Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 512.57

ГИПЕРТОЖДЕСТВА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КЛОНОВ НА ТРЕХЭЛЕМЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ

И. А. Мальцев

Аннотация. Изучается возможность разделения формулами клонов квазилинейных функций, определенных на трехэлементном множестве. Для каждой пары таких клонов, не содержащих креативных функций и неизоморфных, найдена разделяющая их формула. Найдены пары клонов, не разделимых гипертождествами с унарными функциональными переменными.

Ключевые слова: гипертождество, квазилинейная функция, клон, клоновое тождество, предитеративная алгебра, разделяющая формула.

1. Введение

Проблема полноты является классической в теории клонов. Для клона всех функций на конечном множестве она была решена окончательно Розенбергом в 1965 г. [1]. Он доказал, что каждый максимальный подклон этого клона образован функциями, сохраняющими определенное отношение, и описал эти отношения.

Другой подход к решению проблемы продемонстрировали Райхель, Симович и Швайгерт [2]. Они сформулировали критерии полноты для клонов всех функций на множествах из двух и трех элементов, используя гипертождества, изучавшиеся ранее по другому поводу Тейлором [3]. Позже Денеке и Пёшель [4] нашли решение проблемы для клонов над любыми конечными множествами в виде системы гипертождеств, дизъюнкция которых должна быть ложна на этих клонах. Следующее утверждение указывает один из их результатов и служит одновременно примером подхода к решению проблемы.

1.1. *Система булевых функций S полна тогда и только тогда, когда равенство*

$$F(F(x,y),F(x,y)) \approx F(F(x,x),F(y,y))$$

не является гипертождеством алгебры $\langle\{0,1\};S\rangle$.

Говорят, что гипертождество *разделяет два клона*, если оно истинно на одном из них и ложно на другом. К. Денеке, И. А. Мальцев и М. Решке в 1995 г. опубликовали статью [5], в которой для каждой пары неизоморфных булевых клонов указывалось разделяющее их гипертождество. На трехэлементном множестве существует континуум клонов. Поскольку множество гипертождеств счетно, имеются пары клонов, которые разделить гипертождествами нельзя. В статье [6] И. А. Мальцева и Д. Швайгерта найдены гипертождества, отделяющие клон всех функций, определенных на множестве $\{0,1,2\}$ со значениями в множестве $\{0,1\}$, от всех подклонов. Различным аспектам теории гипертождеств посвящена книга Денеке и Висмата [7].

2. Тождества и гипертождества

2.1. Равенство $T_1 = T_2$, в котором T_1 и T_2 — термы сигнатуры Ω, называется *тождеством сигнатуры* Ω.

2.2 Тождество $T_1(x_1, \ldots, x_n) = T_2(x_1, \ldots, x_n)$ *истинно в алгебре* $\mathbf{A}$ той же сигнатуры, если производные операции, изображаемые термами T_1 и T_2, совпадают.

2.3. Множество всех тождеств, истинных на алгебре $\mathbf{A}$, обозначим через $\mathrm{Id}\,\mathbf{A}$.

2.4. Пусть $f_1^{n_1}, \ldots, f_k^{n_k}$ — все функциональные символы и $x_1, \ldots, x_n$ — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2. Выражение

$$\forall f_1^{n_1} \ldots \forall f_k^{n_k} \, \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (T_1 = T_2) \tag{2.1}$$

назовем *гипертождеством.*

2.5. Сохраняющее арность отображение ρ множества всех функциональных символов, входящих в термы $T_{i_1}, \ldots, T_{i_s}$, в множество термальных операций алгебры $\mathbf{A}$ назовем *интерпретацией* этих термов в $\mathbf{A}$. Термам $T_{i_1}, \ldots, T_{i_s}$ при этом также окажутся сопоставлены некоторые термальные операции, которые обозначим через $\theta_\rho(T_{i_1}), \ldots, \theta_\rho(T_{i_s})$

2.6. Гипертождество (2.1) называется *истинным в алгебре* $\mathbf{A}$, если при любой интерпретации ρ термов T_1 и T_2 в алгебре $\mathbf{A}$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$\theta_\rho(T_1)(a_1, \ldots, a_n) = \theta_\rho(T_2)(a_1, \ldots, a_n).$$

Пусть (2.1) — гипертождество, истинное в алгебре $\mathbf{A} = \langle A; \omega(\Omega) \rangle$. Отображение ω ставит в соответствие каждому n-арному символу из Ω основную операцию той же арности из $\mathbf{A}$ и потому является интерпретацией термов T_1 и T_2 в $\mathbf{A}$ в смысле определения 2.5. Из истинности гипертождества (2.1) следует, что производные операции $\theta_\omega(T_1)$ и $\theta_\omega(T_2)$ совпадают. Это означает, что в $\mathbf{A}$ истинно тождество $T_1 = T_2$.

Таким образом, каждое гипертождество вида (2.1) сигнатуры Ω, истинное в алгебре $\mathbf{A}$ той же сигнатуры, превращается в истинное в $\mathbf{A}$ тождество, если его записать в виде

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (T_1 = T_2).$$

2.7. Поскольку каждое истинное в алгебре $\mathbf{A}$ гипертождество при отбрасывании кванторов по функциональным символам превращается в тождество, истинное в $\mathbf{A}$, в дальнейшем будем использовать бескванторные записи тождеств и гипертождеств. Утверждения о том, что $T_1 = T_2$ является тождеством или гипертождеством алгебры $\mathbf{A}$ будут записываться следующим образом:

$$\mathbf{A} \models T_1 = T_2, \quad \mathbf{A} \underset{hyp}{\models} T_1 = T_2.$$

2.8. Множество всех гипертождеств, истинных на алгебре $\mathbf{A}$, обозначим через $\mathrm{HId}\,\mathbf{A}$.

2.9. *При бескванторной форме записи каждое истинное в алгебре* $\mathbf{A}$ *гипертождество можно рассматривать как тождество, истинное в* $\mathbf{A}$, *поэтому справедливо включение*

$$\mathrm{HId}\,\mathbf{A} \subseteq \mathrm{Id}\,\mathbf{A}. \quad \square$$

3. Клоны

3.1. Функции вида $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ называются *селекторами* (или *селекторными*, или *проекциями*).

3.2. *Клоном на множестве* A называется некоторое множество функций, определенных на A, замкнутое относительно подстановок, переименований переменных и отождествлений переменных и содержащее все селекторы.

Введенный термин в английском варианте является сокращением фразы «замкнутое множество операций».

3.3. *Пополненное всеми селекторами множество всех производных операций любой алгебры* $\mathbf{A} = \langle A, \omega(\Omega) \rangle$ *образует клон.*

В 1966 г. А. И. Мальцев [8, 9] начал изучение итеративных и предитеративных алгебр.

3.4. *Предитеративными алгебрами* называются подалгебры алгебры

$$\mathcal{P}_A^* = \langle O_A; \zeta, \tau, \Delta, * \rangle,$$

где O_A — множество всех функций, определенных на множестве A.

Операция ζ циклически переставляет аргументы функции, τ меняет местами первые два аргумента, Δ отождествляет два первых аргумента и переименовывает остальные, бинарная операция $*$ подставляет одну функцию в другую вместо первого аргумента. Далее эти операции использоваться не будут и потому более аккуратных определений здесь не приводится. Важно лишь отметить, что в совокупности они заменяют операцию суперпозиции, которая алгебраической не является. В то же время $\mathcal{P}_A^*$ — обычная универсальная алгебра, и гипертождества по отношению к ее подалгебрам являются тождествами.

3.5. *Клонами являются предитеративные алгебры, содержащие все селекторы.*

Переписав гипертождество с использованием символов операций $\zeta, \tau, \Delta, *$, мы превратим его в тождество, которое может быть истинным или ложным на некотором клоне $\mathcal{C}$. Это тождество естественно назвать *клоновым.*

3.6. Поскольку каждый клон является предитеративной алгеброй, можно говорить об изоморфных и неизоморфных парах клонов. Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — два неизоморфных клона, определенных на одном и том же множестве A. Совпадают ли множества $\mathrm{HId}\,\mathcal{C}_1$ и $\mathrm{HId}\,\mathcal{C}_2$?

Будем говорить, что гипертождество $T_1 \approx T_2$ *разделяет клоны* $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, если оно истинно на одном из них, но ложно на другом.

4. Клоны квазилинейных функций на трехэлементном множестве

Одноместные функции и функции, представимые в виде

$$f(g_1(x_1) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n)),$$

где $n \geq 1$, значения одноместных функций $g_1, \ldots, g_n$ принадлежат множеству $\{0, 1\}$, сложение ведется по модулю 2, а одноместная функция f может принимать любые значения, называются *квазилинейными.* В решетке подклонов клона, содержащего все функции, определенные на конечном множестве, клоны квазилинейных функций находятся в нижней части. Подробно такие клоны и образуемые ими решетки изучались в [10, 11].

Далее будут рассматриваться клоны квазилинейных функций со значениями в множестве $\{0,1\}$ и областью определения $\{0,1,2\}$. В [12] доказано, что любая такая функция может быть записана единственным образом в виде

$$h(x_1,\dots,x_n) = c \oplus \sum_{j=1}^{g} \gamma(x_{i_j}) \oplus \sum_{j=g+1}^{g+f} \varphi(x_{i_j}) \oplus \sum_{j=g+f+1}^{g+f+p} \psi(x_{i_j}),$$

где $c \in \{0,1\}$, $g,f,p \geq 0$, $1 \leq i_1,\dots,i_{g+f+p} \leq n$ и индексы $i_1,\dots,i_{g+f+p}$ попарно различны. Встречающиеся в этой формуле одноместные функции и функции, с ними связанные, указаны в табл. 1.

Таблица 1

x	φ	ψ	γ	$\bar{\gamma}$	$\overline{\varphi}$	$\bar{\psi}$	c_0	c_1
0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	1	0	0	1

В описанном выше множестве функций выделим подмножество, состоящее из не креативных функций. Функцию назовем *не креативной*, если при подстановке в нее любой другой квазилинейной функции со значениями в множестве $\{0,1\}$ число существенных переменных не возрастает. Подобным свойством обладают все унарные функции из табл. 1, а также функции вида

$$\gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_n}), \quad 1 \oplus \gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_n}).$$

Далее будут рассматриваться только не креативные функции. Кроме функций, указанных в табл. 1, будут упоминаться функции, отличающиеся от них фиктивными переменными. Для них будут использоваться обозначения с верхними и нижними индексами. Верхний индекс указывает число переменных у функции, нижний — существенную переменную или, при отсутствии существенных переменных, единственное значение функции. Например,

$$e_2^2(x_1,x_2) = x_2, \quad c_1^3(x,y,z) = 1, \quad \gamma_2^4(x_1,x_2,x_3,x_4) = \gamma(x_2).$$

Пусть $\mathcal{J}_{00}$ — клон, образованный всеми селекторами, $\mathcal{J}_{10}$ — клон, содержащий все селекторы и константы c_0^n, равные нулю, а $\mathcal{J}_{s0}$ — клон, порождаемый функциями $e_2^2(x_1,x_2)$ и $\sum\limits_{i=1}^{s-1} \gamma(x_i)$. Так как $\gamma(0) = \gamma(1)$, очевидно, что клон $\mathcal{J}_{s0}$ не содержит функций, существенно зависящих более чем от $s-1$ переменных. Он содержит лишь функции вида $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma(x_i)$, где $m \leq s-1$, функции, получающиеся из указанных добавлением фиктивных переменных, функции-константы c_0^n и все селекторы. Получаем возрастающую цепочку клонов

$$\mathcal{J}_{00} \subset \mathcal{J}_{10}^0 \subset \mathcal{J}_{20}^0 \subset \dots,$$

пределом которой служит клон $\mathcal{J}_{\infty 0}$, содержащий все суммы $\gamma(x_{i_1}) \oplus \dots \oplus \gamma(x_{i_k})$ (рис. 1).

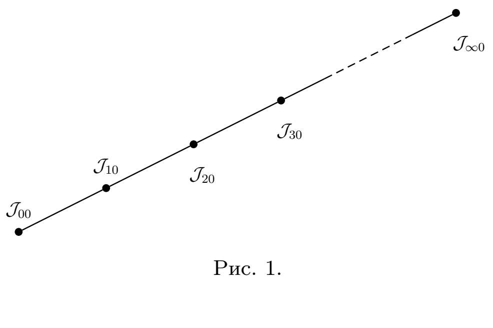

Рис. 1.

4.1. *Клон $\mathcal{J}_{00}$ состоит из селекторов, клон $\mathcal{J}_{10}$ содержит селекторы и константы, клон $\mathcal{J}_{s0}$ образован селекторами, константами и функциями вида $\gamma(x_{i_1}) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_{i_m})$, где $m < s$.* $\square$

4.2. *Гипертождество*

$$\forall F\,[F(F(x,x),x) = F(x, G(x,x))]$$

разделяет клоны $\mathcal{J}_{00}$ и $\mathcal{J}_{10}$.

Доказательство. Если $F \in \{e_1^2, e_2^2\}$ и $G \in \{e_1^2, e_2^2\}$, то равенство справедливо:

$$e_1^2\big(e_1^2(x,x),x\big) = e_1^2(x,x) = x, \quad e_1^2\big(x, e_1^2(x,x)\big) = e_1^2(x,x) = x,$$
$$e_1^2\big(x, e_2^2(x,x)\big) = e_1^2(x,x) = x,$$
$$e_2^2\big(e_2^2(x,x),x\big) = e_2^2(x,x) = x, \quad e_2^2\big(x, e_2^2(x,x)\big) = e_2^2(x,x) = x,$$
$$e_2^2\big(x, e_1^2(x,x)\big) = e_2^2(x,x) = x.$$

Однако при $F = e_2^2$ и $G = c_0^2$ левая и правая части не совпадают:

$$e_2^2\big(e_2^2(x,x),x\big) = x, \quad e_2^2\big(x, c_0^2(x,x)\big) = 0.$$

Рассматриваемое гипертождество ложно на клоне $\mathcal{J}_{10}$. $\square$

4.3. *Клон $\mathcal{J}_{10}$ отделим от клона $\mathcal{J}_{20}$ гипертождеством*

$$\forall F\,[F(x,x) = F(F(x,y), F(y,x))].$$

Доказательство. Клон $\mathcal{J}_{10}$ содержит все селекторы, и все функции-константы, равные нулю. Справедливость равенства при $F \in \{e_1^2, e_2^2\}$ и при $F = c_0^2$ легко проверяется. Клон $\mathcal{J}_{20}$ содержит все функции из клонов $\mathcal{J}_{00}$, $\mathcal{J}_{10}$, функцию $\gamma(x)$ и все функции, получаемые подстановкой $\gamma(x)$ в одну из функций, принадлежащих $\mathcal{J}_{10}$, вместо существенной переменной. Таким образом возникает бинарная функция

$$\mu(x,y) = e_1^2(\gamma(x), y) = \gamma(x),$$

не принадлежащая клону $\mathcal{J}_{10}$.

Полагая в составных частях гипертождества $F = \mu(x,y)$, получим

$$\mu(x,x) = \mu(x,y) = \gamma(x), \quad \mu(y,x) = \gamma(y),$$
$$\mu(\mu(x,y), \mu(y,x)) = \mu(\gamma(x), \gamma(y)) = \gamma(\gamma(x)) = 0.$$

Гипертождество ложно на клоне $\mathcal{J}_{20}$. $\square$

4.4. Будем говорить, что функция $f(x)$ *обладает свойством поглощения*, если $f(g(x)) = c_0^1(x)$ для любой функции $g(x)$, все значения которой принадлежат множеству $\{0,1\}$.

Свойством поглощения обладают функции c_0^1 и γ. Если функция задана формулой, содержащей $\gamma(x_i)$, и переменная x_i существенная, то при подстановке вместо x_i какой-то функции $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ становятся фиктивными.

4.5. Функции, представимые в виде

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x_{i_1}) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_{i_k}),$$

назовем σ_0-*функциями*, а функции, представимые в виде

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x_{i_1}) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_{i_k}) + 1,$$

назовем σ_1-*функциями*.

4.6. Обозначим через U_F^s формулу

$$\forall F(F(F(x_1, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s) = F(x_1, \ldots, x_s))$$
$$\vee(F(x_1, F(x_1, \ldots, x_s), x_3, \ldots, x_s) = F(x_1, \ldots, x_s))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vee(F(x_1, \ldots, x_s, F(x_1, \ldots, x_s)) = F(x_1, \ldots, x_s)).$$

4.7. *Истинность формулы U^s на клоне, не содержащем креативных функций, означает, что в нем нет функций, у которых число существенных переменных равно s. Она ложна на клоне $\mathcal{J}_{s+1,0}$ и истинна на любом его подклоне.*

Доказательство. Как и ранее, легко проверить, что формула истинна, если F принадлежит клону $\mathcal{J}_{10}$. Переходя к другим случаям, рассмотрим формулу

$$F(F(x_1, \ldots, x_s), x_2, \ldots, x_s) = F(x_1, \ldots, x_s).$$

Если F является σ_0-функцией, у которой первая переменная фиктивная, то равенство справедливо. У любой σ_0-функции из клона $\mathcal{J}_{s0}$, имеющей s переменных, одна из переменных фиктивная, поэтому в формуле U^s справедливо по крайней мере одно из равенств. Это означает, что и формула U^s истинна.

Клон $\mathcal{J}_{s+1,0}$ имеет только одну функцию, зависящую от s переменных и не принадлежащую клону $\mathcal{J}_{s0}$. Эта функция представляет собой сумму:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_s) = \gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_s).$$

Поскольку все ее переменные существенные и каждое слагаемое обладает свойством поглощения, при $F = \lambda$ в каждом из равенств, входящих в формулу U^s, число существенных переменных функции слева от знака равенства меньше числа существенных переменных функции, находящейся справа от знака равенства, и потому формула U^s ложна. $\square$

Пусть $\mathcal{B}$ — клон квазилинейных функций рассматриваемого вида над множеством $\{0, 1, 2\}$, μ — унарная функция, определенная на том же множестве, принимающая три значения. Введем следующее обозначение:

$$g^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \mu(g(\mu^{-1}(x_1), \ldots, \mu^{-1}(x_n))). \tag{4.1}$$

Отображение α, сопоставляющее каждой функции $g \in \mathcal{B}$ функцию g^α, является изоморфизмом клона $\mathcal{B}$ на некоторый клон $\mathcal{B}^\alpha$ над тем же множеством. Действительно, пусть f и h принадлежат клону $\mathcal{B}$ и имеют арности n и k соответственно. Тогда

$$f^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \mu(f(\mu^{-1}(x_1), \ldots, \mu^{-1}(x_n))),$$
$$h^\alpha(x_1, \ldots, x_k) = \mu(h(\mu^{-1}(x_1), \ldots, \mu^{-1}(x_k))),$$

$$(f^\alpha * h^\alpha)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-1})$$
$$= f^\alpha(h^\alpha(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-1})$$

$$= \mu(f(\mu^{-1}(\mu(h(\mu^{-1}(x_1), \dots, \mu^{-1}(x_k)))), \mu^{-1}(x_{k+1}), \dots, \mu^{-1}(x_{k+n-1})))$$
$$= \mu(f(h(\mu^{-1}(x_1), \dots, \mu^{-1}(x_k)), \mu^{-1}(x_{k+1}), \dots, \mu^{-1}(x_{k+n-1})))$$
$$= (f * h)^{\alpha}(x_1, \dots, x_{k+n-1}).$$

Для операций ζ, τ, Δ проверка проводится аналогично.

Отображение α не выводит за пределы рассматриваемого множества функций, поэтому далее будем считать, что унарная функция μ определена на множестве $\{0, 1, 2\}$ следующим образом:

$$\mu(0) = 1, \quad \mu(1) = 0, \quad \mu(2) = 2.$$

Отметим, что $\mu^{-1}(x) = \mu(x)$.

4.8. Функцию g^{α} будем называть *двойственной к* g. Клон, образованный множеством всех функций, двойственных функциям клона $\mathcal{C}$, назовем *двойственным клону* $\mathcal{C}$. Клон $\mathcal{C}$ назовем *самодвойственным*, если $\alpha(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Следующие функции двойственны к рассматриваемым квазилинейным:

$$\left(e_i^n\right)^{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = e_i^n(x_1, \dots, x_n), \quad \gamma^{\alpha}(x) = \gamma(x) \oplus 1 = \bar{\gamma}(x),$$
$$\left(c_0^n\right)^{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = c_1^n(x_1, \dots, x_n), \quad \left(c_1^n\right)^{\alpha}(x_1, \dots, x_n) = c_0^n(x_1, \dots, x_n),$$
$$\varphi^{\alpha}(x) = \psi(x), \quad \psi^{\alpha}(x) = \varphi(x),$$
$$(\gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_n))^{\alpha} = \mu(\gamma(\mu^{-1}(x_1)) \oplus \ldots \oplus \gamma(\mu^{-1}(x_n)))$$
$$= \mu(\gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_n)) = \gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_n) \oplus 1.$$

К функции $\sum\limits_{i=1}^{l} \gamma(x_i)$ двойственной является функция $1 \oplus \sum\limits_{i=1}^{l} \gamma(x_i)$, а к функции c_0 — функция c_1. Получаем цепочку двойственных клонов

$$\mathcal{J}_{00} \subset \mathcal{J}_{01} \subset \mathcal{J}_{02} \subset \ldots$$

с пределом $\mathcal{J}_{0\infty}$.

Обозначим через $\mathcal{J}_{lm}$ клон, порождаемый совместно элементами клонов $\mathcal{J}_{l0}$ и $\mathcal{J}_{0m}$. Взаимные суперпозиции функций γ и $\bar{\gamma}$ дают следующие результаты:

$$\gamma * \bar{\gamma} = c_0, \quad \bar{\gamma} * \gamma = c_1.$$

Это означает, что $\mathcal{J}_{lm}$ содержит лишь те функции, которые входят либо в $\mathcal{J}_{l0}$, либо в $\mathcal{J}_{0m}$. Другими словами, $\mathcal{J}_{lm}$ получается объединением множеств функций, принадлежащих $\mathcal{J}_{l0}$ и $\mathcal{J}_{0m}$. Получаем решетку подклонов клона $\mathcal{J}_{\infty\infty}$ (рис. 2). Клоны, расположенные в ней симметрично относительно вертикальной оси, двойственны, на оси — самодвойственны.

4.9. *Формула U_T^s ложна на клоне $\mathcal{J}_{0,s+1}$ и истинна на всех его подклонах.*

Доказательство. Клон $\mathcal{J}_{0,s+1}$ изоморфен клону $\mathcal{J}_{s+1,0}$. □

4.10. *Пусть $p > s$. Клон $\mathcal{J}_{p+1,s}$ отделяется от клона $\mathcal{J}_{p,s}$ формулой U_T^p.*

Доказательство. Клон $\mathcal{J}_{p+1,s}$ содержит все функции, принадлежащие клонам $\mathcal{J}_{p+1,0}$, $\mathcal{J}_{0,s}$, и только их. Клон $\mathcal{J}_{p,s}$ является его максимальным подклоном. Принадлежащие ему функции имеют не более $p-1$ существенных переменных. Формула U_T^p на этом клоне истинна. Клон $\mathcal{J}_{p+1,s}$ содержит функцию с p существенными переменными, и эта формула на нем ложна. □

4.11. Обозначим через $Q_F^s(x_1, \dots, x_s)$ формулу

$$\neg(F(F(x_1, \dots, x_s), x_2, \dots, x_s) = F(x_1, \dots, x_s))$$
$$\wedge\neg(F(x_1, F(x_1, \dots, x_s), x_3, \dots, x_s) = F(x_1, \dots, x_s))$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\wedge\neg(F(x_1, \dots, x_{s-1}, F(x_1, \dots, x_s)) = F(x_1, \dots, x_s)).$$

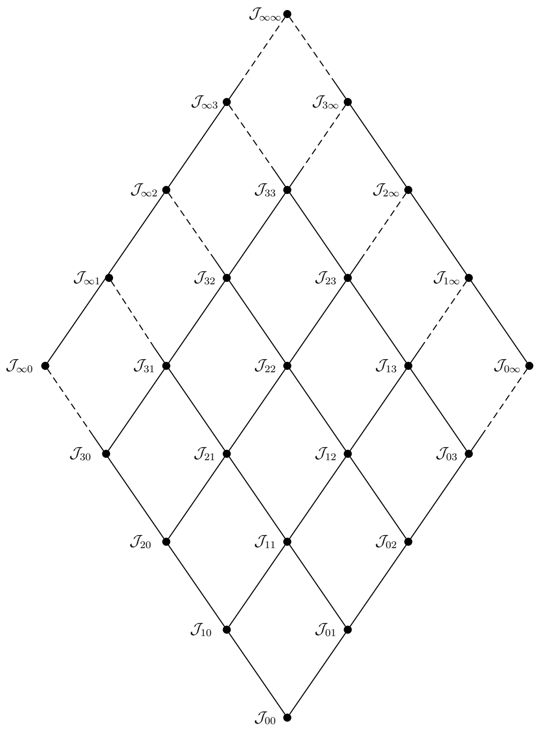

Рис. 2.

4.12. *Формула*

$$\forall F_1 \forall F_2 \ \left[Q^s_{F_1}(x_1,\dots,x_s) \wedge Q^s_{F_2}(x_1,\dots,x_s) \to (F_1(x_1,\dots,x_s) = F_2(x_1,\dots,x_s))\right]$$

отделяет клоны $\mathcal{J}_{\infty,\infty}$, $\mathcal{J}_{\infty,s+1}$ *от клона* $\mathcal{J}_{\infty,s}$ *и при* $p > s$ *клон* $\mathcal{J}_{p,s+1}$ *от клона* $\mathcal{J}_{p,s}$.

Доказательство. Указанная в формулировке формула истинна, если в клоне нет двух различных функций, имеющих s переменных и существенно зависящих от каждой их них. В клонах $\mathcal{J}_{p,s}$ и $\mathcal{J}_{\infty,s}$ таковой является лишь одна функция $\gamma(x_1)\oplus\dots\oplus\gamma(x_s)$. Клоны $\mathcal{J}_{p,s+1}$, $\mathcal{J}_{\infty,\infty}$ и $\mathcal{J}_{\infty,s+1}$ содержат также вторую функцию $\gamma(x_1)\oplus\dots\oplus\gamma(x_s)\oplus 1$, и на них формула ложна. $\square$

4.13. *Вместо формулы из* 4.12 *иногда удобнее пользоваться формулой*

$$\forall F \forall G \ \left[(F(x_1,\dots,x_s) = G(x_1,\dots,x_s)) \vee U^s_F \vee U^s_G\right],$$

которая также отделяет клоны $\mathcal{J}_{\infty,\infty}$, $\mathcal{J}_{\infty,s+1}$ *от клона* $\mathcal{J}_{\infty,s}$ *и при* $p > s$ *клон* $\mathcal{J}_{p,s+1}$ *от клона* $\mathcal{J}_{p,s}$.

Доказательство. Указанная в формулировке утверждения формула получена из формулы

$$\forall F_1 \forall F_2 \ \left[Q^s_{F_1}(x_1,\dots,x_s) \wedge Q^s_{F_2}(x_1,\dots,x_s) \to (F_1(x_1,\dots,x_s) = F_2(x_1,\dots,x_s))\right]$$

применением логических законов

$$a \to b = \neg a \vee b, \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b, \quad \neg\neg a = a. \quad \square$$

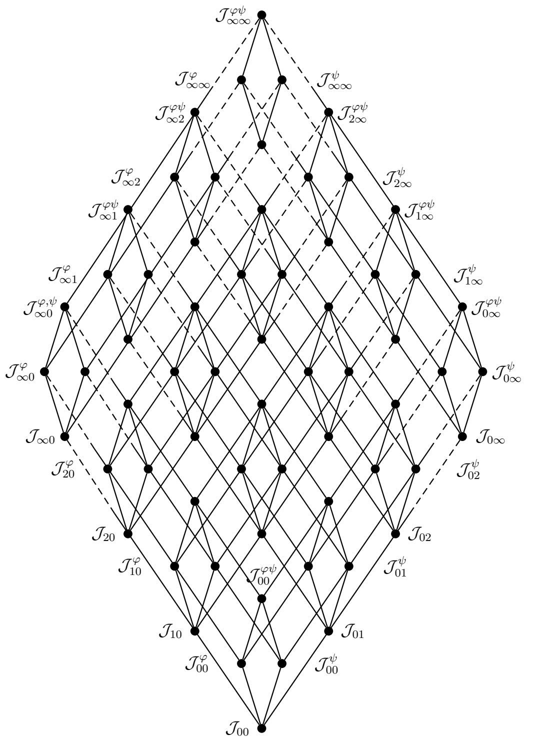

Рис. 3.

Пусть $\mathcal{J}^{\varphi}_{00}$ и $\mathcal{J}^{\psi}_{00}$ — клоны, порождаемые соответственно элементами множеств $\{e^2_2, \varphi\}$, $\{e^2_2, \psi\}$. Так как функции e^1_1, φ, ψ оставляют числа 0 и 1 неподвижными и

$$\gamma(e^1_1) = \gamma, \quad \bar{\gamma}(e^1_1) = \bar{\gamma}, \quad \gamma(\varphi) = \gamma(\psi) = c_0, \quad \bar{\gamma}(\varphi) = \bar{\gamma}(\psi) = c_1,$$

множества вида $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, где $\mathcal{K}_1 \in \{\mathcal{J}_{l0}, \mathcal{J}_{0m}, \mathcal{J}_{lm}\}$, $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \in \{\mathcal{J}^{\varphi}_{00}, \mathcal{J}^{\psi}_{00}\}$, являются клонами. Получаем решетку подклонов клона $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$ (рис. 3), представляющую собой декартово произведение решетки подклонов клона $\mathcal{J}_{\infty\infty}$ и решетки M_2.

4.14. *Клоны $\mathcal{J}^{\varphi}_{ps}$ и $\mathcal{J}^{\psi}_{ps}$ отделимы от клона $\mathcal{J}_{ps}$ гипертождеством*

$$\forall F \forall G\, [G(F(G(x))) \approx G(G(F(x)))].$$

Доказательство. При $F, G \in \{e^1_1, c^1_0, c^1_1, \gamma, \bar{\gamma}\}$ гипертождество обращается в истинные равенства и потому истинно на $\mathcal{J}_{ps}$:

$$e^1_1\big(F\big(e^1_1(x)\big)\big) = F(x) = e^1_1\big(e^1_1(F(x))\big),$$

$$c^1_i\big(F\big(c^1_i(x)\big)\big) = i = c^1_i\big(c^1_i(F(x))\big),$$

$$\gamma(\bar{\gamma}(\gamma(x))) = 0 = \gamma(\gamma(\bar{\gamma}(x))) = \gamma\big(e^1_1(\gamma(x))\big) = \gamma\big(\gamma(e^1_1(x))\big),$$

$$\bar{\gamma}(\gamma(\bar{\gamma}(x))) = 1 = \bar{\gamma}(\bar{\gamma}(\gamma(x))) = \bar{\gamma}\big(e^1_1(\bar{\gamma}(x))\big) = \bar{\gamma}\big(\bar{\gamma}(e^1_1(x))\big).$$

Однако при $G = \varphi$, $F = \gamma$ или $G = \psi$, $F = \gamma$ получаем

$$\varphi(\gamma(\varphi(x))) = 0, \quad \varphi(\varphi(\gamma(x))) = \gamma(x), \quad \psi(\gamma(\psi(x))) = 0, \quad \psi(\psi(\gamma(x))) = \gamma(x). \quad \square$$

4.15. *Клоны $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi}$ и $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$ нельзя разделить одним гипертождеством арности один.*

Доказательство. Клон $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$ отличается от клона $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi}$ функцией ψ и функциями, получающимися из нее добавлением фиктивных переменных. Это дает основание попытаться разделить указанные клоны гипертождеством арности один. Такое гипертождество имеет вид

$$\forall F_1 \dots \forall F_k \forall G_1 \dots \forall G_m \, [F_1(F_2(\dots(F_k(x))\dots)) \approx G_1(G_2(\dots(G_m(x))\dots))], \quad (4.2)$$

причем некоторые из функциональных переменных могут совпадать. При $k = m = 1$ гипертождество (4.2) превращается в гипертождество $\forall F_1 \forall G_1 \, [F_1(x) \approx G_1(x)]$, ложное на $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi}$. Будем поэтому считать, что $k > 1$.

Предположим, что F_k и G_m — разные функциональные переменные. Придадим всем отличным от G_m переменным в (4.2) значение φ. На множестве $\{0, 1\}$ функция φ действует как селектор и потому исчезает из термов везде, исключая случай, когда она входит в терм крайней справа. Имеются два варианта вида гипертождества (4.2) после такой замены:

$$\forall G_m \, [G_m(G_m(\dots(G_m(\varphi(x))\dots))) \approx G_m(G_m(\dots(G_m(x))\dots)))],$$

$$\forall G_m \, [\varphi(x) \approx G_m(G_m(\dots(G_m(x))\dots))].$$

Придавая переменной G_m значение e_1^1, в каждом случае получим неверное равенство $\varphi(x) = e_1^1(x)$.

Мы убедились в том, что переменные F_k и G_m совпадают. Гипертождество (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\forall F_1 \dots \forall F_k \forall G_1 \dots \forall G_{m-1} \, [F_1(F_2(\dots(F_k(x))\dots)) \approx G_1(G_2(\dots(G_{m-1}(F_k(x)))\dots))]. \quad (4.3)$$

По условию на клоне $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$ это гипертождество ложно, т. е. при некоторых значениях функциональных переменных функция $f(x)$, изображаемая термом слева, не равна функции $g(x)$, изображаемой термом справа. Значения каких-то переменных должны быть равны ψ, так как иначе гипертождество истинно.

Случай 1. Функция ψ не является значением переменной F_k. Значения всех функций принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Ограничения функций φ и ψ на этом множестве совпадают. Стало быть, при замене в термах справа и слева ψ на φ получим те же самые функции $f(x)$ и $g(x)$, причем по-прежнему $f(x) \neq g(x)$. Однако по предположению на клоне $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi}$ гипертождество должно быть истинно.

Случай 2. Функция ψ является значением переменной F_k, а гипертождество при каком-то допустимом наборе значений прочих функциональных переменных на клоне $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$ ложно. Пусть, как и прежде, терм слева изображает функцию $f(x)$, а справа — $g(x)$. Пусть также при указанном наборе значений функциональных переменных значением терма $F_1(F_2(\dots(F_{k-1}(x))\dots)))$ является функция $u(x)$, а значением терма $G_1(G_2(\dots(G_{m-1}(x)))\dots)))$ — функция $v(x)$. Получаем такие равенства:

$$f(x) = u(\psi(x)) = v(\psi(x)) = g(x).$$

Поскольку гипертождество ложно, $f(x) \neq g(x)$. Пусть $f(2) \neq g(2)$. Напомним, что $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = \psi(2) = 1$. Ввиду этого

$$g(1) = v(\psi(1)) = v(\psi(2)) = g(2), \quad f(1) = u(\psi(1)) = u(\psi(2)) = f(2).$$

Последнее означает, что $f(2) \neq g(2)$ тогда и только тогда, когда $f(1) \neq g(1)$.

Если же $f(1) = g(1)$ и $f(2) = g(2)$, то $f(0) \neq g(0)$. Ввиду этого либо $f(0) \neq g(0)$, либо $f(1) \neq g(1)$. После замены в обеих частях ψ на φ получим слева функцию $f_1(x)$, справа функцию $g_1(x)$, которые могут отличаться от функций $f(x)$ и $g(x)$, однако будут удовлетворять хотя бы одному из неравенств

$$f_1(0) \neq g_1(0), \quad f_1(1) \neq g_1(1),$$

что невозможно. $\square$

4.16. Обозначим через S^k_{FG} формулу

$$\forall F \forall G_1 \forall G_2 \dots \forall G_k \,[(F = G_1) \vee (F = G_2) \vee \dots \vee (F = G_k)]. \tag{4.4}$$

4.17. *Клоны $\mathcal{J}^{\varphi}_{ps}$ и $\mathcal{J}^{\psi}_{ps}$ отделимы от клона $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{ps}$ формулой S^6_{FG}.*

Доказательство. Клон $\mathcal{J}^{\varphi}_{ps}$ содержит шесть унарных функций: e^1_1, c^1_0, c^1_1, γ, $\bar{\gamma}$, φ, поэтому на нем формула верна. Столько же унарных функций в клоне $\mathcal{J}^{\psi}_{ps}$. Клон $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{ps}$ содержит семь унарных функций, и на нем формула ложна. $\square$

Если клон содержит функции

$$\gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_k), \quad \overline{\varphi}(x) = 1 \oplus \varphi(x), \tag{4.5}$$

то ему принадлежат также функции

$$\overline{\varphi}(\gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n)) = \gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n) \oplus 1, \quad \varphi(x) = \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(x)).$$

Ввиду этого клон $\mathcal{F}^{\varphi}_k$, порождаемый функциями (4.5), содержит все функции клона $\mathcal{J}^{\varphi}_{kk}$. Добавив в число порождающих функцию ψ, получим клон $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_k$.

Поскольку $\mathcal{F}^{\varphi}_n \setminus \mathcal{J}^{\varphi}_{nn}$ содержит лишь функции, отличающиеся от $\overline{\varphi}$ несущественными переменными, между клонами $\mathcal{F}^{\varphi}_n$ и $\mathcal{J}^{\varphi}_{nn}$ нет промежуточного. Двойственным к $\mathcal{F}^{\varphi}_n$ является клон $\mathcal{F}^{\psi}_n$. Их объединение дает $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_n$. Пределом цепочки $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_0 \subset \mathcal{F}^{\varphi\psi}_1 \subset \dots$ является $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_\infty$. Решетка подклонов клона $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_\infty$ изображена на рис. 4.

4.18. *Клон $\mathcal{F}^{\varphi}_s$ отделим от клона $\mathcal{J}^{\varphi}_{ss}$ гипертождеством*

$$\forall F \forall G \,[F(G(F(G(F(G(x)))))) \approx F(F(G(F(G(F(x))))))].$$

Доказательство. Клон $\mathcal{J}^{\varphi}_{ss}$ содержит существенно одноместные функции e^n_i, c^n_0, c^n_1, φ, γ, $\bar{\gamma}$, а также при $n < s$ функции вида

$$\gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n), \quad 1 \oplus \gamma(x_1) \oplus \dots \oplus \gamma(x_n).$$

При $G = e^1_1$ получаем равенство

$$F(F(F(x))) = F(F(F(F(x)))).$$

Оно справедливо при всех значениях переменной F из клона $\mathcal{J}^{\varphi}_{ss}$. При $F = e^1_1$ гипертождество также выполняется. Истинность гипертождества при $F, G \in \{c^1_1, c^1_0, \gamma, \bar{\gamma}\}$ очевидна. Полагая $F = \varphi$, приходим к равенству

$$G(G(G(x))) = G(G(\varphi(x))),$$

истинность которого также очевидна. Аналогичный результат получаем при $G = \varphi$.

Клон $\mathcal{F}^{\varphi}_i$ содержит все функции, перечисленные выше, а также функцию $\overline{\varphi}(x)$ и все функции, отличающиеся от нее фиктивными переменными. На нем гипертождество не выполняется:

$$\varphi(\overline{\varphi}(\varphi(\overline{\varphi}(\varphi(\overline{\varphi}(x)))))) = \overline{\varphi}(x), \quad \varphi(\varphi(\overline{\varphi}(\varphi(\overline{\varphi}(\varphi(x)))))) = \varphi(x). \quad \square$$

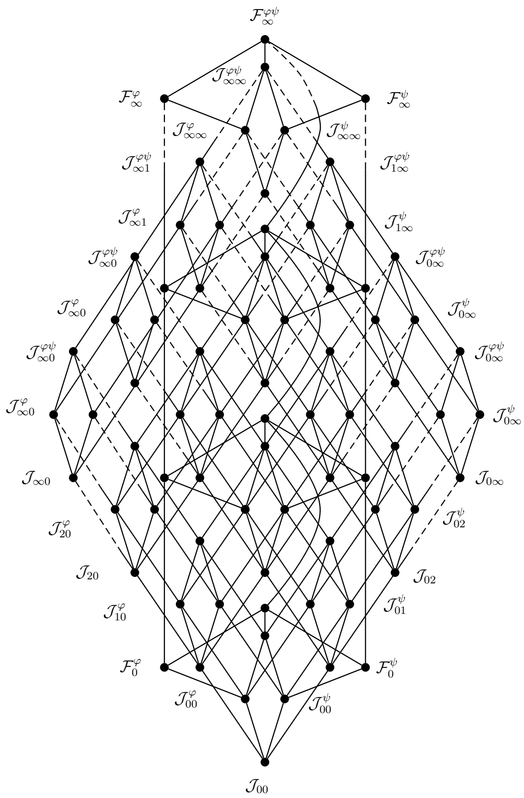

рис. 4.

4.19. *Гипертождество*

$$\forall F \forall G\, [G(F(F(G(G(x))))) \approx G(G(F(F(G(x)))))]$$

отделяет клон $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{s}$ *от клона* $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{ss}$ *и клон* $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$ *от клона* $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$.

Доказательство. Из одноместных функций клон $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{ss}$ содержит все селекторы, константы и функции φ, ψ, γ, $\gamma \oplus 1$. Если $G = c^1_i$, получаем равенства $0 = 0$ или $1 = 1$. Такие же равенства получаем при $F = c^1_i$. Полагая $F = e^1_1$ или $G = e^1_1$, приходим к справедливым равенствам

$$G(G(G(x))) = G(G(G(x))), \quad F(F(x)) = F(F(x)).$$

При $F = \varphi$ возникает равенство $G(G(G(x))) = G(G(G(x)))$, а при $G = \varphi$ — равенство $F(F(\varphi(x))) = F(F(\varphi(x)))$. Оба, очевидно, истинные. Случаи $F = \psi$ и $G = \psi$ разбираются аналогично.

Множества унарных функций клонов $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{ss}$ и $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$ совпадают, поэтому на клоне $\mathcal{J}^{\varphi\psi}_{\infty\infty}$ гипертождество также истинно.

На клонах $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{s}$ и $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$ гипертождество ложно:

$$\overline{\varphi}(\gamma(\gamma(\overline{\varphi}(\overline{\varphi}(x))))) = \overline{\varphi}(0) = 1, \ \ \overline{\varphi}(\overline{\varphi}(\gamma(\gamma(\overline{\varphi}(x))))) = \varphi(0) = 0. \quad \square$$

4.20. *Формула* U^s_F *отделяет клоны* $\mathcal{F}^{\varphi}_{s+1}$ *и* $\mathcal{F}^{\varphi}_{\infty}$ *от клона* $\mathcal{F}^{\varphi}_{s}$, *клоны* $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{s+1}$, $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{\infty}$ *от клона* $\mathcal{F}^{\varphi\psi}_{s}$.

Доказательство. Истинность формулы U_F^s означает, что в клоне нет функций, у которых число существенных переменных равно s. Таких функций нет в клонах $\mathcal{F}_s^\varphi$, $\mathcal{F}_s^{\varphi\psi}$. В клонах $\mathcal{F}_{s+1}^\varphi$, $\mathcal{F}_\infty^\varphi$, $\mathcal{F}_\infty^{\varphi\psi}$ и $\mathcal{F}_{s+1}^{\varphi\psi}$ подобные функции имеются. □

4.21. *Не существует гипертождества арности один, разделяющего клоны $\mathcal{J}_{pq}^\varphi$ и $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$. Также не существует гипертождества арности один, разделяющего клоны $\mathcal{J}_\infty^\varphi$ и $\mathcal{J}_\infty^{\varphi\psi}$.*

Доказательство. Клон $\mathcal{J}_{pq}^\varphi$ содержит функцию $\varphi(x)$, все функции, отличающиеся от нее фиктивными переменными, и функции

$$\gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_m), \quad 1 \oplus \gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_n),$$

где $m \leq p$, $n \leq q$.

Клон $\mathcal{J}_\infty^\varphi$ образован функцией $\varphi(x)$, функциями, отличающимися от нее фиктивными переменными, и функциями $\gamma(x_1) \oplus \ldots \oplus \gamma(x_m)$.

Клон $\mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}$ получается из клона $\mathcal{J}_{pq}^\varphi$, а клон $\mathcal{J}_\infty^{\varphi\psi}$ из клона $\mathcal{J}_\infty^\varphi$ добавлением функции $\psi(x)$ и всех функций, отличающихся от нее фиктивными переменными. Видим, что условия для доказательства точно такие же, как в утверждении 4.15, поэтому оставшаяся часть доказательства совпадает с доказательством утверждения 4.15. □

4.22. *Клон $\mathcal{F}_s^{\varphi\psi}$ отделим от клона $\mathcal{F}_s^\varphi$ формулой S_{FG}^7 (см. (4.4)). Эта же формула разделяет клоны $\mathcal{F}_\infty^{\varphi\psi}$ и $\mathcal{F}_\infty^\varphi$.*

Доказательство. Множества унарных функций клонов $\mathcal{F}_s^\varphi$ и $\mathcal{F}_\infty^\varphi$ совпадают и каждое содержит семь функций e_1^1, c_0^1, c_1^1, γ, $\gamma \oplus 1$, φ, $\varphi \oplus 1$. На этих клонах формула S_{FG}^7 истинна. На клонах $\mathcal{F}_s^{\varphi\psi}$ и $\mathcal{F}_\infty^{\varphi\psi}$ формула ложна, так как в них унарных функций больше. □

Осталось изучить, какие гипертождества разделяют несравнимые клоны. Рассмотрим клоны $\mathcal{J}_{pq}$ и $\mathcal{J}_{rs}$. При $p = r$ и $q = s$ эти клоны совпадают, при $p = s$ и $q = r$ они изоморфны и разделить гипертождествами их нельзя. Если $p \geq r$ и $q \geq s$, то либо имеем один из только что разобранных случаев, либо в решетке подклонов клона $\mathcal{J}_{\infty\infty}$ они сравнимы и их можно разделить формулой, что было доказано ранее. Клоны также сравнимы, если $p = r$ и либо $q < s$, либо $q > s$, или если $q = s$ и либо $p < r$, либо $p > r$. При $p = s$ и $q > r$ клон $\mathcal{J}_{rs}$ изоморфен подклону $\mathcal{J}_{sr}$ клона $\mathcal{J}_{pq}$ и их можно разделить формулой. В случае $q = r$ рассуждения аналогичны.

Для клонов вида $\mathcal{J}_{ij}^\varphi$ и $\mathcal{J}_{ij}^{\varphi\psi}$ проведенные рассуждения остаются верными, если учесть следующее. Формула, разделяющая клоны $\mathcal{J}_{pq}$ и $\mathcal{J}_{rs}$, будет разделять клоны $\mathcal{J}_{pq}$ и $\mathcal{J}_{rs}^\varphi$, $\mathcal{J}_{pq}^\varphi$ и $\mathcal{J}_{rs}^\varphi$ и т. д.

Осталось рассмотреть один случай.

4.23. *Пусть $p > r$, $q < s$, $p \neq s$, $q \neq r$,*

$$\mathcal{C}_1 \in \{\mathcal{J}_{pq}, \mathcal{J}_{pq}^\varphi, \mathcal{J}_{pq}^{\varphi\psi}\}, \quad \mathcal{C}_2 \in \{\mathcal{J}_{rs}, \mathcal{J}_{rs}^\varphi, \mathcal{J}_{rs}^{\varphi\psi}\}.$$

Формула U_T^{n-1}, где $n = \max(p, s)$, разделяет клоны $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $n = p$. В таком случае в клоне $\mathcal{C}_1$ есть функция арности $n - 1$, у которой каждая переменная существенная. В клоне $\mathcal{C}_2$ у любой функции арности $n - 1$ есть фиктивные переменные. Это означает, что формула U_T^{n-1} истинна на клоне $\mathcal{C}_2$, но ложна на клоне $\mathcal{C}_1$. □

Рассмотрим клоны видов $\mathcal{F}_i^{\varphi}$, $\mathcal{F}_i^{\psi}$, $\mathcal{F}_i^{\varphi\psi}$. Клон $\mathcal{F}_i^{\varphi}$ изоморфен клону $\mathcal{F}_i^{\psi}$, поэтому последний из рассмотрения исключим. Клон $\mathcal{F}_i^{\varphi}$ является подклоном клонов $\mathcal{F}_j^{\varphi\psi}$ и $\mathcal{F}_j^{\varphi}$, если $i < j$. При $i > j$ клоны $\mathcal{F}_i^{\varphi}$ и $\mathcal{F}_j^{\varphi\psi}$ несравнимы.

4.24. *При $i > j$ клон $\mathcal{F}_i^{\varphi}$ отделим от клона $\mathcal{F}_j^{\varphi\psi}$ формулой U_T^{i-1}.*

Доказательство. В клоне $\mathcal{F}_i^{\varphi}$ есть функция арности $i-1$, у которой каждая переменная существенная, а в клоне $\mathcal{F}_j^{\varphi\psi}$ такой функции нет. □

4.25. *Пусть $s > p > r$,*

$$\mathcal{C}_1 \in \{\mathcal{F}_p^{\varphi}, \mathcal{F}_p^{\varphi\psi}\}, \quad \mathcal{C}_2 \in \{\mathcal{J}_{rs}, \mathcal{J}_{rs}^{\varphi}, \mathcal{J}_{rs}^{\varphi\psi}\}.$$

Клоны $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ несравнимы и разделяются формулой U_T^{s-1}.

Доказательство проводится аналогично предыдущему. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenberg I. G.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, B. 1965. V. 260. P. 3817–3819.
2. *Reichel M., Schweigert D., Simovici D. A.* A completeness criterion by functional equations // Proc. 17th int. symp. on multiple-valued logic. Boston, 1987. P. 2–4.
3. *Taylor W.* Hyperidentities and hypervarieties // Aequationes Math. 1981. V. 23, N 1. P. 30–49.
4. *Denecke K., Poeschel R.* The characterization of primal algebras by hyperidentities // Contributions to general algebra 6. Wienna: Hoelder–Pichler–Tempsky, 1988. V. 6. P. 67–68.
5. *Денеке К., Мальцев И. А., Решке М.* О разделимости булевых клонов гипертождествами // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1050–1066.
6. *Мальцев И. А., Швайгерт Д.* Гипертождества QZ-алгебр // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 132–139.
7. *Denecke K., Wismath S. L.* Hyperidentities and clones. Amsterdam: Gordon & Breach Publ., 2000.
8. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
9. *Мальцев А. И., Мальцев И. А.* Итеративные алгебры Поста. М.: Наука, 2012.
10. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О существенно минимальных ТС-клонах на трехэлементном множестве // MTA SZTAKI Kozl. 1984. N 32. P. 115–151.
11. *Деметрович Я., Мальцев И. А.* О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta Cybernetica. 1989. V. 9, N 1. P. 1–25.
12. *Мальцев И. А., Тугылбаева Б. Г.* Конгруэнции на подклонах клона Бурле ранга 3, не содержащих креативных функций // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 49, № 5. С. 1087–1104.

Статья поступила 30 декабря 2013 г.

Мальцев Иван Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
malcev@math.nsc.ru