*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2014. Том 55, № 2*

*УДК 515.17+517.545*

# ПРОСТРАНСТВО ГАРМОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

**Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев**

**Аннотация.** Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [1–7]. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого суть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях, и найдена его связь с когомологическим расслоением Ганнинга над пространством Тейхмюллера для двух важных подгрупп несущественных и нормированных характеров на компактной римановой поверхности. Изучены периоды голоморфных дифференциалов Прима для существенных характеров на переменных компактных римановых поверхностях.

**Ключевые слова:** гармонический дифференциал Прима, абелев дифференциал, характер, пространство Тейхмюллера.

## § 1. Предварительные сведения

Пусть $F$ — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$ с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а $F_0$ — некоторая комплексно-аналитическая структура на $F$. В дальнейшем риманову поверхность $(F; F_0)$ для краткости записи будем обозначать через $F_0$. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа $\Gamma$ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, такая, что $U/\Gamma$ конформно эквивалентна $F_0$. Группа $\Gamma$ изоморфна $\pi_1(F)$ и имеет представление

$$\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I \right\rangle,$$

где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, а $I$ — тождественное отображение [1, 2].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на $F$ может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами $\mu$ на $F_0$, т. е. выражением вида $\mu(z)d\bar{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на $F_0$, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на $F_0$ и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на $F$ будем обозначать через $F_\mu$. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует $F_0$. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на $F$ с

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–90800–мол–рф–нр, 12–01–00210–а, 14–01–31109 мол–а).

топологией $C^\infty$ сходимости на $F_0$, $\mathrm{Diff}_0(F)$ — группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности $F$ на себя, гомотопных тождественному диффеоморфизму. Группа $\mathrm{Diff}_0(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in \mathrm{Diff}_0(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/\mathrm{Diff}_0(F)$ [1, 2].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ — локальный диффеоморфизм, любой дифференциал Бельтрами $\mu$ на $F_0$ поднимается до $\Gamma$-дифференциала Бельтрами $\mu$ на $U$, т. е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in U} |\mu(z)| < 1$, и

$$\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T^{'}(z) = \mu(z), \quad z \in U,\ T \in \Gamma.$$

Если $\Gamma$-дифференциал $\mu$, определенный на $U$, продолжить на $\overline{\mathbf{C}}\backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar z} = \mu(z) w_z$. Отображение $T \to T_\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы $\Gamma$ на квазифуксову группу $\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1}$.

Классические результаты Альфорса, Берса [1] и других авторов утверждают, что 1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексным многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \to M(F)/\mathrm{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ голоморфно и при этом $\Phi$ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из $\Gamma_\mu$ голоморфно зависят от $[\mu]$.

Два $\Gamma$-дифференциала Бельтрами $\mu$ и $\nu$ конформно эквивалентны, если и только если

$$w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}, \quad T \in \Gamma.$$

Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$ и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в $\Gamma_\mu$ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/\mathrm{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами $\Gamma_\mu$ [1].

Для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ в [1, теорема 1, с. 99] построены голоморфные формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi)\, d\xi, \dots, \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi)\, d\xi$ на $w^\mu(U)$. Эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на $F_\mu$ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \dots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на $F_\mu$, двойственный каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на $F_\mu$. Этот базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности $F_\mu$. Кроме того, матрица $b$-периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на $F_\mu$ тоже голоморфно зависит от $[\mu]$.

*Характером* $\rho$ для $F_\mu$ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot)$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \dots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbf{C}^*)^{2g}$ [3].

Определение 1.0. *$q$-Дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы $\Gamma$ для $\rho$, т. е. $(\rho, q)$-дифференциалом, называется дифференциал $\omega(z)\, dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$, $\rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$.

Определение 1.1. *Мультипликативной функцией* $f$ на $F_\mu$ для характера $\rho$ назовем мероморфную на $w^\mu(U)$ функцию $f$ такую, что $f(Tz) = \rho(T) f(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$.

Если $f_0$ — мультипликативная функция на $F_\mu$ для $\rho$ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu],P) = f_0([\mu],P_0)\exp\int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu],\rho) \in \mathbf{C}$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} c_j \le \frac{1}{2}$, $j = 1,\dots,g$, $c_j$ зависят голоморфно от $[\mu]$ и от $\rho$. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки $P$ на переменной поверхности $F_\mu$ и $s[\mu]$ — голоморфное сечение Эрла в $M(F)$ над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [4]. Характер $\rho$ для $f_0$ имеет вид

$$\rho\big(a_k^\mu\big) = \exp 2\pi i c_k([\mu],\rho), \quad \rho\big(b_k^\mu\big) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\pi_{jk}([\mu])\right),\ k = 1,\dots,g.$$

Будем называть такие характеры $\rho$ *несущественными*, а $f_0$ (с таким характером) — *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на $\Gamma$ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу $L_g$ в группе $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$. Обозначим через $U_j = \{\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*) : \rho(a_j) \ne 1\}$ и $U_{g+j} = \{\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*) : \rho(b_j) \ne 1\}$, $j = 1,\dots,g$. Назовем характер $\rho$ на $\Gamma$ *нормированным*, если все его значения лежат на единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

**Лемма 1.1** [5, лемма 2.2.2]. *Голоморфное главное* $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$*-расслоение* $E$ *биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению* $\mathbf{T}_g(F)\times\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$ *над* $\mathbf{T}_g(F)$.

Определение 1.2. Дифференциал Прима $\phi$ класса $C^1$ на $F = U/\Gamma$ для $\rho$ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. $f$ — мультипликативная функция на $F$ класса $C^2$ для $\rho$.

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ для $\rho \in \operatorname{Hom}(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S,T \in \Gamma_\mu$ [3].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1),\dots,\phi(A_g),\phi(B_1),\dots,\phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0$, которое получается из соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = I$ в $\Gamma_\mu$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-1)$-мерное пространство для $\rho \ne 1$ и $2g$-мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$, порожденное элементом $\sigma$. Тогда $H^1(\Gamma_\mu,\rho) = Z^1(\Gamma_\mu,\rho)/B^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — комплексное векторное $(2g-2)$-мерное пространство для $\rho \ne 1$. Будем называть множество $G = \bigcup\limits_{\rho\ne 1,[\mu]} H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ *когомологическим расслоением Ганнинга* над $\mathbf{T}_g \times (\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)\backslash\{1\})$ [3].

Пусть $\phi$ — замкнутый дифференциал Прима на $F_0$ для $\rho$. Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки $z_0$ до $z \in U$, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z)$, $z \in U$, $f(z)$ — интеграл Прима на круге $U$ для дифференциала Прима $\phi$, определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f,z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f,z_0} : \Gamma \to \mathbf{C}$. Это отображение называется *отображением периодов* для $\phi$. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на $U$ и базисной точки $z_0$. Если $f_1(z) = f(z) + c$ — другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима $\phi$, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma$. Легко проверить, что оба отображения $\phi_{f,z_0}$ и $\phi_{f_1,z_0}$ удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma, \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима $\phi$ на $F_0$.

Для замкнутого дифференциала Прима $\phi$ можно определить так называемые, классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T)$ равен $\int\limits_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T)$ [5].

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима $\phi$ на $F_0$ для $\rho$. Поэтому корректно определено $\mathbf{C}$-линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима $\phi$ на $F_0$ для $\rho$ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на $F_\mu$ для характера $\rho$ [2, 5].

**Лемма 1.2** [5]. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, то $\omega$ — мультипликативно точный дифференциал на $F_\mu$ для $\rho$.*

Пусть $\phi = df(z) = \varphi(z)\,dz$, тогда $\varphi(Tz)T'(z) = \rho(T)\varphi(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, и $\phi$ для $\rho$ на $F = U/\Gamma$ есть голоморфная мультипликативная касп-форма для $(\Gamma, \rho)$ веса $(-2)$ [3].

Также имеем $\varphi(Tz) = (1/T'(z))\rho(T)\varphi(z) = k(T, z)\rho(T)\varphi(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, где $k(T, z)$ — канонический фактор автоморфности для $U/\Gamma$, который зависит только от комплексно-аналитической структуры на $U/\Gamma$. Следовательно, $\varphi(z)$ — голоморфное сечение для голоморфного линейного расслоения $k \otimes \rho$ над $U/\Gamma$, где $\otimes$ обозначает тензорное произведение линейных расслоений над $U/\Gamma$ [2, 3].

**Лемма 1.3** [5, гл. 3, лемма 3.2.1]. *Любой дифференциал Прима $\phi$ на $F$ класса $C^\infty$ для $\rho$ единственно разлагается на сумму дифференциала Прима $\phi_1$ типа $(1,0)$ на $F$ класса $C^\infty$ для $\rho$ и дифференциала Прима $\phi_2$ типа $(0,1)$ на $F$ класса $C^\infty$ для $\rho$.*

Определение 1.3. *Гармоническим дифференциалом Прима* на $F$ для $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}$ на $U$ такая, что

$$\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(Tz)\,d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}), \quad T \in \Gamma,\ z \in U.$$

Гармонический дифференциал Прима $\phi$ на $U$ представляется в виде $\phi = \phi_1(z)\,dz + \phi_2(z)\,d\bar{z}$, где $\phi_1(z)\,dz = df_1(z), \phi_2(z)\,d\bar{z} = d\overline{f_2(z)}, f_j(z)$ — голоморфные функции на $U, j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где $f(z) = f_1(z) + \overline{f_2(z)}$ — комплекснозначная гармоническая функция на $U$ (гармонический интеграл Прима для дифференциала $\phi$). Отсюда получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \quad \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T).$$

**Теорема 1.1** [5, гл. 3, теорема 3.2.3]. *Если $\phi, \psi$ — замкнутые дифференциалы Прима на $F$ класса $C^\infty$ для $\rho_1$ и $\rho_2$ соответственно, то*

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_{\Delta} \phi \wedge \psi &= \int_{\partial\Delta} h(z)\psi \\ &= \sum_{j=1}^{g}\Bigg[(1-\rho_1\rho_2(B_j))\int_{z\in\tilde a_j} h(z)\psi - (1-\rho_1\rho_2(A_j))\int_{z\in\tilde b_j} h(z)\psi\Bigg] \\ &+ \sum_{j=1}^{g}\Bigg\{[\phi(C_1\dots C_{j-1})(1-\rho_2(B_j)) - \rho_2(B_j)(\phi(C_j)+\phi_h(B_j))]\int_{z\in\tilde a_j}\psi \\ &\quad + [(\rho_2(A_j)-1)\phi(C_1\dots C_{j-1}) + \rho_2(A_j)\phi_h(A_j) - \phi(C_j)]\int_{z\in\tilde b_j}\psi\Bigg\},\end{aligned}$$

*где $\Delta$ — фиксированная фундаментальная область для $\Gamma$ в $U$, $\phi = dh(z)$ на $U$, $h(Tz) = \rho(T)h(z) + \phi_h(T)$, $T \in \Gamma$,*

$$\int_{\tilde a_j}\psi = \int_{z_0}^{A_j z_0}\psi, \quad \int_{\tilde b_j}\psi = \int_{z_0}^{B_j z_0}\psi,$$

*причем это равенство инвариантно относительно выбора интеграла $h(z)$ для $\phi$ с точностью до аддитивного слагаемого.*

## § 2. Гармонические дифференциалы Прима для несущественных характеров

Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство голоморфных дифференциалов Прима для несущественного характера $\rho$, а $\langle df_0\rangle$ — одномерное подпространство, порожденное $df_0$ на $F_\mu$ [3].

**Теорема 2.1.** *Векторное расслоение*

$$\mathbf{P}_{1,0} = \bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\, \rho\in L_g\setminus 1} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/\langle df_0\rangle$$

*является голоморфным векторным расслоением ранга $g-1$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g\setminus 1)$ для любого $g \geq 2$.*

Доказательство. Ясно, что $U_j \cap (L_g\setminus 1)$, $j = 1,\dots,2g$, образует открытое покрытие для базы $L_g\setminus 1$. Для фиксированного $k = 1,\dots,g$ рассмотрим $\rho_0 \in U_k \cap (L_g\setminus 1)$. Известно, что $df_0 = 2\pi i(c_1 f_0\zeta_1 + \dots + c_g f_0\zeta_g)$, где характер $\rho_0$ для $f_0$ имеет вид $\rho_0(a_j) = \exp(2\pi i c_j)$, $j = 1,\dots,g$. Для $\rho_0 \in U_k$ имеем $\rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$ для $\rho \in U(\rho_0) \subset U_k \cap (L_g\setminus 1)$ и $[\mu] \in U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Отсюда

$$f_0\zeta_k = \frac{1}{2\pi i c_k}(df_0) - \frac{1}{c_k}\sum_{j\neq k} c_j f_0\zeta_j.$$

Из [5] следует, что для любого $\phi([\mu],\rho;z)\,dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ верно разложение

$$\phi([\mu],\rho;z)\,dz = \alpha_1 f_0\zeta_1 + \dots + \alpha_g f_0\zeta_g = \sum_{j\neq k}\alpha_j f_0\zeta_j + \alpha_k f_0\zeta_k$$
$$= \sum_{j\neq k}\left(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right) f_0\zeta_j + \alpha_k\frac{df_0}{2\pi i c_k}.$$

Отсюда получаем, что

$$\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle = \sum_{j\neq k}\left(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle.$$

Таким образом, набор классов смежности для дифференциалов Прима

$$f_0\zeta_1,\dots,\widehat{f_0\zeta_k},\dots,f_0\zeta_g$$

является базисом локально голоморфных сечений по $[\mu]$ и $\rho$ для нашего расслоения над $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$. Если $\phi'([\mu],\rho;z)\,dz$ — другой представитель класса смежности $\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle$, то

$$\phi'([\mu],\rho;z)\,dz = \phi([\mu],\rho;z)\,dz + m df_0, \quad m\in\mathbf{C},$$

или

$$\sum_{j=1}^{g}\alpha'_j f_0\zeta_j = \sum_{j=1}^{g}\alpha_j f_0\zeta_j + m\sum_{j=1}^{g}2\pi i c_j f_0\zeta_j.$$

Таким образом,

$$\alpha'_j = \alpha_j + m2\pi i c_j, \quad j=1,\dots,g.$$

Следовательно,

$$\langle\phi'([\mu],\rho;z)\,dz\rangle = \sum_{j\neq k}\left(\alpha'_j - \frac{\alpha'_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle$$
$$= \sum_{j\neq k}\left(\alpha_j + m2\pi i c_j - \frac{\alpha_k + m2\pi i c_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle = \sum_{j\neq k}\left(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k}c_j\right)\langle f_0\zeta_j\rangle.$$

Поэтому отображение

$$\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle \to (\lambda_1,\dots,\hat\lambda_k,\dots,\lambda_g),$$

где $\lambda_j = \alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k}c_j$ для $j\neq k$, над $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ задает карту (тривиализацию) $\Theta([\mu_0],\rho_0)$ для нашего расслоения, т. е. $\mathbf{P}_{1,0}|U([\mu_0])\times U(\rho_0)\cong U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{g-1}$. Эти карты задают структуру голоморфного векторного расслоения на $\mathbf{P}_{1,0}$ над $\mathbf{T}_g\times(L_g\backslash 1)$.

Для фиксированного $j=1,\dots,g$ пусть $\rho_0\in U_{g+j}\cap(L_g\backslash 1)$, т. е. $\rho_0(b_j)\neq 1$. Предположим, что все $\rho_0(a_j)$ равны 1, т. е. $c_j=0$, $j=1,\dots,g$. Имеем $\rho_0(a_j) = \exp(2\pi i c_j) = 1$, $\rho_0(b_j) = \exp\left(2\pi i\sum\limits_{k=1}^{g}c_k\pi_{jk}\right)$, а значит, $\rho_0(b_j)=1$; противоречие. Следовательно, хотя бы одно $c_k$ ненулевое и $\rho_0\in U_{g+j}\cap U_k$, т. е. $\rho_0(a_k)\neq 1$. Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Теорема доказана.

Отображение периодов $p:\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))/\langle df_0\rangle \to H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ такое, что

$$\phi(z)\,dz \to p(\phi(z)\,dz) = [\phi] = \{\phi + c\sigma : c\in\mathbf{C}\} = \phi + B^1(\Gamma_\mu,\rho),$$

будет $\mathbf{C}$-линейным послойным отображением из $\mathbf{P}_{1,0}$ в $G$ над $\mathbf{T}_g\times(L_g\backslash 1)$. Поэтому отображение периодов $p:\mathbf{P}_{1,0}\to G$ — линейное отображение голоморфных векторных расслоений над $\mathbf{T}_g\times(L_g\backslash 1)$ [3].

Покажем, что отображение $p$ будет послойно инъективным отображением из расслоения ранга $g-1$ в когомологическое расслоение Ганнинга ранга $2g-2$.

Пусть $\omega+kdf_0$ при отображении $p$ переходит в класс $[\omega]=0$ в $H^1(\Gamma_\mu,\rho)$. По лемме 1.2 получаем, что $\omega$ — мультипликативно точный дифференциал, т. е. $\omega=df$, где $f$ — голоморфная мультипликативная функция для несущественного характера $\rho\neq 1$. Функция $\frac{f}{f_0}$ однозначная голоморфная на компактной римановой поверхности $F_\mu$ рода $g\geq 2$, а значит, она будет константой $c\neq 0$, так как функция $f$ не имеет нулей на этой поверхности. Следовательно, $\omega=cdf_0$, $c\neq 0$, т. е. $\omega$ представляет нулевой класс в нашем фактор-пространстве. Поэтому отображение $p$ — послойная инъекция.

**Теорема 2.2.** *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0\to\mathbf{P}_{1,0}\xrightarrow{p}G\xrightarrow{h}G/\mathbf{P}_{1,0}\to 0$$

*над* $\mathbf{T}_g(F)\times(L_g\backslash 1)$ *точная для любого* $g\geq 2$.

Доказательство. По теореме 2.1 и [6; 5, гл. 3, теорема 3.3.4] расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$ и $G$ имеют структуру голоморфных векторных расслоений. Кроме того, уже доказано, что $p$ — послойная инъекция.

Покажем, что отображение $p$ голоморфно относительно этих структур. Пусть $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ — достаточно малая односвязная окрестность точки $([\mu_0],\rho_0)$, где $U(\rho_0)\subset(L_g\backslash 1)$. Тогда $U(\rho_0)$ лежит в одной из областей $U_j=\{\rho:\rho(A_j)\neq 1\}$, $U_{g+j}=\{\rho:\rho(B_j)\neq 1\}$, $j=1,\dots,g$, покрытия для $L_g\backslash 1$. Пусть, например, $U(\rho_0)\subset U_g\cap(L_g\backslash 1)$. Тогда существует базис из классов смежности для голоморфных дифференциалов Прима $f_0\zeta_1,\dots,f_0\zeta_{g-1}$ на $F_\mu$ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu];\rho)\in U([\mu_0])\times U(\rho_0), z\in w^\mu(U)$. Любой элемент $\phi([\mu],\rho;z)\,dz\in\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))/\langle df_0\rangle$ имеет разложение

$$\langle\phi([\mu],\rho;z)\,dz\rangle=\sum_{j=1}^{g-1}\lambda_j([\mu],\rho)\langle f_0\zeta_j\rangle.$$

В карте $\Theta([\mu_0],\rho_0)$ он имеет послойные координаты $(\lambda_1([\mu],\rho),\dots,\lambda_{g-1}([\mu],\rho))$.

Элемент $[\phi([\mu];\rho)]=p(\phi([\mu],\rho;z)\,dz)\in H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ в карте $\Theta\bigl(U_g;\{A_j,B_j\}_{j=1}^g\bigr)$ над $\mathbf{T}_g(F)\times U_g$ имеет послойные координаты

$$\xi_j^g=\tilde{\phi}^g\bigl(\bigl[A_j^\mu,A_g^\mu\bigr]\bigr)=\int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu,A_g^\mu]z_0}\phi([\mu],\rho;z)\;dz,$$

$$\eta_j^g=\tilde{\phi}^g\bigl(\bigl[B_j^\mu,A_g^\mu\bigr]\bigr)=\int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu,A_g^\mu]z_0}\phi([\mu],\rho;z)\;dz,\quad j=1,\dots,g-1,$$

где $\tilde{\phi}^g\in Z^1(\Gamma_\mu,\rho)$ — любой представитель класса периодов $[\phi([\mu],\rho)]$ при $[\mu]\in U([\mu_0])$, $\rho\in U_g$. Следовательно, вектор-столбец $\bigl(\xi_1^g,\dots,\xi_{g-1}^g,\eta_1^g,\dots,\eta_{g-1}^g\bigr)$ получается как действие слева матрицы $A([\mu],\rho)$ на вектор-столбец

$$(\lambda_1([\mu],\rho),\dots,\lambda_{g-1}([\mu],\rho)).$$

Здесь $j$-я строка матрицы $A([\mu],\rho)$ есть

$$\big(\tilde{\phi}_1^g([\mu],\rho)\big(\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\tilde{\phi}_{g-1}^g([\mu],\rho)\big(\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]\big)\big)$$

и $(g+j-1)$-я строка есть

$$\big(\tilde{\phi}_1^g([\mu],\rho)\big(\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\tilde{\phi}_{g-1}^g([\mu],\rho)\big(\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]\big)\big),\quad j=1,\dots,g-1.$$

Эта матрица порядка $(g-1)\times(2g-2)$ состоит из элементов, голоморфно зависящих от $([\mu],\rho)\in U([\mu_0])\times U(\rho_0)$, где

$$\tilde{\phi}_k^g([\mu],\rho)\big[A_j^\mu,A_g^\mu\big]=\int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu,A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k,$$

$$\tilde{\phi}_k^g([\mu],\rho)\big[B_j^\mu,A_g^\mu\big]=\int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu,A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k,\quad k=1,\dots,g-1.$$

Аналогично получаются голоморфные матрицы для отображения $p$ в остальных случаях, когда $U(\rho_0)\subset U_l$, $l=1,2,3,\dots,2g$ [5]. Для доказательства этого нужно только рассматривать коммутаторы вида

$$[A_1,A_l],\dots,\widehat{,}\dots,[A_g,A_l],\quad [B_1,A_l],\dots,\widehat{,}\dots,[B_g,A_l].$$

Здесь символ $\widehat{\ }$ обозначает пропуск $l$-го элемента в обоих строках, если $l=2,3,\dots,g$. Для $l=g+1,g+2,\dots,2g$ нужно заменить $A_l$ на $B_l$ на вторых местах коммутаторов в этих строках.

Следовательно, $p$ будет голоморфным отображением относительно структур на $\mathbf{P}_{1,0}$ и на $G$ над $\mathbf{T}_g(F)\times(L_g\backslash 1)$.

Докажем, что на фактор-расслоении $G/\mathbf{P}_{1,0}\equiv G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ можно задать структуру голоморфного векторного расслоения, относительно которой естественное отображение $h:G\to G/\mathbf{P}_{1,0}$ голоморфно. Сначала покажем, что $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением в голоморфном векторном расслоении $G$. Снова достаточно рассмотреть случай, когда $U(\rho_0)\subset U_g$. Над достаточно малой окрестностью $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ выберем фиксированный базис $\phi_1(z)\,dz=f_0\zeta_1,\dots,\phi_{g-1}(z)\,dz=f_0\zeta_{g-1}$ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu],\rho)$. В карте $\Theta([\mu_0],\rho_0)$ он имеет послойные координаты

$$(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\in\mathbf{C}^{g-1}$$

соответственно. Голоморфное инъективное $\mathbf{C}$-линейное отображение $p$ этот базис переводит в линейно независимую над $\mathbf{C}$ систему $\{p(\phi_j(z)\,dz)\}_{j=1}^{g-1}$ сечений расслоения $G$, также голоморфно зависящую от $([\mu],\rho)\in U([\mu_0])\times U(\rho_0)$. В карте $\Theta\big(U_g;\{A_j,B_j\}_{j=1}^g\big)$ сечение $p(\phi_1(z)\,dz)$ имеет координаты

$$\begin{aligned}(\xi_1,\dots,\xi_{g-1},\eta_1,\dots,\eta_{g-1})&=(1,0,\dots,0)A^T([\mu],\rho)\\&=\big(\tilde{\phi}_1^g\big[A_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde{\phi}_1^g\big[A_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big],\tilde{\phi}_1^g\big[B_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde{\phi}_1^g\big[B_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big]\big),\dots,\end{aligned}$$

сечение $p(\phi_{g-1}(z)\,dz)$ — координаты $\big(\tilde{\phi}_{g-1}^g\big[A_1^\mu,A_g^\mu\big],\dots,\tilde{\phi}_{g-1}^g\big[B_{g-1}^\mu,A_g^\mu\big]\big)$. Составим матрицу размера $(g-1)\times(2g-2)$ из этих строк. Она имеет ровно

$g-1$ линейно независимых строк и столько же независимых столбцов. Рассмотрим эту матрицу при фиксированных $([\mu_0],\rho_0)$. Существует биголоморфный автоморфизм $\alpha$ для $\mathbf{C}^{2g-2}$, переставляющий координаты, такой, что после его естественного действия на столбцы этой матрицы она будет иметь вид $(C_1([\mu_0],\rho_0);C_2([\mu_0],\rho_0))$, где $\det C_1([\mu_0],\rho_0)\neq 0$. В достаточно малой окрестности (обозначим ее так же) $U([\mu_0])\times U(\rho_0)$ имеем $\det C_1([\mu],\rho)\neq 0$. Строки полученной матрицы дают набор линейно независимых сечений в тривиальном расслоении $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$, голоморфно зависящих от $([\mu],\rho)$, и порождают для фиксированной точки $([\mu],\rho)$ $(g-1)$-мерное подпространство в $\mathbf{C}^{2g-2}$. Дополним этот набор базисными векторами $e_g,\dots,e_{2g-2}$ (постоянными сечениями) до базиса сечений в $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$. Получаем квадратную матрицу порядка $2g-2$ вида $\begin{pmatrix} C_1 & C_2\\ O & I\end{pmatrix}$, где $I$ — единичная матрица порядка $g-1$. Биголоморфный автоморфизм $\beta$ этого произведения, который при фиксированных $([\mu],\rho)$ имеет матрицу преобразования вида $\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2\\ O & I\end{pmatrix}$, переводит указанный базис сечений в стандартный базис сечений $e_1,\dots,e_{2g-2}$ для $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2}$. Поэтому в новой карте $\beta\,\alpha\,\Theta\big(U_g,\{A_j,B_j\}_{j=1}^{g}\big)=\Psi$ (той же структуры голоморфного векторного расслоения) набор голоморфных сечений $p(\phi_1(z)\,dz),\dots,p(\phi_{g-1}(z)\,dz)$ имеет вид $([\mu],\rho,e_1)$, …, $([\mu],\rho,e_{g-1})$. Следовательно, получаем послойный изоморфизм

$$\Psi: p(\mathbf{P}_{1,0})|_{U([\mu_0])\times U(\rho_0)}\to U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times(\mathbf{C}^{g-1};0)\subset U([\mu_0])\times U(\rho_0)\times \mathbf{C}^{2g-2},$$

а значит, $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением ранга $g-1$ в $G$.

В картах $\Psi_k$ и $\Psi_l$ (над $U_k$ и $U_l$ соответственно) $k,l=1,\dots,2g$, $k\neq l$, матрица перехода $T_{0,1;k,l}([\mu],\rho)$ для $G$ имеет вид $\begin{pmatrix} A & B\\ O & D\end{pmatrix}$, так как этот оператор переводит векторы $e_1,\dots,e_{g-1}$ в векторы $e_1,\dots,e_{g-1}$ соответственно. Здесь матрицы $A=A([\mu],\rho)=I$, $B=B([\mu],\rho)$, $D=D([\mu],\rho)$ порядка $g-1$ голоморфно зависят от $([\mu],\rho)\in(U([\mu_0])\cap U([\mu_1]))\times(U_k\cap U_l\cap U(\rho_0))$. При этом $A([\mu],\rho)$ и $D([\mu],\rho)$ являются матрицами перехода для $p(\mathbf{P}_{1,0})$ и $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ соответственно [3, 5]. Поэтому $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ — голоморфное векторное расслоение ранга $g-1$ со слоем $H^1(\Gamma^\mu,\rho)/(p(\mathbf{P}_{1,0})|_{([\mu],\rho)})$ над точкой $([\mu],\rho)$. Отображение $h:[\phi([\mu],\rho)]\to[\phi([\mu],\rho)]+p(\mathbf{P}_{1,0})|_{([\mu],\rho)}$ в таких картах $\Psi$ будет иметь вид

$$([\mu],\rho;\xi_1,\dots,\xi_{g-1};\eta_1,\dots,\eta_{g-1})\to([\mu],\rho;0,\dots,0;\eta_1,\dots,\eta_{g-1}).$$

Следовательно, отображение $h$ голоморфно, относительно заданных структур голоморфных векторных расслоений на $G$ и на $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$. Теорема доказана.

Обозначим через

$$\mathbf{HP}=\bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$$
$$=\bigcup_{[\mu],\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))=\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}\oplus\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

гармоническое расслоение Прима над $\mathbf{T}_g\times((L_g\cup\overline{L_g})\setminus 1)$, где $\overline{L_g}$ — образ группы $L_g$ при отображении комплексного сопряжения $(\rho\to\bar\rho)$. Это расслоение имеет слои, являющиеся прямой суммой двух векторных пространств размерности $g$.

**Теорема 2.3.** *Эрмитово голоморфное векторное расслоение* $\mathbf{HP}$ *ранга* $2g$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных* $*$*-инвариантных векторных подрасслоений* $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}$ *и* $\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ *ранга* $g$ *над* $\mathbf{T}_g \times ((L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1)$ *при любом* $g \geq 2$.

Доказательство. Выберем базис

$$f_0([\mu],\rho)\zeta_1([\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\mu],\rho)\zeta_g([\mu],z)\,dz$$

дифференциалов Прима для слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, который голоморфно зависит от $[\mu]$ и $\rho$ в достаточно малых окрестностях $U([\mu_0])\times U(\rho_0)\subset \mathbf{T}_g\times((L_g\cup\overline{L_g})\backslash 1)$. Одновременно выберем базис

$$f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_1([\bar\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_g([\bar\mu],z)\,dz,$$

голоморфно зависящий от $[\bar\mu]$ и $\bar\rho$ в достаточно малых окрестностях $U([\bar\mu_0])\times U(\bar\rho_0)$. Здесь $\overline{U(\rho_0)}$ — образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho\to\bar\rho$. Это отображение будет автоморфизмом на $L_g\cup\overline{L_g}$. Класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1,c_2,\dots,c_{3g-3})\in\mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ — модули $(\overline{c_1},\overline{c_2},\dots,\overline{c_{3g-3}})\in\mathbf{C}^{3g-3}$.

Тогда набор гармонических дифференциалов

$$\begin{gathered}f_0([\mu],\rho)\zeta_1([\mu],z)\,dz,\dots,f_0([\mu],\rho)\zeta_g([\mu],z)\,dz,\\ \overline{f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_1([\bar\mu],z)\,dz},\dots,\overline{f_0([\bar\mu],\bar\rho)\zeta_g([\bar\mu],z)\,dz}\end{gathered}$$

будет базисом в $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$, голоморфно зависящим от $[\mu]$ и $\rho$ в достаточно малых окрестностях $U(\mu_0)\times U(\rho_0)$. Таким образом, на комплексном векторном расслоении

$$\mathbf{HP}=\bigcup_{\mu\in\mathbf{T}_g,\rho\in(L_g\cup\overline{L_g})\backslash 1}\Gamma(F,\mathscr{H}^1(\rho))=\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}\oplus\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

ранга $2g$ над $\mathbf{T}_g\times(L_g\cup\overline{L_g})\backslash 1$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$ определено по формуле

$$(\phi_1,\phi_2)=i\iint\limits_{\Delta_\mu}(u_1\overline{u_2}+v_1\overline{v_2})\,dz\wedge\,d\bar z,$$

где $\Delta_\mu=w^{s[\mu]}(\Delta)$, $s[\mu]$ — глобальное вещественно аналитическое сечение Эрла над $\mathbf{T}_g$ [4], $w^{s[\mu]}$ — (нормированное в трех точках) квазиконформное отображение на $\mathbf{C}$, которое имеет характеристику нуль на дополнении к кругу, и $\Delta$ — фиксированная фундаментальная область для $\Gamma$ в $U$; $\phi_j=u_j(z)\,dz+v_j(z)\,d\bar z$, $j=1,2$. Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1,\phi_2)=\overline{(\phi_2,\phi_1)}$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$-линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как если

$$\phi_1=u(z)\,dz\in\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho)),\quad \phi_2=v(z)d\bar z\in\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho)),$$

то

$$(\phi_1,\phi_2)=\iint\limits_{\Delta}u\,dz\wedge*\overline{v(z)\,d\bar z}=0.$$

Векторные расслоения $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0},\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g\times(L_g\cup\overline{L_g})\backslash 1$. Теорема доказана.

## § 3. Гармонические дифференциалы Прима для нормированных характеров

Первая группа $H^1_{DR}(F_\mu,\rho)$ когомологий де Рама на $F_\mu$ для $\rho$ определяется как фактор-пространство пространства $\Lambda^1(F_\mu,\rho)$ (всех замкнутых дифференциалов Прима на $F_\mu$ класса $C^\infty$ для $\rho$) по подпространству $dC^\infty(F_\mu,\rho)$ (образ пространства $C^\infty(F_\mu,\rho)$, которое состоит из всех мультипликативных функций на $F_\mu$ класса $C^\infty$ для $\rho$, по оператору дифференцирования $d$). Обозначим через $[S^1]^{2g}$ подгруппу, состоящую из нормированных характеров, в группе $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{C}^*)$. По лемме 3.2.2 в [5] для любого $\rho\in[S^1]^{2g}$ отображение периодов $p:\Lambda^1(F_\mu,\rho)/dC^\infty(F_\mu,\rho)\to H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ корректно определено и инъективно. Из теоремы 3.2.4 в [5] для $\rho\in[S^1]^{2g}$ следует, что естественное отображение $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))\to H^1_{DR}(F_\mu,\rho)$, которое сопоставляет гармоническому дифференциалу Прима $\phi$ для $\rho$ его класс когомологий $\{\phi+dC^\infty(F_\mu,\rho)\}$, инъективно. Составим цепь инъективных $\mathbf{C}$-линейных отображений: $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))\to H^1_{DR}(F_\mu,\rho)\overrightarrow{p}H^1(\Gamma_\mu,\rho)$. Для $\rho\in[S^1]^{2g}$ комплексные векторные пространства на концах этой цепи имеют одинаковые размерности $2g-2$ при $\rho\neq1$ и $2g$ при $\rho=1$. Отсюда получаем

**Предложение 3.1** (аналоги теорем де Рама и Ходжа). *Для $\rho\in[S^1]^{2g}$ верно $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))\cong H^1_{DR}(F_\mu,\rho)\cong H^1(\Gamma_\mu,\rho)$, и для любого замкнутого дифференциала Прима $\phi$ на $F_\mu$ класса $C^\infty$ для $\rho$ существует единственное разложение Ходжа $\phi=\phi_0+df(z)$, где $\phi_0\in\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho)), f(z)\in C^\infty(F_\mu,\rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi]\in H^1(\Gamma_\mu,\rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима $\phi$ на $F_\mu$ класса $C^\infty$ для $\rho$ такой, что $[\phi]=[\psi]$ в $H^1(\Gamma_\mu,\rho)$.*

Аналог теоремы Ходжа получен Джеблоу в [7] с использованием сложной техники аналитических линейных расслоений только на фиксированной компактной римановой поверхности. Аналог теоремы де Рама установлен ранее Ганнингом в [8] с использованием когомологий с коэффициентами в пучках на фиксированной поверхности $F$. Наше доказательство не требует такой сложной техники.

**Следствие 3.1.** *Гармоническое расслоение Прима $\mathbf{H}P$ вещественно-аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g\times[S^1]^{2g}\cap U_j$ для любого $j=1,\dots,2g$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для $\rho\in U_1=\{\rho:\rho(A_1)\neq1\}$. Имеем отображения $\phi\overrightarrow{p}[\phi]\to(\phi(A_2),\dots,\phi(A_g),\phi(B_2),\dots,\phi(B_g))$. Первое отображение $p$ инъективно по теореме 3.2.4 в [5] над $\mathbf{T}_g\times[S^1]^{2g}$. Второе будет инъективно ввиду того, что $\phi(A_1)=0$ и

$$\phi(B_1)=\frac{1}{\sigma(A_1)}\sum_{j=2}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j)-\sigma(A_j)\phi(B_j)]$$

над $U_1$. При этом оба отображения вещественно-аналитически зависят от $([\mu],\rho)\in\mathbf{T}_g\times([S^1]^{2g}\cap U_1)$. Таким образом, $\mathbf{H}P\cong\mathbf{T}_g\times([S^1]^{2g}\cap U_1)\times\mathbf{C}^{2g-2}$. Следствие доказано.

**Теорема 3.1.** *Для любого $[\mu_0]\in\mathbf{T}_g,\rho_0\in[S^1]^{2g}\backslash1$ существуют окрестности $U([\mu_0]),U(\rho_0)\subset\{[S^1]^{2g}\backslash1\}$ такие, что для $\rho\in U(\rho_0)\cap U_1$ в $\Gamma(F_\mu,\mathscr{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима*

$$\phi_1=\phi_1([\mu],\rho;z),\dots,\phi_{2g-2}=\phi_{2g-2}([\mu],\rho;z),$$

*вещественно-аналитически зависящий от* $[\mu]$ *и* $\rho$ *и имеющий матрицу периодов относительно* $A_2, \dots, A_g, B_2, \dots, B_g$ *вида* $I_{2g-2}$ *(единичная матрица порядка* $2g-2$*).*

Доказательство. Над $U(\mu_0) \times U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима

$$\tilde{\phi}_1([\mu], \rho; z)\, dz, \dots, \tilde{\phi}_{g-1}([\mu], \rho; z)\, dz, \overline{\tilde{\phi}_1([\bar{\mu}], \bar{\rho}; z)\, dz}, \dots, \overline{\tilde{\phi}_{g-1}([\bar{\mu}], \bar{\rho}; z)\, dz}$$

на $F_\mu$ для $\rho$, вещественно-аналитически зависящий от $\rho$ [5, теорема 3.1.5]. Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов относительно $A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g$ для этого базиса, где $A = (a_{mk})$, $B = (b_{ml})$, $C = (c_{mk})$, $D = (d_{ml})$, $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, $l = 1, 2, \dots, g$, так как для $\rho \in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на $A_1$ будет 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbf{C}$ для $2g-2$ строк, то существует гармонический дифференциал Прима с нулевыми базисными периодами и по теореме 3.2.4 в [5] он тождественно равен нулю, а это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$. Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix} = M$, где $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ строк, и ее определитель не равен нулю. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$ с матрицей $M^{-1}$, получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима на $F_\mu$. Теорема доказана.

## § 4. Голоморфные дифференциалы Прима для существенных характеров

**Теорема 4.1.** *Дифференциал Прима* $\phi \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ *для существенного характера* $\rho \in U_1$ *и* $[\mu] \in U(\mu_0)$ *единственно определяется «половиной» своих базисных периодов* $\phi(N_{j_1}), \dots, \phi(N_{j_{g-1}})$, *где* $\phi(A_1) = 0$,

$$\{N_1, \dots, N_g, N_{g+1}, \dots, N_{2g}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g\}$$

*и* $\{j_1, \dots, j_{g-1}\}$ *— подмножество из* $g-1$ *элементов в* $\{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$, *зависящее от выбора базиса в* $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$.

Доказательство. Известно [3, 5], что голоморфный дифференциал Прима $\phi$ на $F_\mu$ для существенного характера $\rho$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi]$, а класс $[\phi]$ при $\rho \in U_1$ единственно задается через свои базисные периоды $\phi(A_1) = 0$, $\phi(A_2), \dots, \phi(A_g), \phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$. Выясним, какое минимальное число базисных периодов надо задать, чтобы полностью определить дифференциал Прима $\phi$.

Пусть $\phi$ — голоморфный дифференциал Прима на $F_\mu$ для существенного характера $\rho, \rho \in U_1$. Выберем базис голоморфных дифференциалов Прима $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ на $F_\mu$ для характера $\rho^{-1} \in U_1$. Тогда классические базисные периоды $\phi_{z_0}(A_1), \dots, \phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1), \dots, \phi_{z_0}(B_g)$ связаны системой уравнений

$$0 = \iint\limits_{\Delta} \phi_m \wedge \phi, \quad m = 1, \dots, g-1,$$

$$\sum_{j=1}^{g} [\sigma(B_j)\phi_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\phi_{z_0}(B_j)] = 0.$$

По теореме 3.2.3 в [5] первые $g-1$ уравнений можно записать в виде системы из $g-1$ линейных уравнений с $2g$ неизвестными $\phi_{z_0}(A_1),\ldots,\phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1),\ldots,$ $\phi_{z_0}(B_g)$:

$$\sum_{j=1}^{g}\{[\phi_m(C_1\ldots C_{j-1})(1-\rho(B_j))-\rho(B_j)(\phi_m(C_j)+\phi_m(B_j))]\phi_{z_0}(A_j)$$
$$+[(\rho(A_j)-1)\phi_m(C_1\ldots C_{j-1})+\rho(A_j)\phi_m(A_j)-\phi_m(C_j)]\phi_{z_0}(B_j)\}=0, \quad (*)$$

$m=1,\ldots,g-1$.

Если $\phi_{z_0}(A_1)\neq 0$, то выберем другую базисную точку $z_1$ с условием $\phi_{z_1}(A_1)$ $=0$, где $\frac{1}{\sigma(A_1)}\phi_{z_0}(A_1)+f(z_0)=f(z_1)$, $\phi=df(z)$ на $U$. Зафиксировав $z_1$, для каждого $m=1,\ldots,g-1$, отдельно выберем интеграл Прима $f_m(z)$ для $\phi_m$ с условием $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)=0$. Так, если $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)\neq 0$, то заменим $f_m(z)$ на $f_m(z)+c_m$ с условием

$$c_m=-\frac{1}{\sigma(A_1)}(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1).$$

В дальнейшем для краткости записи будем опускать индексы $f_m$ и $z_1$ у периодов.

После этого выбора предыдущая система $(*)$ будет иметь матрицу вида $(a_{mk};b_{ml})$, где

$$a_{mk}=[\phi_m(C_1\ldots C_{k-1})(1-\rho(B_k))-\rho(B_k)(\phi_m(C_k)+\phi_m(B_k))],$$
$$b_{ml}=[\phi_m(C_1\ldots C_{l-1})(\rho(A_l)-1)+\rho(A_l)\phi_m(A_l)-\phi_m(C_l)],$$

$k=2,\ldots,g$, $l=1,\ldots,g$, $m=1,\ldots,g-1$. Покажем, что ранг этой матрицы равен $g-1$. Действительно, пусть ранг строго меньше чем $g-1$. Тогда существует линейная комбинация из строк этой матрицы, равная нулю. Из этого получаем систему уравнений для голоморфного дифференциала Прима $\tilde{\phi}$ для $\rho^{-1}$ с классом периодов $[\tilde{\phi}]$ на $F_\mu$:

$$\tilde{\phi}(C_1)\sigma(B_2)-\rho(B_2)(\tilde{\phi}(C_2)+\tilde{\phi}(B_2))=0,$$
$$\tilde{\phi}(C_1C_2)\sigma(B_3)-\rho(B_3)(\tilde{\phi}(C_3)+\tilde{\phi}(B_3))=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tilde{\phi}(C_1\ldots C_{g-1})\sigma(B_g)-\rho(B_g)(\tilde{\phi}(C_g)+\tilde{\phi}(B_g))=0,$$
$$-\tilde{\phi}(1)\sigma(A_1)+\rho(A_1)\tilde{\phi}(A_1)-\tilde{\phi}(C_1)=0,$$
$$-\tilde{\phi}(C_1)\sigma(A_2)+\rho(A_2)\tilde{\phi}(A_2)-\tilde{\phi}(C_2)=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\tilde{\phi}(C_1\ldots C_{g-1})\sigma(A_g)+\rho(A_g)\tilde{\phi}(A_g)-\tilde{\phi}(C_g)=0.$$

Учитывая, что $\tilde{\phi}(1)=0,\sigma(A_1)\neq 0,\tilde{\phi}(A_1)=0$, из $g$-го уравнения получим $\tilde{\phi}(C_1)=0$ и $\tilde{\phi}(B_1)=0$. Из первого и $(g+1)$-го уравнения выводится, что

$$-\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\tilde{\phi}(A_2)+\tilde{\phi}(B_2)\frac{1}{\rho(A_2)}=0,$$

$$\left(\rho(A_2)+\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\right)\tilde{\phi}(A_2)-\frac{\sigma(A_2)}{\rho(A_2)}\tilde{\phi}(B_2)=0.$$

Отсюда $\tilde{\phi}(A_2) = 0 = \tilde{\phi}(B_2)$. Затем из $(m-1)$-го и $(g+m-1)$-го уравнения получаем систему

$$\tilde{\phi}(C_m) = -\tilde{\phi}(B_m), \quad \rho(A_m)\tilde{\phi}(A_m) - \tilde{\phi}(C_m) = 0$$

или систему

$$-\frac{\sigma(B_m)}{\rho(B_m)}\tilde{\phi}(A_m) + \tilde{\phi}(B_m)\left(1 + \frac{\sigma(A_m)}{\rho(A_m)}\right) = 0, \quad \rho(A_m)\tilde{\phi}(A_m) + \tilde{\phi}(B_m) = 0.$$

Таким образом, $\tilde{\phi}(A_m) = 0 = \tilde{\phi}(B_m)$ для $m = 3, 4, \dots, g$. Следовательно, голоморфный дифференциал Прима $\tilde{\phi}(z)$ для $\rho^{-1}$ будет иметь класс периодов $[\tilde{\phi}] = 0$. Поэтому $\tilde{\phi} = 0$ на $\Delta_\mu$, но это противоречит линейной независимости дифференциалов Прима $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ для $\rho^{-1}$ на $F_\mu$.

По теореме о ранге матрицы существуют точно $g-1$ линейно независимых столбцов матрицы системы $(*)$. Выполняя элементарные преобразования над всеми столбцами, кроме $g$-столбца, получаем, что эта матрица эквивалентна матрице Прима из базисных периодов для базиса $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$: $(\phi_m(A_k); \phi_m(B_l))$, где $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, \dots, g$, $l = 1, \dots, g$. В матрице Прима столбец $(\phi_1(B_1), \dots, \phi_{g-1}(B_1))'$ является линейной комбинацией остальных столбцов. Введем обозначения:

$$\{N_1, \dots, N_g, N_{g+1}, \dots, N_{2g}\} = \{A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g\}$$

(это равенство упорядоченных наборов). Существует ровно $g-1$ индексов $i_1, \dots, i_{g-1}$ из $\{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$, которые соответствуют линейно независимым столбцам матрицы для системы $(*)$. Тогда, положив $\phi(N_j) = 0$ для всех $j \notin \{i_1, \dots, i_{g-1}\}$, $j \in \{2, 3, \dots, g, g+1, g+2, \dots, 2g\}$, из системы $(*)$ получим однородную систему из $g-1$ уравнений с неизвестными $\phi(N_{i_1}), \dots, \phi(N_{i_{g-1}})$ и определителем, не равным 0. Отсюда следует, что все $\phi(N_{i_1}), \dots, \phi(N_{i_{g-1}})$ тоже равны нулю. Поэтому при этих условиях $[\phi] = 0$ и $\phi$ для $\rho$ тождественно равен нулю на $F_\mu$.

Рассмотрим систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots\dots\dots a_{1g}b_{11}\dots\dots\dots\dots\dots b_{1g} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{g-1,1}a_{g-1,2}\dots a_{g-1,g}b_{g-1,1}\dots b_{g-1,g} \\ \sigma(B_1)\sigma(B_2)\dots\sigma(B_g) - \sigma(A_1)\dots - \sigma(A_g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(A_1) \\ \dots \\ \phi(A_g) \\ \phi(B_1) \\ \dots \\ \phi(B_g) \end{pmatrix} = 0.$$

Взяв подходящую линейную комбинацию первого и $(g+1)$-го столбцов, получим вместо $(g+1)$-го столбца новый столбец, у которого все элементы равны нулю, кроме последнего. Этот последний элемент будет иметь вид

$$\frac{-\sigma(B_1)\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} - \sigma(A_1) = \frac{-\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} = m_1 \neq 0$$

при $\rho \in U_1$ и $[\mu] \in U([\mu_0])$. Уже доказано, что ранг матрицы $(a_{mk}; b_{ml})$, где $m = 1, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$, $l = 1, 2, \dots, g$, равен $g-1$, а значит, она имеет ровно $g-1$ линейно независимых столбцов. Перестановкой столбцов расширенной матрицы поставим эти линейно независимые столбцы с номерами $i_1, \dots, i_{g-1} \subset \{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$ на место $2, 3, \dots, g$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} n_{1,i_1}\dots\dots\dots\dots n_{1,i_{g-1}} & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 \\ n_{g-1,i_1}\dots\dots\dots\dots n_{g-1,i_{g-1}} & 0 \\ *\dots\dots\dots\dots\dots\dots * & m_1 \end{pmatrix},$$

где, например, $\{a_{11}, \dots, a_{1g}, b_{11}, \dots, b_{1g}\} = \{n_{11}, \dots, n_{1,2g}\}$, имеет определитель не равный нулю при $\rho, \rho \in U_1$ и $[\mu] \in U([\mu_0])$. Поскольку $\phi(A_1) = 0$, взяв $\phi(N_j) = 0$, $j \in \{2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g\}$, $j \notin \{i_1, \dots, i_{g-1}\}$, получим, что $\phi(N_{i_k}) = 0$, $k = 1, \dots, g-1$. Поэтому $[\phi] = 0$, а значит, и $\phi = 0$ на $\Delta_\mu$. Теорема доказана.

Напомним, что в теореме 3.1.3 из [5] для базиса $\phi_1, \dots, \phi_{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$ при $\rho \in U_1 \backslash L_g$ и $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ исследовалась матрица из коммутаторных периодов

$$(\phi_m([A_k, A_1]); \phi_m([B_k, A_1])) = \sigma(A_1)(\phi_m(A_k); \phi_m(B_k)),$$

$\sigma(A_1) \neq 0$, где $m = 1, 2, \dots, g-1$, $k = 2, 3, \dots, g$. Последняя матрица имеет ранг $g-1$, и, переставляя линейно независимые столбцы с номерами $i_1, \dots, i_{g-1}$ на левую половину этой матрицы, получим эквивалентную матрицу $(\phi_m(N_{i_k}))$, $m = 1, 2, \dots, g-1$, $k = 1, 2, \dots, 2g-2$. Здесь $i_1, \dots, i_{2g-2}$ — перестановка символов $2, 3, \dots, g, g+2, g+3, \dots, 2g$. Обозначим эту матрицу через $(M_1, M_2)$, $\det M_1 \neq 0$. Взяв новый базис

$$(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_{g-1})' = M_1^{-1}(\phi_1, \dots, \phi_{g-1})',$$

где штрих означает транспонирование, получим так называемый канонический базис голоморфных дифференциалов Прима, который имеет матрицу периодов вида $\left(I_{g-1}, M_1^{-1}M_2\right)$, относительно некоторой перестановки для $a_2, \dots, a_g$, $b_2, \dots, b_g$ на $F$. Таким образом, доказано

**Следствие 4.1.** *Для любого $\rho_0 \notin L_g$ и $\mu_0 \in \mathbf{T}_g$ существуют окрестности $U(\rho_0) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash L_g$ и $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ такие, что для $\rho \in U(\rho_0)$ и $\mu \in U([\mu_0])$ существует канонический базис голоморфных дифференциалов Прима на $F_\mu$, голоморфно зависящий от $\rho$ и $[\mu]$ при любом $g \geq 2$.*

Заметим, что последнее следствие ранее получено Ганнингом [3] для фиксированной поверхности, но его доказательство требует построения базиса голоморфных дифференциалов Прима через сложный аппарат так называемых обобщенных тэта-функций и базис голоморфно зависит только от характеров. Наше доказательство использует другой базис голоморфных дифференциалов Прима, который зависит голоморфно не только от характеров, но и от модулей компактных римановых поверхностей.

**Следствие 4.2.** *Пусть $\rho$ удовлетворяет условиям $\rho^2 = 1, \rho(A_1) = -1$ и $[\mu] \in U(\mu_0)$. Тогда столбцы в матрице $\{(a_{ij}); (b_{ij})\}_{i=1,\dots,(g-1); j=2,\dots,g}$ периодов для базиса голоморфных дифференциалов Прима на $F_\mu$ для $\rho$ из следствия 4.1 $\mathbf{R}$-линейно независимы.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что эта матрица, представленная как набор столбцов $(\pi_1, \dots, \pi_{2g-2})$, имеет $\mathbf{R}$-линейно зависимые столбцы, т. е. существуют $x_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, 2g-2$ (не все нули), и $x_1\pi_1 + \dots + x_{2g-2}\pi_{2g-2} = 0$, где $\pi_j = \pi_j([\mu], \rho)$. Из-за выбора специального базиса в $\Gamma(F_\mu, \mathscr{H}^1(\rho))$ имеем

$$x_1\overline{\pi_1(\overline{[\mu]}, \bar{\rho})} + \dots + x_{2g-2}\overline{\pi_{2g-2}(\overline{[\mu]}, \bar{\rho})} = 0.$$

Образуем квадратную матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\pi_1([\mu], \rho) \dots \pi_{2g-2}([\mu], \rho)}{\pi_1(\overline{[\mu]}, \bar{\rho}) \dots \pi_{2g-2}(\overline{[\mu]}, \bar{\rho})} \end{pmatrix} = M$$

порядка $2g-2$. Из предыдущих двух равенств следует, что существует линейная комбинация из $2g-2$ столбцов с вещественными коэффициентами $x_j$, $j=1,\dots,2g-2$, которая равна 0. Следовательно, ранг $M$ меньше чем $2g-2$. Поэтому существуют комплексные числа $(z_1,\dots,z_{g-1},w_1,\dots,w_{g-1})$ (не все нули) такие, что существует линейная комбинация из $2g-2$ строк с этими коэффициентами, равная нулю, т. е.

$$\int\limits_{N_i}\left(\sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j([\mu],\rho;z)\,dz+\sum_{j=1}^{g-1} w_j\overline{\phi_j(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz}\right)=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Положив

$$\varphi=\sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j([\mu],\rho;z)\,dz,\quad \psi=\sum_{j=1}^{g-1}\overline{w_j}\phi_j(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz,$$

получаем равенства

$$\int\limits_{N_i}\varphi+\overline{\psi}=0,\quad i=1,\dots,2g.$$

Поэтому из леммы 3.2.2 в [5] следует, что $\varphi+\overline{\psi}=df$, $f\in C^\infty(F_\mu,\rho)$. По теореме 3.2.4 из [5] имеем $\varphi=0=\psi$ на $F$. Но это противоречит либо $\mathbf{C}$-линейной независимости $\phi_1([\mu],\rho;z)\,dz,\dots,\ \phi_{g-1}([\mu],\rho;z)\,dz$, либо $\mathbf{C}$-линейной независимости

$$\overline{\phi_1(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz},\dots,\ \overline{\phi_{g-1}(\overline{[\mu]},\bar\rho;z)\,dz}.$$

Следствие доказано.

Для таких $\rho$ (связанных со спинорными структурами см. также пример [2, с. 350]) получается, что столбцы $\pi_1,\dots,\pi_{2g-2}$ задают целочисленную решетку $\widetilde{L}$ максимального ранга в $\mathbf{C}^{g-1}$ и $\mathbf{C}^{g-1}/\widetilde{L}$ — комплексный тор размерности $g-1$. Его естественно называть *многообразием Якоби — Прима* для $F_\mu$.

Замечание 4.1. Пространство Торелли $\Upsilon_g$ определяется как фактор-пространство $\mathbf{T}_g(F)/\tau_g$, где группа Торелли $\tau_g$ — нормальная подгруппа в модулярной группе Тейхмюллера $\operatorname{Mod}\mathbf{T}_g$, состоящая из элементов, тождественно действующих на первой группе гомологий $H_1(F_\mu,\mathbf{Z})$ поверхности $F_\mu$ [3]. Так как группа $\tau_g$ действует свободно на $\mathbf{T}_g(F)$, т. е. без неподвижных точек, определено естественное неразветвленное голоморфное накрытие $\mathbf{T}_g(F)\to\Upsilon_g$ [1, 3]. Группа преобразований наложения этого накрытия естественно действует как группа биголоморфных автоморфизмов пространства

$$\mathbf{T}_g(F)\times(\operatorname{Hom}(H_1(F,\mathbf{Z}),\mathbf{C}^*)\backslash 1)$$

(тождественно на втором сомножителе).

Поэтому все предыдущие теоремы остаются верными для естественно определенных над $\Upsilon_g\times(L_g\cup\overline{L_g}\backslash 1)$ $(\Upsilon_g\times([S^1]^{2g}\backslash 1)$ расслоений Прима и Ганнинга, так как

$$\operatorname{Hom}(\Gamma_\mu,\mathbf{C}^*)\cong\operatorname{Hom}(\Gamma_\mu/[\Gamma_\mu,\Gamma_\mu],\mathbf{C}^*)=\operatorname{Hom}(H_1(F_\mu,\mathbf{Z}),\mathbf{C}^*).$$

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Альфорс Л. В., Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

**2.** *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; V. 71).

**3.** *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153–171.

**4.** *Earle C. J.* Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties // Ann. Math. 1978. V. 107. P. 255–286.

**5.** *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2.

**6.** *Пушкарева Т. А., Чуешев В. В.* Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на компактной римановой поверхности // Вестн. КемГУ. 2011. № 3/1. С. 211–216.

**7.** *Jablow E.* An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials // Israel J. Math. 1989. V. 65, N 3. P. 323–355.

**8.** *Gunning R. C.* Riemann surfaces and generalized theta functions. Berlin: Springer-Verl., 1976 (Ergebnisse Math.; Bd. 91).

*Статья поступила 27 июля 2013 г.*

Пушкарева Татьяна Алексеевна
Горно-Алтайский гос. университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
pushkareva.tanya@gmail.com

Чуешев Виктор Васильевич
Кемеровский гос. университет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
vvchueshev@ngs.ru, vvchueshev@mail.ru