Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 510.5

Σ–ЖЕСТКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПОРЯДКА

А. С. Морозов

Аннотация. Для произвольных наборов вещественных параметров $\bar{p}$ доказываются существование и эффективная бесконечность класса Σ-определимых над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с параметрами $\bar{p}$ линейных порядков на $\mathbb{R}$ по типу $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, для которых не существует нетривиальных Σ-определимых с параметрами $\bar{p}$ изоморфных самовложений.

Ключевые слова: сигма-определимая модель, вычислимая модель, вычислимость, сигма-определимость, допустимое множество, линейный порядок.

Мы предполагаем известными основные понятия из теории допустимых множеств (см. [1]). Понятие Σ-представимой структуры над допустимым множеством является естественным аналогом в обобщенной вычислимости для сегодня уже хорошо изученного и по-прежнему активно изучаемого понятия вычислимой модели. Оно введено Ю. Л. Ершовым [2] и впоследствии изучались многими авторами (см., например, обзор [3]). В частности, изучались вопросы существования Σ-представлений для конкретных структур, проблемы Σ-представимости одной структуры в наименьшей допустимой (наследственно-конечной) надстройке над другой, а также проблемы характеризации всех Σ-представлений для данной структуры в фиксированном допустимом множестве.

Здесь, по мнению автора, одним из наиболее интересных естественных направлений является изучение Σ-представимости структур над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, наследственно-конечной надстройке над упорядоченным полем вещественных чисел, поскольку Σ-представимость над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ можно рассматривать как возможность представить структуру в некоторой гипотетической системе программирования, допускающей точное оперирование с настоящими вещественными числами, а не их приближениями. Кроме того, вещественные числа являются одной из первых и, возможно, самой естественной структурой, на которую прежде всего имеет смысл обобщать обычную вычислимость на натуральных числах. Заметим, что в класс Σ-представимых над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ структур попадают также кольца и группы матриц, кольца многочленов над $\mathbb{R}$ и другие популярные в математике объекты. Ранее автором была доказана единственность одномерных представлений поля $\mathbb{R}$ над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ [4], непредставимость с тривиальной эквивалентностью полугруппы всех отображений на счетном множестве [5], а также получены некоторые результаты о классе Σ-представлений линейных порядков [6].

Данная работа посвящена изучению представлений над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ обычного порядка на вещественных числах, которые в каждой своей части устроены существенно по-разному, а именно так называемых Σ-*жестких представлений*, определяемых ниже.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00376) и гранта «Научные школы» НШ–860.2014.1.

Вместо сочетаний «Σ-представимость с параметрами $\bar{p}$» и «Σ-определимое с параметрами $\bar{p}$» здесь также будет удобно употреблять соответственно словосочетания «$\Sigma_{\bar{p}}$-представимость» и «$\Sigma_{\bar{p}}$-определимое» и т. п.

Определение 1. Пусть $\bar{p}$ — кортеж вещественных параметров. Линейный $\Sigma_{\bar{p}}$-представимый порядок назовем $\Sigma_{\bar{p}}$-*жестким*, если любое $\Sigma_{\bar{p}}$-вложение его в себя тождественно.

Докажем существование $\Sigma_{\bar{p}}$-жестких порядков на $\mathbb{R}$, изоморфных обычному порядку на вещественных числах, и покажем, что класс таких порядков весьма обширен и в некотором смысле необозрим: по любому эффективному перечислению таких представлений можно эффективно построить новое представление, не $\Sigma_{\bar{p}}$-вложимое ни в одно из них.

Сначала напомним необходимые определения и приведем некоторые используемые результаты.

Напомним, что в любом допустимом множестве $\mathbb{A}$ конечной сигнатуры множество формул языка этого допустимого множества может быть естественным образом отождествлено с элементами самого $\mathbb{A}$, при этом Σ-предикат $\mathrm{Sat}(\varphi, x)$, истинный тогда и только тогда, когда φ — Σ-формула, x — означивание ее свободных переменных и φ истинна на этом означивании, Σ-определим без параметров (см. [1] или [7]). Также будем употреблять вместо записи $\mathrm{Sat}(\varphi, x)$ запись $\mathrm{Sat}(\varphi(x))$.

Если $\mathfrak{A}$ — структура, $\bar{p} \in \mathfrak{A}$ и $\varphi(x, \bar{y})$ — некоторая формула, то будем использовать следующее сокращение:

$$\varphi[\mathfrak{A}, \bar{p}] = \{x \mid \mathfrak{A} \models \varphi(x, \bar{p})\}.$$

Запись $A \oplus B = C$ будет означать, что $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = C$.

Ю. Л. Ершов в [2] определил понятие Σ-определимой модели над допустимым множеством как модели, некоторая изоморфная копия которой определенным образом конструируется над этим допустимым множеством. В данной работе мы вынуждены слегка изменить и естественным образом уточнить данное понятие: нам придется существенно различать Σ-определимые модели (в отличие от оригинального определения таковыми будут только сами модели, определимые в допустимом множестве) и Σ-представимые модели, которые изоморфны таким моделям.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M}$ — алгебраическая структура. Будем говорить, что алгебраическая структура

$$\mathfrak{A} = \left\langle A; P_0^{m_0}, \dots, P_{k-1}^{m_{k-1}} \right\rangle$$

Σ-*определима* над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, если существуют конечный кортеж параметров $\bar{p} \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и последовательность Σ-формул $V(x, z)$, $E^+(x, y, z)$, $E^-(x, y, z)$, $P_0^+(x, z)$, $P_0^-(x, z), \dots, P_{k-1}^+(x, z)$, $P_{k-1}^-(x, z)$ такие, что

1) $E^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] \oplus E^-[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] = V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]^2$;

2) $P_i^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] \oplus P_i^-[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] = V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]^{m_i}$ для всех $i < k$;

3) множество $E = E^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]$ является конгруэнцией на алгебраической системе

$$\mathfrak{B}^{\bar{p}} = \langle V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]; P_0^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}], \dots, P_{k-1}^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] \rangle$$

и $\mathfrak{B}^{\bar{p}}/\mathrm{E} = \mathfrak{A}$.

Структуры, изоморфные Σ-определимым структурам, будем называть Σ-*представимыми*, а если структура $\mathfrak{A}$ изоморфна Σ-определимой структуре $\mathfrak{B}$, то будем говорить, что $\mathfrak{B}$ является Σ-*представлением для* $\mathfrak{A}$.

Как и ранее, если хотим сообщить, что в определении используются только параметры из кортежа $\bar{p}$, будем говорить о $\Sigma_{\bar{p}}$-*представимости* (или соответственно $\Sigma_{\bar{p}}$-*определимости*) структур.

Нам понадобится следующий результат о представлении Σ-определимых над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ отношений на $\mathbb{R}^n$ в виде вычислимых дизъюнкций, известный как фольклор (его можно найти, например, в [3]).

Предложение 3 (теорема о разложении). *Пусть $\varphi(\bar{x})$ — Σ-формула языка структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда существует вычислимая последовательность $\exists$–формул $(\varphi^{(i)}(\bar{x}))_{i<\omega}$ такая, что для любых $\bar{x} \in \mathfrak{M}^n$ выполнено*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \bigvee_{i<\omega} \varphi^{(i)}(\bar{x}).$$

При этом такая вычислимая последовательность формул строится равномерно по $\varphi(\bar{x})$.

Формулу $\varphi^{(i)}(\bar{x})$ будем называть *i-й компонентой разложения для $\varphi(\bar{x})$*.

В рассматриваемом в работе случае, когда структура праэлементов $\mathbb{R}$ допускает эффективную элиминацию кванторов (см., например, [8] или [9, разд. 3.3]), можем утверждать даже существование разложения, состоящего из бескванторных формул $\varphi^{(i)}$. Кроме того, ввиду элиминации кванторов в нашем случае вопрос об истинности любого предложения первого порядка с параметрами $\bar{p}$ эффективно сводится к проверке истинности некоторой бескванторной формулы от $\bar{p}$, т. е. к множеству $\mathrm{Diag}(\bar{p})$, состоящему из всех бескванторных формул, истинных на $\bar{p}$.

Изучение Σ-представимых структур обычно требует использования как теории вычислимости, так и теории моделей, а иногда и нетривиальной теории множеств. В случае, когда изучаем Σ-представимость структур в наследственно-конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ над упорядоченным полем вещественных чисел, полезными оказываются также понятие алгебраической независимости и некоторые факты из анализа.

Определение 4. Пусть $\bar{p} = p_1, \dots, p_k$ и $\bar{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ — кортежи вещественных чисел. Будем говорить, что кортеж $\bar{\alpha}$ *алгебраически независим над* $\bar{p}$, если для любого полинома

$$f(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_k]$$

из $f(\bar{\alpha}, \bar{p}) = 0$ следует $\forall \bar{x}\, (f(\bar{x}, \bar{p}) = 0)$. Если при этом кортеж состоит из единственного числа α, то будем называть это число *трансцендентным над* $\bar{p}$. В противном случае будем говорить, что α является *алгебраическим над* $\bar{p}$.

Следующая лемма может быть получена как следствие o-минимальности, но она также допускает несложное прямое доказательство.

Лемма 5 (алгебраический принцип обобщения) [4]. *Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{p})$ — бесконечная дизъюнкция формул первого порядка, верная на некотором кортеже вещественных чисел $\bar{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$, алгебраически независимом над $\bar{p}$. Тогда эта формула верна и для всех кортежей из некоторой открытой окрестности точки $\bar{\alpha}$. То же самое верно и для Σ-формул а также для обычных формул первого порядка с параметрами $\bar{p}$ и свободными переменными, содержащимися среди $\bar{x}$.*

Из этого принципа, в частности, легко следует

Предложение 6. *Если $\Phi(\bar{x}, y, \bar{z})$ — формула первого порядка и $\bar{x}_0$ — алгебраически независимый кортеж над $\bar{p}$ такой, что*

$$\exists^{=1} y \Phi(\bar{x}_0, y, \bar{p}), \tag{1}$$

то в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$ формула $\Phi(\bar{x}, y, \bar{p})$ определяет непрерывную функцию F по правилу

$$F(\bar{x}) = y \Leftrightarrow \Phi(\bar{x}, y, \bar{p}).$$

Доказательство. Из (1) и алгебраического принципа обобщения следует, что это свойство выполнено также в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$. Для доказательства непрерывности функции F выберем произвольные рациональные числа a и b такие, что $a < F(\bar{x}_0) < b$. Поскольку F задается некоторой формулой первого порядка с параметрами $\bar{p}$, по принципу обобщения неравенство $a < F(\bar{x}) < b$ выполнено также в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$. Отсюда и из произвольности a и b получаем стандартное определение непрерывности функции F в точке $\bar{x}_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \, \delta > 0 \, (|\bar{x}_0 - \bar{x}| < \delta \rightarrow |F(\bar{x}_0) - F(\bar{x})| < \varepsilon),$$

которое записывается формулой первого порядка. Из этого по принципу обобщения выводим непрерывность функции F в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$. Предложение доказано.

Если $\varphi(x, y, \bar{z})$ — формула, то обозначим через $<_{\varphi,\bar{p}}$ отношение, которое она задает с параметрами $\bar{p}$ на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ $:<_{\varphi,\bar{p}} = \varphi[\mathbb{HF}(\mathbb{R}), \bar{p}]$. Если $\varphi(x, y, \bar{z})$ — формула, то обозначим через $D_{\varphi}(x, \bar{z})$ формулу, определяющую *область* бинарного отношения, определяемого формулой $\varphi(x, y, \bar{z})$, т. е. $D_{\varphi}(x, \bar{z}) = \exists y(\varphi(x, y, \bar{z}) \vee \varphi(y, x, \bar{z}))$. Длину вещественного интервала I будем обозначать через $|I|$. Если I и J — непустые вещественные интервалы, то запись $I < J$ будет означать, что любой элемент из I меньше любого элемента из J. Будем использовать *теоретико-множественные термы* (*s-термы*) для порождения всех элементов множества $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ из праэлементов, которые определяются следующим образом:

1) $\varnothing$ есть s-терм;

2) любая переменная есть s-терм;

3) если $t_0, \ldots, t_k$ являются s-термами, то и $\{t_0, \ldots, t_k\}$ является s-термом.

Зафиксируем некоторую геделеву нумерацию $(\tau_i)_{i<\omega}$ множества всех s-термов. Любой элемент из $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ является значением некоторого s-терма от подходящего набора праэлементов.

Основным результатом работы является

Теорема 7. *Существует эффективная процедура, которая по любым Σ-формулам $L(x, y, \bar{z})$ и $E(x, y, \bar{z})$ выдает Σ-формулу $\psi(x, y, \bar{z})$ такую, что для любых $\bar{p} \in \mathbb{R}$ таких, что $E(x, y, \bar{p})$ — конгруэнция на области отношения $<_{L,\bar{p}}$ и фактор $<_{L,\bar{p}} /E$ отношения $<_{L,\bar{p}}$ по $E[\mathbb{HF}(\mathbb{R}), \bar{p}]$ является линейным порядком, отношение $<_{\psi,\bar{p}}$ также является линейным порядком на $\mathbb{R}$ со следующими свойствами:*

1) $\langle \mathbb{R}; <_{\psi,\bar{p}} \rangle \cong \langle \mathbb{R}; < \rangle$;

2) *не существует $\Sigma_{\bar{p}}$-вложения $<_{\psi,\bar{p}}$ в $<_{L,\bar{p}} /E$;*

3) *порядок $<_{\psi,\bar{p}}$ является $\Sigma_{\bar{p}}$-жестким.*

Доказательство. С помощью некоторой пошаговой конструкции построим некоторый порядок $<^*$ и покажем, что он определим некоторой Σ-формулой ψ с параметрами $\bar{p}$, эффективно определяемой по формулам L и E.

В ходе построения с помощью пошаговой конструкции эффективно относительно $\mathrm{Diag}(\bar{p})$ будем строить все более и более мелкие замкнутые слева и открытые справа непустые интервалы I_j^k, $k < \omega$, $j < 3$, на $\mathbb{R}$ с троично-рациональными концами, а также уточняющие друг друга согласованные между собой линейные порядки $\prec_k$ на множествах $\{I_j^k \mid j < \omega\}$ (можно также считать, что строим их на множествах вида $\{\langle k, j\rangle \mid j < \omega\}$), удовлетворяющие следующим условиям:

1) все I_j^0 имеют вид $[i, i+1)$, $i < \omega$;

2) для любого $k < \omega$ семейство $\{I_j^k \mid j < \omega\}$ является разбиением множества $\mathbb{R}^+$;

3) $I_i^k \neq I_j^k$ при $i \neq j$;

4) каждый интервал I_j^k есть объединение ровно трех последовательно расположенных попарно не пересекающихся интервалов вида I_i^{k+1}, причем наибольший из этих трех интервалов относительно обычного порядка является также наибольшим из них относительно порядка $\prec_{k+1}$ (т. е. при определении порядка $\prec_{k+1}$, возможно, переставим между собой первые два интервала, на которые разделится I_j^k, а третий из них так и останется наибольшим);

5) порядок $\prec_{k+1}$ уточняет порядок $\prec_k$: если $I_i^{k+1} \subseteq I_{i_0}^k$, $I_j^{k+1} \subseteq I_{j_0}^k$ и $I_{i_0}^k \prec_k I_{j_0}^k$, то $I_i^{k+1} \prec_{k+1} I_j^{k+1}$.

Интервалы вида I_i^k будем называть *интервалами k-го уровня.* После каждого шага t у нас будут определены в точности все интервалы I_i^s, $i < \omega$, $s \leqslant h_t$, для подходящего h_t, которое будет естественным образом вычисляться относительно $\mathrm{Diag}(\bar{p})$.

Истинность утверждения $I_i^k \prec_k I_j^k$ будет означать, что полагаем все точки интервала I_i^k меньшими всех точек интервала I_j^k относительно порядка $<^*$.

Зафиксируем геделеву нумерацию Σ-формул $\theta_n(x, y, \bar{z})$, $n < \omega$, от $x, y, \bar{z}$, где длина $\bar{z}$ равна длине $\bar{p}$. Будем стремиться удовлетворить следующие два семейства требований:

$\mathbf{P}_n$ $(n < \omega)$: Σ-формула $\theta_n(x, y, \bar{p})$ не определяет нетривиальное изоморфное вложение из $<^*$ в $<_{L,\bar{p}} /E$;

$\mathbf{Q}_n$ $(n < \omega)$: Σ-формула $\theta_n(x, y, \bar{p})$ не определяет нетривиальное изоморфное вложение из $<^*$ в себя.

Одним из основных повторяющихся осуществляемых действий будет

Процедура деления интервалов. Пусть k максимальное среди всех натуральных чисел такое, что все интервалы I_j^k, $j < \omega$, определены к данному моменту времени (это число не обязательно совпадет с h_t, поскольку данная процедура может исполняться внутри одно шага конструкции несколько раз). При этом конструкция обеспечит нам, что отношение $\prec_k$ между интервалами I_j^k, $j < \omega$, будет уже определено и все эти интервалы будут замкнуты слева и открыты справа. Разбиваем каждый из интервалов I_j^k на три попарно не пересекающихся последовательно расположенных замкнутых слева и открытых справа интервала $J_{j,m}^k = [a_m, b_m)$, $m < 3$, одинаковой длины:

$$I_j^k = J_{j,0}^k \cup J_{j,1}^k \cup J_{j,2}^k, \quad J_{j,0}^k < J_{j,1}^k < J_{j,2}^k, \quad \left|J_{j,0}^k\right| = \left|J_{j,1}^k\right| = \left|J_{j,2}^k\right|.$$

Пронумеруем эти вновь полученные интервалы $J_{j,m}^k$, $j < \omega$, $m < 3$, в порядке возрастания геделевых номеров пар $\langle j, m\rangle$, получив в результате последовательность интервалов $I_0^{k+1}, I_1^{k+1}, \ldots$. Определим на этой последовательности отношение $\prec_{k+1}$ следующим образом: если различные интервалы K_0 и K_1 из этой последовательности получены в результате разбиения различных интервалов:

$K_0 \subseteq I_i^k$ и $K_1 \subseteq I_j^k$, $i \neq j$, при этом $I_i^k \prec_k I_j^k$, то также полагаем $K_0 \prec_{k+1} K_1$; если же различные интервалы K_0 и K_1 получены в результате деления одного и того же интервала I_j^k, то отношение $\prec_{k+1}$ на них совпадет с естественным порядком: $K_0 \prec_{k+1} K_1 \Leftrightarrow K_0 < K_1$ ($J_{j,0}^k \prec_{k+1} J_{j,1}^k \prec_{k+1} J_{j,2}^k$). Описание процедуры деления интервалов закончено.

Также будем иногда исполнять *модифицированные процедуры деления интервалов*, отличающиеся между собой лишь перестановкой некоторых интервалов вида $J_{j,0}^k$ и $J_{j,1}^k$, т. е. в отличие от обычной процедуры деления интервалов, для некоторого j будем полагать $J_{j,1}^k \prec_{k+1} J_{j,0}^k \prec_{k+1} J_{j,2}^k$.

Будем говорить, что *условие P_n требует внимания на шаге* $t+1$, если

1) это условие к началу шага $t+1$ еще не сработало;

2) существуют $i, k, l, m < t$ такие, что

$$\forall x \in I_i^{h_t} \exists \bar{z} (\tilde{\theta}_{n,k,m}(x, \bar{z}, \bar{p}) \wedge \widetilde{D}_{l,m}(\bar{z}, \bar{p})),$$

где $\tilde{\theta}_{n,k,m}(x, \bar{z}, \bar{p})$ — k-я компонента в разложении $\theta_n(x, \tau_m(\bar{z}), \bar{p})$ и $\widetilde{D}_{l,m}(\bar{z}, \bar{p})$ — l-я компонента в разложении формулы $D_L(\tau_m(\bar{z}), \bar{p})$. Здесь τ_m — s-терм с геделевым номером m.

Будем говорить, что *условие Q_n требует внимания на шаге* $t+1$, если

1) это условие к началу шага $t+1$ еще не сработало;

2) существует $i < t$ такое, что формула $\theta_n^{(i)}(x, y, \bar{p})$ определяет разнозначное непрерывное отображение из интервала $I_i^{h_t}$ в $\mathbb{R}$, причем образ этого интервала не имеет общих точек с ним самим.

Перейдем к описанию конструкции.

Шаг 0. Полагаем $h_0 = 0$. Для всех $j < \omega$ положим

$$I_{2j+1}^0 = [j, j+1), \quad I_{2j}^0 = [-j-1, -j).$$

Шаги вида $t+1$ могут быть трех следующих типов:

Тип 1. Деление интервалов. Осуществляем процедуру деления интервалов.

Тип 2. Удовлетворение условий типа P. Если не существует $n < t$ такого, что условие P_n требует внимания на шаге $t+1$, то полагаем $h_{t+1} = h_t$ и на этом данный шаг заканчиваем.

В противном случае выбираем наименьшее натуральное число n такое, что условие P_n требует внимания на шаге $t+1$. Выбираем упомянутый в определении набор параметров i, k, l, m с наименьшим геделевым номером. Положим $a = \inf I_i^{h_t}$, $b = a + \frac{1}{3}\left|I_i^{h_t}\right|$ (a и b — левые точки первых двух из трех промежутков, на которые впоследствии будет разделен интервал $I_i^{h_t}$). Воспользуемся процедурой разложения на компоненты, чтобы породить вычислимые разложения

$$L(\tau_m(\bar{z}_0), \tau_m(\bar{z}_1), \bar{p}) \Leftrightarrow \bigvee_{j<\omega} L^{(j)}(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{p}),$$

$$E(\tau_m(\bar{z}_0), \tau_m(\bar{z}_1), \bar{p}) \Leftrightarrow \bigvee_{j<\omega} E^{(j)}(\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{p}).$$

Далее находим наименьшее $j < \omega$ такое, что j-е компоненты отношения порядка или эквивалентности определяют хотя бы одно отношение на образах элемента x относительно отображения, которое может определять θ_n, а именно j, удовлетворяющее условию

$$\exists \bar z_0 \bar z_1((\tilde\theta_{n,k,m}(a,\bar z_0,\bar p)\wedge \widetilde D_{l,m}(\bar z_0,\bar p))\wedge(\tilde\theta_{n,k,m}(b,\bar z_1,\bar p)\wedge \widetilde D_{l,m}(\bar z_1,\bar p)) \wedge (L^{(j)}(\bar z_0,\bar z_1,\bar p)\vee L^{(j)}(\bar z_1,\bar z_0,\bar p)\vee E^{(j)}(\bar z_0,\bar z_1,\bar p))).$$

Если при этом выполнено

$$\exists \bar z_0 \bar z_1((\tilde\theta_{n,k,m}(a,\bar z_0,\bar p)\wedge \widetilde D_{l,m}(\bar z_0,\bar p))\wedge(\tilde\theta_{n,k,m}(b,\bar z_1,\bar p)\wedge \widetilde D_{l,m}(\bar z_1,\bar p))\wedge L^{(j)}(\bar z_0,\bar z_1,\bar p)) \quad (2)$$

(т. е. если согласно L образы для a и b могут следовать в том же порядке, что и a,b), то исполняем модифицированную процедуру деления интервалов один раз, определив порядок на вновь полученных интервалах так же, как в определении с единственным исключением: в упорядочении $\prec_{h_t+1}$ между тремя интервалами, на которые разделится $I_i^{h_t}$, переставим местами интервалы $[a,b)$ и $\left[b, b+\frac13\left|I_i^{h_t}\right|\right)$, т. е. положим $\left[b, b+\frac13\left|I_i^{h_t}\right|\right) \prec_{t+1} [a,b)$. Если (2) не выполнено, то выполняем обычную процедуру деления интервалов. Положим $h_{t+1}=h_t+1$.

Условие P_n объявим сработавшим. Заметим, что формула θ_n теперь не может определять изоморфное вложение при данных параметрах $\bar p$, поскольку если она определяет некоторое отображение, то оно в любом случае устанавливает между элементами a и b порядок $<^*$, не соответствующий порядку на их предполагаемых образах, определяемому формулой L.

Тип 3. Удовлетворение условий типа Q. Предполагаем, что к концу шага t определены все интервалы I_j^k при $k\leqslant h_t$ и для каждого $k\leqslant h_t$ определено линейное упорядочение $\prec_k$ на множестве интервалов $\left\{I_j^k \mid j<\omega\right\}$. Если не существует $n<t$ такого, что условие Q_n требует внимания на шаге $t+1$, то полагаем $h_{t+1}=h_t$ и на этом данный шаг заканчиваем.

В противном случае выбираем наименьшее натуральное число n такое, что условие Q_n требует внимания на шаге $t+1$. Для данного n зафиксируем i, как в определении с наименьшим возможным номером. Выполним один раз процедуру деления интервалов. Пусть $I_i^{h_t}=J_0\cup J_1\cup J_2$ — получившееся в результате этого разбиение для интервала $I_i^{h_t}$, $J_0<J_1<J_2$. Пусть a — начало интервала $I_i^{h_t}$ (это же число является началом J_0), и пусть b — начало интервала J_1. Обозначим образы точек a и b через a' и b' соответственно, заметим, что $a'\neq b'$.

Зафиксируем состояние конструкции к данному моменту и одновременно запустим два процесса.

Процесс 1. Осуществим несколько раз процедуру деления интервалов до тех пор, пока не появится шаг s такой, что a' и b' попадут в различные интервалы s-го уровня.

Процесс 2. Осуществим один раз модифицированную процедуру деления интервалов, поменяв местами J_0 и J_1, т. е. положив $J_1\prec_{h_t+1} J_0 \prec_{h_t+1} J_2$. Затем исполним несколько раз процедуру деления интервалов до тех пор, пока не появится шаг s такой, что a' и b' попадут в различные интервалы s-го уровня.

После определения отношения $\prec_s$ в результате любого из процессов получим, что отношение $\prec_s$ на отрезках, содержащих a' и b', совпадет с обычным отношением порядка на них, а учитывая то, что порядок между этими интервалами фиксируется навсегда, в любом случае получим, что $a'<b'\Leftrightarrow a'<^* b'$.

В результате процесса 1 имеем $a <^* b$, а в результате процесса 2 — $b <^* a$. Вернемся к зафиксированному моменту и исполним тот из двух процессов, который гарантирует нам выполнение эквивалентности

$$a <^* b \Leftrightarrow \neg(a' <^* b').$$

Заметим, что выбор процесса проводится эффективно относительно $\mathrm{Diag}(\bar{p})$.

Условие Q_n объявим сработавшим. Отметим, что после этого формула $\theta_n(x, y, \bar{p})$ уже никогда не сможет определять изоморфное вложение порядка $<^*$ в $<^*$, поскольку определяемое ею отображение инвертирует порядок между a и b.

Шаг $t+1$. Выполняем шаг типа r, где r — остаток от деления $t+1$ на 3.

Описание конструкции закончено.

Остается формально определить

$$x <^* y \Leftrightarrow \exists t \exists i \exists j \big(x \in I_i^{h_t} \wedge y \in I_j^{h_t} \wedge I_i^{h_t} \prec_t I_j^{h_t}\big). \tag{3}$$

Лемма 8. $\langle \mathbb{R}; <^* \rangle \cong \langle \mathbb{R}; < \rangle$.

Доказательство леммы. Обозначим через $m.(a_0 a_1 \ldots)_3$ троичное разложение числа, т. е. $m + \sum\limits_{i<\omega} \frac{a_i}{3^{i+1}}$, $m \in \mathbb{Z}$, $a_i \in 3$, при этом не выполнено $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 2$. Очевидно, что всякое число имеет единственное троичное разложение. Заметим, что порядок, который строим, можно определить в следующем виде: все промежутки вида $[n, n+1)$ упорядочены естественным образом, соответственно этому упорядочены между собой и элементы этих интервалов. Далее делим отрезки на три равные части и уточняем этот порядок, возможно, изменяя взаимное расположение элементов первой и второй третей этого отрезка. Если в некотором промежутке $[n, n+1)$ переставляем между собой первую и вторую трети, то фактически обеспечиваем выполнимость соотношения

$$n.(1\ldots)_3 <^* n.(0\ldots)_3 <^* n.(2\ldots)_3,$$

если нет, то обеспечиваем выполнимость соотношения

$$n.(0\ldots)_3 <^* n.(1\ldots)_3 <^* n.(2\ldots)_3.$$

Можно считать, что для некоторой перестановки $\sigma \in \mathrm{Sym}(3)$ такой, что $\sigma(2) = 2$, выполнено

$$n.(a_0\ldots)_3 <^* n.(a_1\ldots)_3 \Leftrightarrow n.(\sigma(a_0)\ldots)_3 < n.(\sigma(a_1)\ldots)_3.$$

Прослеживая построение, видим, что для каждой конечной последовательности $a_0 a_1 \ldots a_{k-1} \in 3^{<\omega}$ можно определить перестановку $\pi_{n, a_0 a_1 \ldots a_{k-1}} \in \mathrm{Sym}(3)$, зависящую от n и $a_0 a_1 \ldots a_{k-1}$, такую, что $\pi(2) = 2$ и

$$\begin{aligned}&n.(a_0 a_1 a_2 \ldots)_3 <^* m.(b_0 b_1 b_2 \ldots)_3 \\ &\Leftrightarrow n.(\pi_{n,\varnothing}(a_0)\pi_{n.a_0}(a_1)\pi_{n.a_0 a_1}(a_2)\ldots)_3 < m.(\pi_{m,\varnothing}(b_0)\pi_{m.b_0}(b_1)\pi_{m.b_0 b_1}(b_2)\ldots)_3.\end{aligned}$$

Таким образом, если определим отображение $F_\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу

$$F_\pi((m.a_0 a_1 a_2 \ldots)_3) = (m.\pi_{m,\varnothing}(a_0)\pi_{m,a_0}(a_1)\pi_{m,a_0 a_1}(a_2)\ldots)_3,$$

то в силу сохранения элемента 2 всеми перестановками π_α отображение F_π окажется взаимно однозначным отображением из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, причем оно же и будет изоморфизмом между $\langle \mathbb{R}; <^* \rangle$ и $\langle \mathbb{R}; < \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Порядок* $<^*$ $\Sigma_{\bar p}$*-определим, причем определяющая его* Σ*-формула строится с помощью единой процедуры по формуле* L.

Доказательство леммы. Описываемая здесь конструкция фактически дает нам некоторое семейство бескванторных формул, равномерно вычислимо перечислимое относительно $\mathrm{Diag}(\bar p)$, такое, что наше упорядочение на $\mathbb{R}$ будет задано бесконечной дизъюнкцией этих формул. Действительно, (3) можно переписать в виде

$$x <^* y \Leftrightarrow \bigvee_{t,i,j<\omega, I_i^{h_t} <_t^* I_j^{h_t}} \big(x \in I_i^{h_t} \wedge y \in I_j^{h_t}\big),$$

откуда следует, что порядок $<^*$ задается дизъюнкцией бесконечного семейства бескванторных формул, вычислимо перечислимого относительно $\mathrm{Diag}(\bar p)$. При этом описанный здесь алгоритм перечисления этого семейства не зависит от выбора $\bar p$. В [6] указано, как в такой ситуации получить Σ-формулу с параметрами $\bar p$, эквивалентную данной бесконечной дизъюнкции. Лемма доказана.

Лемма 10. *Не существует изоморфного* $\Sigma_{\bar p}$*-вложения из* $\langle \mathbb{R}; <^*\rangle$ *в* L.

Доказательство леммы. Пусть Σ-формула $\theta_n(x, y, \bar p)$ с параметрами $\bar p$ определяет такое вложение. Это означает, что условие P_n никогда не сработает. Зафиксируем не алгебраическую над $\bar p$ точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть ее образ относительно отображения, задаваемого условием $\theta_n(x, y, \bar p)$, имеет вид $\tau_m(\bar z)$. Тогда найдутся $l, k < \omega$ такие, что

$$\exists \bar z(\tilde\theta_{n,k,m}(x_0, \bar z, \bar p) \wedge \widetilde{D}_{l,m}(\bar z, \bar p)),$$

где $\tilde\theta_{n,k,m}(x, \bar z, \bar w)$ — k-я компонента в разложении $\theta_n(x, \tau_m(\bar z), \bar w)$ и $\widetilde{D}_{l,m}(\bar z, \bar w)$ — l-я компонента в разложении $D_L(\tau_m(\bar z, \bar p))$. По алгебраическому принципу обобщения это же условие выполнено и в некоторой окрестности U точки x_0. Возьмем номер шага $t + 1$ типа 2 достаточно большим так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) $i, k, l, m < t$;

2) все условия типа P с номерами, меньшими n, которые когда-нибудь вообще должны сработать, уже сработали до этого шага;

3) длина интервала $I_i^{h_t}$, содержащего точку x_0, настолько мала, что $I_i^{h_t} \subseteq U$.

Тогда на этом шаге условие P_n потребует внимания и сработает; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *Не существует нетривиальных* $\Sigma_{\bar p}$*-вложений из* $\langle \mathbb{R}; <^*\rangle$ *в себя.*

Доказательство леммы. Пусть Σ-формула $\theta_n(x, y, \bar p)$ с параметрами $\bar p$ определяет такое нетривиальное вложение f. Так как порядок $<^*$ изоморфен обычному порядку на вещественных числах, мощность множества $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq x\}$ равна 2^ω. Поэтому существует не алгебраическое над $\bar p$ число x_0 такое, что $f(x_0) \neq x_0$. Зафиксируем некоторое $k < \omega$ такое, что $\exists y \theta^{(k)}(x_0, y, \bar p)$ (на самом деле даже $\exists^{=1} y \theta^{(i)}(x_0, y, \bar p)$). По предложению 6 условие $\theta^{(k)}(x_0, y, \bar p)$ определяет взаимно однозначное непрерывное отображение также в некоторой окрестности U точки x_0. Выберем достаточно большое t так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

1) все условия типа Q с номерами, меньшими n, которым суждено когда-нибудь сработать в ходе построения, уже сработали к шагу t;

2) для некоторого $i < \omega$ промежуток $I_i^{h_t}$, включающий точку x_0, содержится в U, и образ $I_i^{h_t}$ относительно отображения, определяемого условием $\theta^{(k)}(x_0, y, \bar{p})$, не имеет общих точек с $I_i^{l_t}$

Тогда условие Q_n не сработает до шага t включительно, поскольку тогда формула θ_n не определяла бы нетривиального изоморфного вложения. При первом выполнении шага типа 3 после момента времени t условие Q_n потребует внимания и сработает. В результате условие $\theta_n(x, y, \bar{p})$ не сможет определять нетривиального изоморфного вложения; противоречие. Лемма доказана.

Теорема доказана.

Замечание. Заметим, что теорема может быть доказана и в более общих предположениях, а именно не обязательно, чтобы формула L и отношение E определяли порядок. На самом деле, как следует из доказательства, достаточно, например, выполнения условия $L(x, y, \bar{p}) \vee L(y, x, \bar{p}) \vee E(x, y, \bar{p})$ для всех x, y из области отношения, задаваемого формулой $L(x, y, \bar{p})$.

Следствие 12. *Пусть $\bar{p} \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) *не существует $\Sigma_{\bar{p}}$-представимого линейного порядка над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, в который $\Sigma_{\bar{p}}$-вкладывается любой $\Sigma_{\bar{p}}$-жесткий линейный $\Sigma_{\bar{p}}$-порядок на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$;*

2) *по любому вычислимому семейству $\Sigma_{\bar{p}}$-определимых на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ линейных порядков строится $\Sigma_{\bar{p}}$-жесткий линейный порядок на $\mathbb{R}$, который не $\Sigma_{\bar{p}}$-вложим ни в один из порядков этого семейства.*

Доказательство. П. 1 непосредственно следует из теоремы.

Рассмотрим произвольную вычислимую последовательность Σ-формул $\varphi_i(x, y, \bar{z})$, $i < \omega$, каждая из которых определяет линейный порядок при $\bar{z} = \bar{p}$. Возьмем сумму всех этих линейных порядков, а именно линейный порядок $<_L$ на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, определяемый условием

$$x < y \Leftrightarrow \exists x', y' \exists m, n \in \omega (x = \langle m, x' \rangle \wedge y = \langle n, y' \rangle \\ \wedge ((m < n) \vee ((m = n) \wedge \mathrm{Sat}(\varphi_i(x, y, \bar{z}, \bar{p}))))).$$

По теореме существует $\Sigma_{\bar{p}}$-жесткое линейное упорядочение $<^*$ на $\mathbb{R}$, изоморфное естественному порядку $<$, не $\Sigma_{\bar{p}}$-вложимое в этот порядок. Если бы существовало $\Sigma_{\bar{p}}$-вложение f этого порядка в порядок, задаваемый некоторым условием $\varphi_n(x, y, \bar{p})$, то такое вложение можно было бы легко переделать и в $\Sigma_{\bar{p}}$-вложение f^* в $<_L$ по правилу $f^*(x) = \langle n, f(x) \rangle$. Следствие доказано.

Автор благодарит анонимного рецензента за исправление ряда неточностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl, 1975.
2. *Ershov Yu. L.* Σ-definability of algebraic systems // Handb. Recursive Math. V. 1. Recursive model theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 235–260. (Stud. Logic Found. Math.).
3. *Stukachev A. I., Ershov Yu. L., Puzarenko V. G.* $\mathbb{HF}$-computability // Computability in context. Computation and logic in the real world. London: Imperial College Press, 2011. P. 169–242.
4. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 96–128.
5. *Морозов А. С.* Непредставимость полугруппы ω^ω над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 156–164.
6. *Морозов А. С.* О Σ-представлениях вещественного порядка // Алгебра и логика. (Принята к печати).

7. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
8. *Tarski A.* A decision method for elementary algebra and geometry. Santa Monica: The Rand Corp., 1957.
9. *Marker D.* Model theory. An introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2002. (Grad. Texts Math.).

Статья поступила 26 декабря 2012 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`morozov@math.nsc.ru`