой

$$u = \varepsilon^{\alpha}\xi(\varepsilon^{2\alpha} t, x_{11}, \ldots, x_{1p}, x_{21}, \ldots, x_{2q}) + O(\varepsilon^{2\alpha}),$$
$$x_{1j} = (\varepsilon^{-\Delta} z_j + \varepsilon^{-\gamma} h_1^{-1}\Theta_{1j} + \Theta_{2j})x - \varepsilon^{\gamma} h_1 \Theta_{2j} t \quad (j = 1, \ldots, p),$$
$$x_{2s} = (\varepsilon^{-\delta} v_s + \Theta_{3s})x - \varepsilon^{\alpha}(h_1 v_s + \varepsilon^{\delta} h_1 \Theta_{3s})t \quad (s = 1, \ldots, q).$$

§ 4. Уравнение с распределением пространственной переменной

Рассмотрим краевую задачу (4), (5). Предположим, что выполнены условия (3) и $a = -\bigl(1 + \varepsilon^{2\alpha} a_1\bigr)$, $h = \varepsilon^\gamma h_1$, где $0 < \alpha, \gamma \le 1$. Характеристическое уравнение для линеаризованной в нуле краевой задачи (4), (5) имеет вид

$$\varepsilon\lambda_k + 1 = -(1 + \varepsilon^{2\alpha} a_1)\exp(-i\varepsilon^\gamma h_1 k - \lambda_k - \varkappa_0\varepsilon^2 k^2) - d\varepsilon^2 k^2, \tag{17}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Легко видеть, что при каждом k существует бесконечное количество корней уравнения (17) λ_{kn}, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом реализуется критический случай бесконечной размерности. Исследование локальной динамики (4), (5) при малых ε существенно зависит от соотношения между параметрами α и γ. Возможны четыре основные ситуации.

Первые три из них являются прямым обобщением приведенных выше результатов, а в четвертой реализуется некоторый новый механизм, выделяющий критические случаи на основе использования «нового» — специальным образом синтезирующего временную и пространственную переменную.

Коротко остановимся на каждой из упомянутых выше ситуаций.

1. Сначала рассмотрим самый простой случай, когда $\alpha = \gamma = 1$. Отметим, что характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{kn} = \lambda_{kn}(\varepsilon)$ $(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и

$$\lambda_{kn} = i\pi(2n+1) - i\varepsilon(h_1 k + \pi(2n+1)) \\ + \varepsilon^2\left(a_1 - (\varkappa_0 + d)k^2 - \frac{1}{2}\pi^2(2n+1)^2 + i(h_1 k + \pi(2n+1))\right) + O(\varepsilon^3).$$

Квазинормальная форма для краевой задачи (4), (5) в этом случае записывается в виде параболического уравнения

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (d + \varkappa_0)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + a_1\xi - (b^2 + c)\xi^3, \tag{18}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi(\tau, x, y) \equiv -\xi(\tau, x, y + 1). \tag{19}$$

Связь между решениями (4), (5) и (18), (19) устанавливает

Теорема 1. *Пусть $\xi(\tau, x, y)$ — ограниченное при $\tau \to \infty$ вместе со своими производными $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$ решение краевой задачи* (18), (19). *Тогда краевая задача* (4), (5) *имеет асимптотическое по невязке решение $u = u(t, x, \varepsilon)$, для которого*

$$u = \varepsilon\xi(\varepsilon^2 t, x - (\varepsilon h_1 + o(\varepsilon^2))t, (1 - \varepsilon(\pi + o(\varepsilon^2)))t) + o(\varepsilon^2).$$

2. Пусть $\alpha < 1$, $\gamma = 1$. Временные частоты и пространственные моды, вокруг которых может происходить образование установившихся режимов в (4), (5), определяются из структуры близких к мнимой оси корней $\lambda_{kn} = \lambda_{kn}(\varepsilon)$ $(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ характеристического уравнения (17). В обозначениях § 2, 3 для соответствующих λ_{kn} имеем

$$\lambda_{kn} = i(\omega\varepsilon^{1-\alpha} + \Theta_1)(2n+1) - i\varepsilon^\alpha(h_1 zk + \omega(2n+1)) \\ + \varepsilon^{2\alpha}\left(a_1 - (\varkappa_0 + d)k^2 - \frac{1}{2}\omega^2(2n+1)^2\right) + O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Применяя методику из [1, 13], приходим к параболической краевой задаче, которая играет роль нормальной формы:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = z^2(d+\varkappa_0)\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + a_1\xi - (b^2+c)\xi^3, \quad \tau = \varepsilon^{2\alpha}t, \tag{20}$$

$$\xi(\tau, s+2\pi, y) \equiv \xi(\tau, s, y) \equiv -\xi(\tau, s, y+1). \tag{21}$$

Напомним, что z и ω произвольные вещественные. Определим $\Theta_1 = \Theta_1(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ и $\Theta_2 = \Theta_2(\varepsilon) \in [0,1)$ так, что выражение $\omega\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1$ будет нечетно кратным π, а значение $z\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_2$ целым.

Связь между решениями (4), (5) и (20), (21) устанавливает

Теорема 2. *Пусть при $z = z_0$, $\omega = \omega_0$ краевая задача* (20), (21) *имеет решение $\xi(\tau, s, y)$, ограниченное при $\tau \to \infty$ вместе со своими производными $\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$ и $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$. Тогда система* (4), (5) *имеет асимптотическое по невязке решение*

$$u = \varepsilon^\alpha\xi(\varepsilon^2(1+o(1))t, (z_0\varepsilon^{\alpha-1}+\Theta_2)x \\ - \varepsilon^\alpha(h_1z_0 + o(1))t, (\omega_0\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1 - \varepsilon^\alpha(\omega_0 + o(1)))t) + o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Используя проделанные выше построения, можно получить более сложные квазинормальные формы для изучения динамики (4), (5). Ограничимся здесь тем, что приведем только итоговые семейства краевых задач:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (d+\varkappa_0)\left(z_1\frac{\partial}{\partial s_1} + \cdots + z_p\frac{\partial}{\partial s_p}\right)^2\xi \\ + \frac{1}{2}\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \omega_p\frac{\partial}{\partial y_p}\right)^2\xi + a_1\xi - (b^2+c)\xi^3, \tag{22}$$

по каждой из переменных $s_1, \ldots, s_p$ поставлены 2π-периодические краевые условия, а по переменным $y_1, \ldots, y_p$ краевые условия либо периодические, либо антипериодические с периодом 1, причем количество антипериодических условий нечетно.

3. Пусть выполнены условия

$$0 < \alpha, \gamma < 1. \tag{23}$$

Ограничимся рассмотрением наиболее интересной ситуации, когда дополнительно

$$\alpha + \gamma < 1. \tag{24}$$

Сначала выделим две такие совокупности Γ_1 и Γ_2 корней характеристического уравнения (17), вещественные части которых асимптотически малы. Для определения Γ_1 введем несколько обозначений. Фиксируем произвольно положительные параметры ω и z. Через $\Theta_1 = \Theta_1(\varepsilon)$ обозначим такое значение из $[0, 2\pi)$, что выражение $\omega\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1$ нечетно кратно π. Пусть величина $\Theta_2 = \Theta_2(\varepsilon) \in [0, 2)$ дополняет до целого нечетного числа выражение $z\varepsilon^{\alpha+\gamma-1}$. Наконец, $\Theta_3 = \Theta_3(\varepsilon) \in [0,1)$ пусть таково, что $\frac{\pi}{h_1\varepsilon^\gamma}\left(\frac{z}{\varepsilon^{1-\alpha-\gamma}} + \Theta_2\right) + \Theta_3$ является целым числом.

Пусть $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Положим

$$\Gamma_1 = \left\{\left(\frac{\pi}{h_1\varepsilon^\gamma}\left(\frac{z}{\varepsilon^{1-\alpha-\gamma}} + \Theta_2\right) + \Theta_3\right)2n\right\}.$$

Пусть в (17) целое k принадлежит Γ_1. Тогда уравнение (17) имеет корни $\lambda_{nm} = \lambda_{nm}(\varepsilon)$, для которых справедливо представление $(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$\lambda_{nm} = i(\omega\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1)(2m+1) - \varepsilon^{\alpha} i\omega(2m+1) - 2\varepsilon^{\gamma} h_1 \Theta_3 in + \varepsilon^{2\alpha}\left(a_1 - \frac{1}{2}\omega^2(2m+1)^2 - 4(d+\varkappa_0)z^2n^2\pi^2h_1^{-2}\right) + o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Затем определим множество Γ_2 $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$:

$$\Gamma_2 = \left\{\left(\frac{\pi}{h_1\varepsilon^{\gamma}}\left(\frac{z}{\varepsilon^{1-\alpha-\gamma}} + \Theta_2\right) + \Theta_3\right)(2n+1)\right\}.$$

Пусть в (17) $k \in \Gamma_2$. Тогда у этого уравнения существуют корни λ_{nm}, для которых имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_{nm} = 2(\omega\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1)mi - 2\varepsilon^{\alpha} i\omega m - \varepsilon^{\gamma} h_1\Theta_3(2n+1)i + \varepsilon^{2\alpha}\big[a_1 - 2\omega^2m^2 - (d+\varkappa_0)z^2(2n+1)^2\pi^2h_1^{-2}\big] + o(\varepsilon^{2\alpha}) \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Построим систему, играющую роль нормальной формы в этом случае. Введем в рассмотрение формальный ряд

$$u = \varepsilon^{\alpha}(\xi(\tau, s, y) + \eta(\tau, s, y)) + \varepsilon^{2\alpha}u_2(\tau, s, y) + \varepsilon^{3\alpha}u_3(\tau, s, y) + \dots,$$

где $\tau = \varepsilon^{2\alpha}$, $s = (\omega\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1)t - \varepsilon^{\gamma}h_1\Theta_3 x$, $y = \big(\frac{\pi}{h_1\varepsilon^{\gamma}}\big(\frac{z}{\varepsilon^{1-\alpha-\gamma}} + \Theta_2\big) + \Theta_3\big)x$.

Подставляя его в (4), (5) и производя стандартные действия, получим систему краевых задач параболического типа

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial\tau} &= \pi^2h_1^{-2}z^2(d+\varkappa_0)\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + a_1\xi - (b^2+c)\xi(\xi^2+3\eta^2), \\
\frac{\partial\eta}{\partial\tau} &= \pi^2h_1^{-2}z^2(d+\varkappa_0)\frac{\partial^2\eta}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + a_1\eta - (b^2+c)\eta(3\xi^2+\eta^2),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\xi(\tau, s{+}1, y) \equiv \xi(\tau, s, y) \equiv -\xi(\tau, s, y{+}\pi), \quad \eta(\tau, s, y{+}2\pi) \equiv \eta(\tau, s, y) \equiv -\eta(\tau, s{+}1, y). \tag{26}$$

Теорема 3. *Пусть при $z = z_0$ и $\omega = \omega_0$ краевая задача* (25), (26) *имеет решение $(\xi(\tau, s, y), \eta(\tau, s, y))$, ограниченное при $\tau \to \infty$ вместе со своими производными $\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$ и $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$. Тогда исходная система* (4), (5) *имеет асимптотическое по невязке решение*

$$u = \varepsilon^{\alpha}(\xi(\varepsilon t, s, y) + \eta(\varepsilon t, s, y)) + o(\varepsilon^{\alpha}),$$

где $s = (\omega_0\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_1 + o(1))t - \varepsilon^{\gamma}h_1\Theta_3 x$, $y = \big(\frac{\pi}{h_1\varepsilon^{\gamma}}\big(\frac{z_0}{\varepsilon^{1-\alpha-\gamma}} + \Theta_2\big) + \Theta_3\big)x$.

Конечно, краевая задача (25), (26) допускает обобщение, приводящее к вырожденным параболическим уравнениям типа (22) с соответствующими краевыми условиями.

4. Здесь тоже считаем выполненными условия (23) и (24). В пп. 1–3 предполагалось, что каждые из фигурирующих в показателе экспоненты уравнения (17) выражения $\varepsilon^{\gamma}h_1zk$ и $\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta$ кратны (четно либо нечетно) π. Оказывается, можно выделить такие совокупности корней уравнения (17), которые асимптотически близки к мнимой оси и для которых целым кратным π является только сумма указанных выражений. Проиллюстрируем это. Пусть, как и раньше, ω и z — произвольные положительные постоянные, величина $\Theta = \Theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет до целого выражение $\varepsilon^{\alpha-1}z$, а $\Theta_0 = \Theta_0(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ — до нечетно

кратного π выражение $\varepsilon^\gamma h_1(z\varepsilon^{\alpha-1}+\Theta)+\varepsilon^{\alpha-1}\omega$. Тогда характеристическое уравнение (17) при $k=(z\varepsilon^{\alpha-1}+\Theta)(2n+1)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ имеет асимптотически близкие к мнимой оси корни $\lambda_n=\lambda_n(\varepsilon)$, причем

$$\lambda_n = i(\omega\varepsilon^{\alpha-1}+\Theta_0)(2n+1)+\varepsilon^\alpha i\omega(2n+1) + \varepsilon^{2\alpha}\left(a_1-\left(\frac{1}{2}\omega^2+(d+\varkappa_0)z^2\right)(2n+1)^2\right)+o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Применяя стандартные процедуры построения квазинормальных форм, приходим к параболической краевой задаче

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=\left(\frac{1}{2}\omega^2+(d+\varkappa_0)z^2\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+a_1\xi-(b^2+c)\xi^3, \tag{27}$$

$$\xi(\tau,r+1)\equiv-\xi(\tau,r),\quad (\tau=\varepsilon^2 t). \tag{28}$$

Функция $\xi(\tau,r)$ дает возможность построить асимптотическое по невязке решение (4), (5). Справедлива

Теорема 4. *Пусть система* (27), (28) *имеет при* $z=z_0$, $\omega=\omega_0$ *решение* $\xi(\tau,r)$, *ограниченное при* $\tau\to\infty$ *вместе со своей производной* $\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}$. *Тогда задача* (4), (5) *имеет асимптотическое по невязке решение вида*

$$u=\varepsilon^\alpha\xi(\varepsilon^{2\alpha}t,(\varepsilon^{\alpha-1}z_0+\Theta)x+((\omega_0+\varepsilon^{1-\alpha}\Theta_0)\varepsilon^{\alpha-1}+\varepsilon^\alpha\omega_0)t)+O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Применяя изложенную выше методику, можно построить семейства вырожденных параболических уравнений для $\xi(\tau,s_1,s_2,\dots,s_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2},r_1,\dots,r_{n_3})$, $\eta(\tau,s_1,s_2,\dots,s_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2},r_1,\dots,r_{n_3})$, причем для нечетного в сумме числа переменных из s_j, y_j, r_j выполнены антипериодические краевые условия, а для остальных переменных (кроме первой — «времени» τ) — условия периодичности.

§ 5. Выводы

Для уравнений с большим запаздыванием и распределенным отклонением пространственной переменной (либо малой диффузией) исследована локальная динамика в окрестности состояния равновесия. Критические в задаче об устойчивости стационара случаи имеют бесконечную размерность. Построены многопараметрические семейства эволюционных уравнений (краевых задач параболического и вырожденно параболического типов), нелокальная динамика которых определяет структуру богатого множества асимптотических по невязке быстро осциллирующих как по времени, так и по пространственной переменной решений исходного уравнения. Степень соответствующих осцилляций определяет величина надкритичности $\varepsilon^\alpha a_1$. В реальных прикладных задачах параметры α и a_1 определяются неоднозначно, а значит, и отвечающие за локальную динамику квазинормальные формы тоже составляют довольно богатое множество. Тем самым возникает еще один механизм, объясняющий мультистабильность в рассматриваемых моделях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 3. С. 467–473.

2. *Ахманов С. А., Воронцов М. А.* Неустойчивости и структуры в когерентных нелинейно-оптических системах, охваченных двумерной обратной связью // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. С. 228–238.

3. *Kashchenko I. S.* Local dynamics of spatially distributed Hutchinson equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2011. V. 16. P. 3520–3524.

4. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1984.

5. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexisting of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase Oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. V. 5, N 4. P. 380–385.

6. *Leven S., Segel S.* Pattern generation in space and aspect // SIAM Rev. 1985. V. 27. P. 45–67.

7. *Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O.* Delay equations: functional-, complex-, and nonlinear analysis. New York: Springer-Verl., 1995.

8. *Jianhong Wu.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verl., 1996.

9. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448.

10. *Kaschenko S. A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurcation Chaos. 1996. V. 6, N 7. P. 1093–1109.

11. *Кащенко С. А.* Уравнения Гинзбурга — Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.

12. *Кащенко С. А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 567–572.

13. *Кащенко И. С.* Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 5. С. 586–589.

14. *Кащенко И. С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.

15. *Кащенко И. С, Кащенко С. А.* Быстро осциллирующие пространственно-неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 1. С. 14–17.

16. *Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A., Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D. 1999. V. 125, N 1–2. P. 123–141.

17. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А.* Параметры порядка в моделях лазеров с запаздывающей обратной связью // Синергетика: Исследования и технологии. Сер. «Синергетика: от прошлого к будущему». М.: УРСС, 2007. С. 156–192.

Статья поступила 30 ноября 2011 г., окончательный вариант — 5 декабря 2013 г.

Кащенко Илья Сергеевич
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000
iliyask@uniyar.ac.ru

Кащенко Сергей Александрович
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000;
Национальный исследовательский университет «МИФИ»,
Каширское шоссе, 31, Москва 115409
kasch@uniyar.ac.ru