Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.958

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В. Г. Романов

Аннотация. Для интегродифференциальных уравнений вязкоупругости изучается задача об определении коэффициентов уравнений и ядер, входящих в интегральные члены системы уравнений. Плотность среды считается заданной. Предполагается, что носитель неоднородности искомых функций содержится внутри некоторой компактной области B_0. Рассматривается серия прямых задач, в которых импульсный источник сосредоточен в точках y границы области B_0. Точка y является параметром задачи. Задаваемая информация о решении прямой задачи представляет собой след решения задачи Коши с нулевыми начальными. Этот след задается на границе области B_0 для всех $y \in \partial B_0$ и для конечного временного интервала. Основной результат работы заключается в получении теорем об однозначности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: вязкоупругость, обратная задача, единственность.

Распространение волн в современных композитных материалах описывается интегродифференциальным уравнением

$$\rho(x)u_{tt} - Lu = F, \tag{1}$$

в котором $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор упругих смещений, $\rho(x)$ — плотность среды, $x \in \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$ — вектор силы, а оператор $L = (L_1, L_2, L_3)$ определен равенствами

$$L_i u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}, \quad \sigma_{ij}(u) = \lambda(x)\delta_{ij} \operatorname{div} u(x,t) + \mu(x)\left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_i}\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \left[p(x,t-s)\delta_{ij} \operatorname{div} u(x,s) + q(x,t-s)\left(\frac{\partial u_i(x,s)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x,s)}{\partial x_i}\right)\right] ds, \ i,j = 1,2,3.$$

В этих равенствах δ_{ij} — символ Кронекера, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ — модули упругости, функции $p(x,t)$, $q(x,t)$ характеризуют вязкость среды. В дальнейшем принимается, что $\lambda(x) + \mu(x) > 0$, $\mu(x) > 0$, $\rho(x) > 0$.

Пусть

$$c_p(x) = \sqrt{\frac{\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)}}, \quad c_s(x) = \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00208–а), Сибирского отделения РАН (интеграционный проект СО РАН 2012 № 14), проекта НАН Украины и СО РАН 2013 (№ 12) и департамента образования и науки Казахстана (грант № 1843–2012).

— скорости продольной и поперечной волн соответственно, а $\tau_p(x,y)$, $\tau_s(x,y)$ — геодезические расстояния, отвечающие римановым метрикам

$$d\tau_p = \frac{|dx|}{c_p(x)}, \quad d\tau_s = \frac{|dx|}{c_s(x)}, \quad |dx| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}.$$

Предположим, что обе римановы метрики простые, т. е. любая пара точек x, y может быть соединена единственной геодезической $\Gamma_p(x,y)$ и $\Gamma_s(x,y)$.

В дальнейшем нас будет интересовать задача об определении функций $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $p(x,t)$, $q(x,t)$ по заданной информации о семействе решений некоторых прямых задач для уравнения (1). При этом функция $\rho(x)$ будет предполагаться заданной (например, заданной постоянной). Обратные задачи об определении ядер $p(x,t)$, $q(x,t)$ в уравнении (1) (или только одного ядра $p(x,t)$ в случае, когда система равенств заменяется одним скалярным уравнением), в предположении, что функции $p(x,t)$, $q(x,t)$ представимы в виде $p(x,t) = k_1(t)p_0(x)$, $q(x,t) = k_2(t)q_0(x)$, в котором $k_1(t)$, $k_2(t)$ являются заданными, а $p_0(x)$, $q_0(x)$ — неизвестными функциями, носитель которых содержится внутри некоторой компактной области, изучались ранее в [1–8]. Здесь не предполагается никакого специального вида функций $p(x,t)$, $q(x,t)$. В этом отношении настоящая работа близка к [9], в которой для скалярного уравнения рассмотрена задача об определении ядра $p(x,t)$.

Сформулируем постановку рассматриваемой обратной задачи. Пусть в уравнении (1) функция F имеет вид

$$F(x,t;y) = f^0\delta(x-y,t), \tag{2}$$

в котором $y \in \mathbb{R}^3$ — точка, параметр задачи, $\delta(x-y,t)$ — дельта-функция Дирака, $f^0 = \left(f_1^0, f_2^0, f_3^0\right)$ — числовой вектор, характеризующий направление сосредоточенной в точке $(y,0)$ силы. Пусть, далее, $u(x,t;y)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u|_{t<0} \equiv 0. \tag{3}$$

Предположим, что для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$ вне области $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1-\varepsilon\}$ функции $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ совпадают с заданными постоянными λ_0, μ_0, ρ_0 соответственно и $\lambda_0 + \mu_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\rho_0 > 0$, а функции $p(x,t)$, $q(x,t)$ тождественно равны нулю для x, лежащих вне B_ε, при любом $t \geq 0$. Пусть, кроме того, функция $\rho(x)$ известна всюду.

Постановка обратной задачи. *Пусть для некоторого положительного числа $T > 0$ функция $u(x,t;y)$ известна для всех $(x,y,t) \in D(T)$, $D(T) = \{(x,y,t) \mid (x,y) \in (\partial B_0 \times \partial B_0),\ t \in [0, \tau_s(x,y) + T]\}$, $\partial B_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$,*

$$u(x,t;y) = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in D(T). \tag{4}$$

Требуется по заданной функции $f(x,y,t)$ найти $\lambda(x)$, $\mu(x)$ в области B_ε и $p(x,t)$, $q(x,t)$ в области $B_\varepsilon \times [0,T]$.

Для однородной среды, когда ρ, λ, μ постоянны, $p = q = 0$, задача (1)–(3) решена Лявом [10]. Ее решение дается формулой

$$u(x,t,y) = \frac{f^0}{4\pi\rho c_s^2|x-y|}\delta(t-\tau_s(x,y)) + \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\operatorname{div}\left\{\frac{f^0}{|x-y|}[\theta_1(t-\tau_p(x,y)) - \theta_1(t-\tau_s(x,y))]\right\}, \tag{5}$$

в которой $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ при $t < 0$.

Введем в рассмотрение бесконечную систему функций, получающуюся из функции Хевисайда путем последовательного интегрирования или дифференцирования:

$$\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!}\theta_0(t), \quad \theta_{-k}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\theta_0(t) = \delta^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Заметим, что для функций этой системы при любом $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ справедливо равенство $\theta_k'(t) = \theta_{k-1}(t)$.

Формулу (5) для однородной среды, в которой $\rho = \rho(y)$, $c_p = c_p(y)$, $c_s = c_s(y)$, можно представить в виде конечного лучевого разложения

$$u(x,t,y) = \sum_{k=-1}^{1} [\alpha^{(k,p)}(x,y)\theta_k(t - \tau_p(x,y)) + \alpha^{(k,s)}(x,y)\theta_k(t - \tau_s(x,y))], \tag{6}$$

в котором коэффициенты $\alpha^{(k,p)}(x,y)$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
\alpha^{(-1,p)}(x,y) = -\frac{(f^0 \cdot \nabla_y \tau_p(x,y))\nabla\tau_p(x,y)}{4\pi\rho(y)\,c_p(y)\tau_p(x,y)},\\
\alpha^{(0,p)}(x,y) = \frac{\nabla\tau_p(x,y) \times (f^0 \times \nabla_y \tau_p(x,y)) - 2(f^0 \cdot \nabla_y \tau_p(x,y))\nabla\tau_p(x,y)}{4\pi\rho(y)\,c_p(y)\tau_p^2(x,y)},\\
\alpha^{(1,p)}(x,y) = \frac{\nabla\tau_p(x,y) \times (f^0 \times \nabla_y \tau_p(x,y)) - 2(f^0 \cdot \nabla_y \tau_p(x,y)))\nabla\tau_p(x,y)}{4\pi\rho(y)\,c_p(y)\tau_p^3(x,y)},
\end{gathered} \tag{7}$$

а коэффициенты $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ — по формулам

$$\begin{gathered}
\alpha^{(-1,s)}(x,y) = -\frac{\nabla\tau_s(x,y) \times (f^0 \times \nabla_y \tau_s(x,y))}{4\pi\rho(y)\,c_s(y)\tau_s(x,y)},\\
\alpha^{(0,s)}(x,y) = \frac{2(f^0 \cdot \nabla_y \tau_s(x,y))\nabla\tau_s(x,y) - \nabla\tau_s(x,y) \times (f^0 \times \nabla_y \tau_s(x,y))}{4\pi\rho(y)\,c_s(y)\tau_s^2(x,y)},\\
\alpha^{(1,s)}(x,y) = \frac{2(f^0 \cdot \nabla_y \tau_s(x,y))\nabla\tau_s(x,y) - \nabla\tau_s(x,y) \times (f^0 \times \nabla_y \tau_s(x,y))}{4\pi\rho(y)\,c_s(y)\tau_s^3(x,y)}.
\end{gathered} \tag{8}$$

В силу сделанного выше предположения, что среда однородна в некоторой окрестности источника, решение задачи (1)–(3) совпадает с ее решением для однородной среды в достаточно малой окрестности точки $(y, 0)$. В [11] установлено аналогичное (6) бесконечное асимптотическое разложение решения (1)–(3) для неоднородной среды. Соответствующее утверждение приведено ниже в виде леммы 1. Это разложение представляет собой «разложение по гладкости» (термин принадлежит В. М. Бабичу) в окрестности характеристических конусов $t = \tau_p(x,y)$, $t = \tau_s(x,y)$ и является основой для исследования поставленной выше обратной задачи.

Будем говорить, что совокупность функций $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $p(x,t)$, $q(x,t)$ *принадлежит множеству* $\mathscr{P}$, $(\rho, \lambda, \mu, p, q) \in \mathscr{P}$, если выполнены следующие условия:

1) $\rho(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x) + \mu(x)$ являются положительными функциями для $x \in \mathbb{R}^3$ и совпадают с положительными постоянными ρ_0, μ_0, $\lambda_0 + \mu_0$ вне области $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1 - \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,1)$,

2) функции $\rho(x)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$ и $p(x,t)$, $q(x,t)$ бесконечно дифференцируемы по своим аргументам для всех x и t,

3) носители функций $p(x,t)$, $q(x,t)$ при любых значениях $t \in [0,T)$, $T > 0$, содержатся внутри области B_ε, и $\operatorname{supp}(\rho(x)-\rho_0, \lambda(x)-\lambda_0, \mu(x)-\mu_0) \subset B_\varepsilon$,

4) метрики $d\tau_p = |dx|/c_p(x)$, $d\tau_s = |dx|/c_s(x)$ простые в $\mathbb{R}^3$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — вектор, зависящий от пространственных переменных x и y, а τ — некоторая скалярная функция тех же переменных. Обозначим через $\kappa_{ij}^m(\alpha,\tau)$ сложные функции переменных x и y, определив их для $i,j = 1,2,3$ и целых значений m равенствами

$$\kappa_{ij}^0(\alpha,\tau) = -\lambda(x)\delta_{ij}(\alpha\cdot\nabla\tau) - \mu(x)\left(\alpha_i \frac{\partial\tau}{\partial x_j} + \alpha_j \frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right),$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ij}^1(\alpha,\tau) = \lambda(x)\delta_{ij}\operatorname{div}\alpha + \mu(x)\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\right)& \\ - p_0(x)\delta_{ij}(\alpha\cdot\nabla\tau) - q_0(x)\left(\alpha_i \frac{\partial\tau}{\partial x_j} + \alpha_j \frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)&, \end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{ij}^m(\alpha,\tau) = p_{(m-2)}(x)\delta_{ij}\operatorname{div}\alpha + q_{(m-2)}(x)\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\right)& \\ - p_{(m-1)}(x)\delta_{ij}(\alpha\cdot\nabla\tau) - q_{(m-1)}(x)\left(\alpha_i \frac{\partial\tau}{\partial x_j} + \alpha_j \frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)&, \quad m \geq 2,\end{aligned}$$

в которых

$$p_m(x) = \frac{\partial^m p(x,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}, \quad q_m(x) = \frac{\partial^m q(x,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}.$$

Пусть $Q^{(n,p)}$, $Q^{(n,s)}$ — вектор-функции, компоненты $Q_i^{(n,p)}$, $Q_i^{(n,s)}$, $i = 1,2,3$, которых для $n = 1,2,\dots$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} Q_i^{(n,p)} &= -\sum_{j=1}^3 \sum_{m=2}^{n+1} \left[\kappa_{ij}^m(\alpha^{(n-m,p)},\tau_p)\frac{\partial\tau_p}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\kappa_{ij}^{m-1}(\alpha^{(n-m,p)},\tau_p)\right], \\ Q_i^{(n,s)} &= -\sum_{j=1}^3 \sum_{m=2}^{n+1} \left[\kappa_{ij}^m(\alpha^{(n-m,s)},\tau_s)\frac{\partial\tau_s}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\kappa_{ij}^{m-1}(\alpha^{(n-m,s)},\tau_s)\right]. \end{aligned}\tag{10}$$

Примем, что $Q^{(0,p)} = 0$, $Q^{(0,s)} = 0$.

Обозначим через

$$\zeta^p = (\zeta_1^p, \zeta_2^p, \zeta_3^p) = -c_p^2(y)\tau_p(x,y)\nabla_y\tau_p(x,y),$$

$$\zeta^s = (\zeta_1^s, \zeta_2^s, \zeta_3^s) = -c_s^2(y)\tau_s(x,y)\nabla_y\tau_s(x,y)$$

римановы координаты точки x относительно точки y в метриках $d\tau_p = |dx|/c_p(x)$ и $d\tau_s = |dx|/c_s(x)$ соответственно, и

$$J_p(x,y) = \det\left(\frac{\partial\zeta^p}{\partial x}\right), \quad J_s(x,y) = \det\left(\frac{\partial\zeta^s}{\partial x}\right)$$

— якобианы преобразований от римановых координат к декартовым. Определим скалярную функцию $A^{(p)}(x,y)$ и матрицу $T^{(s)}(x,y)$ равенствами

$$A^{(p)}(x,y) = \frac{\sqrt{J_p(x,y)}}{4\pi\tau_p(x,y)c_p^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_p(x,y)} \frac{p_0(\xi)+2q_0(\xi)}{\lambda(\xi)+2\mu(\xi)}\,d\tau_p'\right), \tag{11}$$

$$T^{(s)}(x,y) = \frac{\mathscr{S}(x,y)\sqrt{J_s(x,y)}}{4\pi\tau_s(x,y)c_s^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}} \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_s(x,y)} \frac{q_0(\xi)}{\mu(\xi)}\,d\tau_s'\right). \tag{12}$$

В этих равенствах ξ — переменная точка геодезических $\Gamma_p(x,y)$, $\Gamma_s(x,y)$ соответственно, $\tau_p' = \tau_p(\xi,y)$, $\tau_s' = \tau_s(\xi,y)$, $\mathscr{S}(x,y)$ — матричная экспонента:

$$\mathscr{S}(x,y) = \exp\left\{\int\limits_{\Gamma_s(x,y)} (\nabla \ln c_s(\xi))^t\,d\xi\right\},$$

в которой $(\nabla \ln c_s(\xi))^t$ — вектор-столбец, а $d\xi = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ — вектор-строка и их умножение выполняется по правилам алгебры матриц.

Лемма 1. *Пусть $(\rho,\lambda,\mu,p,q) \in \mathscr{P}$, $y \in \partial B_0$. Тогда решение задачи (1)–(3) представимо в виде асимптотического ряда*

$$u(x,t,y) = \sum_{k=-1}^{\infty} [\alpha^{(k,p)}(x,y)\theta_k(t-\tau_p(x,y)) + \alpha^{(k,s)}(x,y)\theta_k(t-\tau_s(x,y))], \tag{13}$$

в котором $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ являются функциями класса $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^6 \setminus \{(y,y)\})$ и при $|x-y| < \varepsilon$ определены равенствами (7), (8), а при $|x-y| > \varepsilon$ вычисляются по формулам

$$\alpha^{(k,p)}(x,y) = c_p(x)[A^{(k,p)}(x,y)\nabla\tau_p(x,y) + \nabla\tau_p(x,y) \times B^{(k,p)}(x,y)],$$

$$\alpha^{(k,s)}(x,y) = c_s(x)[A^{(k,s)}(x,y)\nabla\tau_s(x,y) + \nabla\tau_s(x,y) \times B^{(k,s)}(x,y)],$$

в которых

$$A^{(-1,p)}(x,y) = -(f^0 \cdot \nabla_y\tau_p(x,y))A^{(p)}(x,y), \quad B^{(-1,p)}(x,y) = 0, \tag{14}$$

$$B^{(-1,s)}(x,y) = -(f^0 \times \nabla_y\tau_s(x,y))T^{(s)}(x,y), \quad A^{(-1,s)}(x,y) = 0, \tag{15}$$

а последующие коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам

$$A^{(n-1,p)}(x,y) = \left[\frac{A^{(n-1,p)}(\xi_p(x,y),y)}{A^{(p)}(\xi_p(x,y),y)} + \int\limits_{\Gamma_p(x,\xi_p(x,y))} \frac{R^{(n,p)}(\xi,y)}{2A^{(p)}(\xi,y)}\,d\tau_p'\right]A^{(p)}(x,y),$$
$$n \geq 1,$$

$$B^{(n,p)}(x,y) = \frac{\lambda+2\mu}{\rho(\lambda+\mu)}\big(c_pQ^{(n,p)} \times \nabla\tau_p - \big[\mu\Delta\tau_p + \nabla\mu\cdot\nabla\tau_p - q_0c_p^{-2}\big]B^{(n-1,p)}$$
$$-c_p\big[2\mu(\nabla\tau_p\cdot\nabla)\alpha^{(n-1,p)} + \nabla\big((\lambda+\mu)c_p^{-1}A^{(n-1,p)}\big) - c_p^{-1}A^{(n-1,p)}\nabla\mu\big] \times \nabla\tau_p\big),\ n \geq 0,$$

$$B^{(n-1,s)}(x,y) = \Big[B^{(n-1,s)}(\xi_s(x,y),y)T^{(s)}(\xi_s(x,y),y)$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_s(x,\xi_s(x,y))} R^{(n,s)}(\xi,y)T^{(s)}(\xi,y)\,d\tau_s'\Big](T^{(s)})^{-1}(x,y), \quad n \geq 1,$$

$$A^{(n,s)}(x,y) = \frac{c_s^2}{\lambda+\mu}\big\{\big[(\lambda+\mu)\operatorname{div}\alpha^{(n-1,s)} + \nabla\mu\cdot\alpha^{(n-1,s)} - (p_0+q_0)c_s^{-1}A^{(n-1,s)}\big]c_s^{-1}$$
$$+\big[\mu\Delta\tau_s + \nabla\mu\cdot\nabla\tau_s - q_0c_s^{-2}\big]A^{(n-1,s)} + \big[2\mu c_s(\nabla\tau_s\cdot\nabla)\alpha^{(n-1,s)}$$
$$+ c_s\nabla\big((\lambda+\mu)c_s^{-1}A^{(n-1,s)}\big) - A^{(n-1,s)}\nabla\mu - c_sQ^{(n,s)}\big]\cdot\nabla\tau_s\big\}, \quad n \geq 0.$$

В этих формулах через $\xi_p(x,y)$, $\xi_s(x,y)$ *обозначены точки пересечения геодезических* $\Gamma_p(x,y)$ *и* $\Gamma_s(x,y)$ *соответственно со сферой* $|x-y|=\varepsilon$, *скалярная функция* $R^{(n,p)}$ *и вектор-функция* $R^{(n,s)}$ *определены равенствами*

$$R^{(n,p)} = \frac{1}{\rho}\big(c_p Q^{(n,p)}\cdot\nabla\tau_p - \big[(\lambda+\mu)c_p^{-1}\operatorname{div}(c_p\nabla\tau_p\times B^{(n-1,p)}) + \nabla\mu\cdot(\nabla\tau_p\times B^{(n-1,p)}) + 2\mu(\nabla\tau_p\times B^{(n-1,p)})\cdot\nabla\ln c_p\big]\big),$$

$$R^{(n,s)} = \frac{1}{\rho}\{c_s Q^{(n,s)} + A^{(n-1,s)}[(\lambda+2\mu)\nabla\ln c_s - \nabla\lambda] - (\lambda+\mu)\nabla A^{(n-1,s)}\}\times\nabla\tau_s,$$

кроме того,

$$\frac{A^{(n-1,p)}(\xi_p(x,y),y)}{A^{(p)}(\xi_p(x,y),y)} = -\frac{2(f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y))[c_p(y)]^n}{|\xi_p(x,y)-y|^n}\begin{cases}1, & n=1,2,\\ 0, & n>2,\end{cases}$$

$$B^{(n-1,s)}(\xi_s(x,y),y)T^{(s)}(\xi_s(x,y),y) = -\frac{(f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y))[c_s(y)]^n}{|\xi_s(x,y)-y|^n}\begin{cases}1, & n=1,2,\\ 0, & n>2.\end{cases}$$

Используем лемму 1 для вычисления некоторой вспомогательной серии функций по заданной равенством (4) функции $f(x,y,t)$. Пусть

$$\hat f(x,y,t) = \int_0^t f(x,y,z)\,dz, \quad t>0.$$

Для фиксированных $x\in\partial B_0$, $y\in\partial B_0$, $x\neq y$, обозначим

$$[\hat f]_{t=t_0}(x,y) = \lim_{t=t_0+0}\hat f(x,y,t) - \lim_{t=t_0-0}\hat f(x,y,t).$$

Из формул (14), (15) следует $A^{(-1,p)}\neq 0$, если $f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y)\neq 0$, а $B^{(-1,s)}\neq 0$, если $f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y)\neq 0$. Для каждой фиксированной точки $y\in\partial B_0$ равенство $f^0\cdot\nabla_y\tau_s(x,y)=0$ возможно только в тех точках $x\in\partial B_0$, которые соответствуют геодезическим $\Gamma_p(x,y)$, выходящим из y в направлениях, ортогональных вектору f^0. Совокупность таких точек x образует кривую $l(y)$, лежащую на ∂B_0. Равенство $f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y)=0$ при фиксированной точке $y\in\partial B_0$ возможно только в той единственной точке $x\in\partial B_0$, в которой геодезическая $\Gamma_s(x,y)$, коллинеарная в точке y вектору f^0, пересекает ∂B_0.

Во всех тех точках, в которых

$$f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y)\neq 0, \quad f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y)\neq 0,$$

имеют место равенства

$$\tau_p(x,y) = \inf\{t_0 \mid t_0>0,\ [\hat f]_{t=t_0}(x,y)\neq 0\},$$

$$\tau_s(x,y) = \inf\{t_0 \mid t_0>\tau_p(x,y),\ [\hat f]_{t=t_0}(x,y)\neq 0\}.$$

В силу гладкости функций $\tau_p(x,y)$, $\tau_s(x,y)$ они определены этими равенствами для всех $(x,y)\in\partial B_0\times\partial B_0$. Кроме того, для $m=0,1,2,\dots$ имеют место равенства

$$\left[\frac{\partial^m\hat f(x,y,t)}{\partial t^m}\right]_{t=\tau_p(x,y)} = \alpha^{(m-1,p)}(x,y), \quad \left[\frac{\partial^m\hat f(x,y,t)}{\partial t^m}\right]_{t=\tau_s(x,y)} = \alpha^{(m-1,s)}(x,y).$$

Таким образом, верна следующая

Лемма 2. *Данные обратной задачи однозначно определяют для всех* $(x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0$ *функции* $\tau_p(x, y)$, $\tau_s(x, y)$ *и бесконечную цепочку коэффициентов* $\alpha^{(k,p)}(x, y)$, $\alpha^{(k,s)}(x, y)$, *входящих в разложение* (13).

Заметим, что функции $\tau_p(x, y)$, $\tau_s(x, y)$ однозначно определяются заданием скоростей распространения продольной и поперечной волн соответственно, т. е. заданием $c_p(x)$, $c_s(x)$, а функции $\alpha^{(n,p)}(x, y)$, $\alpha^{(n,s)}(x, y)$ — заданием $c_p(x)$, $c_s(x)$, и функций $p_k(x)$, $q_k(x)$ для всех $k \le n + 1$. Поэтому вместо исходной обратной задачи можно рассматривать задачу о построении функций $c_p(x)$, $c_s(x)$ и $p_k(x)$, $q_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, внутри B_ε по функциям $\tau_p(x, y)$, $\tau_s(x, y)$, $\alpha^{(k,p)}(x, y)$, $\alpha^{(k,s)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, заданным для $(x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0$. Эта новая задача распадается на последовательность задач: сначала можно найти $c_p(x)$ по заданной функции $\tau_p(x, y)$, а $c_s(x)$ по функции $\tau_s(x, y)$, а затем рекуррентным образом найти $p_n(x)$ и $q_n(x)$, используя совокупность $\alpha^{(k,p)}(x, y)$, $\alpha^{(k,s)}$ для значений $-1 \le k \le n - 1$.

Задача об определении $c_p(x)$ внутри B_0 по функции $\tau_p(x, y)$, $(x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0$, носит название обратной кинематической задачи. В случае двумерного пространства вопросы единственности и устойчивости ее решения изучены в [12], для пространства большей размерности — в [13–15]. Из полученных в этих работах результатов следует единственность определения $c_p(x)$, $c_s(x)$ внутри B_0 по функциям $\tau_p(x, y)$, $\tau_s(x, y)$. Найденные функции $c_p(x)$, $c_s(x)$ определяют $\tau_p(x, y)$, $\tau_s(x, y)$, а также $\Gamma_p(x, y)$, $J_p(x, y)$, $\Gamma_s(x, y)$, $J_s(x, y)$ и матричную экспоненту $\mathscr{S}(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^6$. Кроме того, так как плотность $\rho(x)$ предполагается заданной, $c_p(x)$, $c_s(x)$ однозначно определяют модули упругости $\lambda(x)$, $\mu(x)$.

Рассмотрим задачу об определении функций $p_n(x)$, $q_n(x)$ по совокупности функций $\alpha^{(k,p)}(x, y)$, $\alpha^{(k,s)}(x, y)$, $-1 \le k \le n - 1$, заданных для $(x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0$. При $n = 0$ по заданным функциям $\alpha^{(-1,p)}(x, y)$, $\alpha^{(-1,s)}(x, y)$ вычисляются функции

$$A^{(-1,p)}(x, y) = c_p(x)\alpha^{(-1,p)}(x, y) \cdot \nabla\tau_p(x, y),$$
$$B^{(-1,s)}(x, y) = c_s(x)\alpha^{(-1,s)}(x, y) \times \nabla\tau_s(x, y)$$

в точках $(x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0$.

Используя формулы (11), (14) и (12), (15), приходим к равенствам

$$\int\limits_{\Gamma_p(x,y)} \frac{p_0(\xi) + 2q_0(\xi)}{\lambda(\xi) + 2\mu(\xi)}\, d\tau'_p = g_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0, \tag{16}$$

$$\int\limits_{\Gamma_s(x,y)} \frac{q_0(\xi)}{\mu(\xi)}\, d\tau'_s = h_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial B_0 \times \partial B_0, \tag{17}$$

в которых $g_0(x, y)$, $h_0(x, y)$ — заданные функции, определяемые формулами

$$g_0(x, y) = 2\ln\left\{\frac{4\pi|A^{(-1,p)}(x, y)|\tau_p(x, y)c_p^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}}{|f^0 \cdot \nabla_y\tau_p(x, y)|\sqrt{J_p(x, y)}}\right\},$$

$$h_0(x, y) = 2\ln\left\{\frac{4\pi|B^{(-1,p)}(x, y)|\tau_s(x, y)c_s^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}}{|(f^0 \times \nabla_y\tau_p(x, y))\mathscr{S}(x, y)|\sqrt{J_s(x, y)}}\right\}.$$

Задачи о построении подынтегральных функций в уравнениях (16), (17) являются задачами интегральной геометрии на семействах геодезических линий, вопросы единственности и устойчивости решений которых исследованы в работах [12, 14–16]. Из полученных в них результатов вытекает однозначность определения функций $(p_0+2q_0)/(\lambda+2\mu)$, q_0/μ правыми частями равенств (16), (17). Так как модули упругости $\lambda(x)$, $\mu(x)$ уже найдены, подынтегральные функции однозначно определяют функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$.

Методом индукции доказывается, что при любом $n\geq 1$ функции $p_n(x)$ и $q_n(x)$ однозначно определяются заданными на $(\partial B_0\times\partial B_0)$ коэффициентами $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ для всех $-1\leq k\leq n-1$. Действительно, предположим, что функции $p_k(x)$ и $q_k(x)$ для всех $k\leq n-1$ уже известны и на $(\partial B_0\times\partial B_0)$ заданы $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$ для $-1\leq k\leq n-1$. Тогда известные функции $p_k(x)$ и $q_k(x)$ определяют $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$, $-1\leq k\leq n-2$, для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^6$. Далее, по заданным $\alpha^{(n-1,p)}(x,y)$, $\alpha^{(n-1,s)}(x,y)$ в точках $(x,y)\in\partial B_0\times\partial B_0$ вычисляются функции

$$A^{(n-1,p)}(x,y)=c_p(x)\alpha^{(n-1,p)}(x,y)\cdot\nabla\tau_p(x,y),$$

$$B^{(n-1,s)}(x,y)=c_s(x)\alpha^{(n-1,s)}(x,y)\times\nabla\tau_s(x,y).$$

С другой стороны, лемма 1 определяет формулы для их вычисления через скалярную функцию $R^{(n,p)}(x,y)$ и векторную функцию $R^{(n,s)}(x,y)$, в которые неявным образом входят $p_n(x)$, $q_n(x)$. Несложные вычисления показывают, что верны следующие представления для этих функций:

$$R^{(n,p)}(x,y)=-\frac{p_n(x)+2q_n(x)}{\lambda(x)+2\mu(x)}A^{(-1,p)}(x,y)+\overline{R}^{(n,p)}(x,y),$$

$$R^{(n,s)}(x,y)=-\frac{q_n(x)}{\mu(x)}B^{(-1,s)}(x,y)+\overline{R}^{(n,s)}(x,y),$$

в которых $\overline{R}^{(n,p)}(x,y)$, $\overline{R}^{(n,s)}(x,y)$ зависят только от $p_k(x)$ и $q_k(x)$ для $k\leq n-1$ и от $\alpha^{(k,p)}(x,y)$, $\alpha^{(k,s)}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^6$, для $-1\leq k\leq n-2$ и, следовательно, известны. Поэтому приходим к равенствам

$$\int\limits_{\Gamma_p(x,y)}\frac{p_n(\xi)+2q_n(\xi)}{\lambda(\xi)+2\mu(\xi)}\,d\tau_p'=g_n(x,y),\quad (x,y)\in\partial B_0\times\partial B_0, \tag{18}$$

$$\int\limits_{\Gamma_s(x,y)}\frac{q_n(\xi)}{\mu(\xi)}\,d\tau_s'=h_n(x,y),\quad (x,y)\in\partial B_0\times\partial B_0, \tag{19}$$

в которых $g_n(x,y)$, $h_n(x,y)$ — заданные функции, определяемые формулами

$$g_n(x,y)=\frac{2}{|(f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y))|}\biggl[\frac{A^{(n-1,p)}(x,y)}{A^{(p)}(x,y)}-\frac{A^{(n-1,p)}(\xi_p(x,y),y)}{A^{(p)}(\xi_p(x,y),y)} - \int\limits_{\Gamma_p(x,\xi_p(x,y))}\frac{\overline{R}^{(n,p)}(\xi,y)}{2A^{(p)}(\xi,y)}\,d\tau_p'\biggr],$$

$$h_n(x,y)=\frac{2}{|(f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y))\mathscr{S}(x,y)|}\biggl[B^{(n-1,s)}(x,y)T^{(s)}(x,y) - B^{(n-1,s)}(\xi_s(x,y),y)T^{(s)}(\xi_s(x,y),y)-\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_s(x,\xi_s(x,y))}\overline{R}^{(n,s)}(\xi,y)T^{(s)}(\xi,y)\,d\tau_s'\biggr].$$

При выводе соотношений (18), (19) учтено, что $p_n(x) = q_n(x) = 0$ на той части геодезических $\Gamma_p(x, y)$, $\Gamma_s(x, y)$, которые принадлежат области $B_0 \setminus B_\varepsilon$.

Возникающие задачи о построении решений уравнений (18), (19) вполне аналогичны задачам интегральной геометрии для функций $p_0(x)$, $q_0(x)$. Отсюда вытекает однозначность их решения. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $(\rho, \lambda, \mu, p, q) \in \mathscr{P}$. *Тогда данные* (4) *однозначно определяют функции* $c_p(x)$, $c_s(x)$, $\partial^k p(x,t)/\partial t^k|_{t=0} \equiv p_k(x)$, $\partial^k q(x,t)/\partial t^k|_{t=0} \equiv q_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *в* B_ε.

Из теоремы 1 в качестве следствия вытекает теорема единственности решения обратной задачи.

Теорема 2. *Пусть* $(\rho, \lambda, \mu, p, q) \in \mathscr{P}$ *и функции* $p(x,t)$, $q(x,t)$ *аналитичны по переменной* t *для* $t \in [0, T)$, $T > 0$. *Тогда данные* (4) *однозначно определяют функции* $c_p(x)$, $c_s(x)$ *для* $x \in B_\varepsilon$ *и* $p(x,t)$, $q(x,t)$ *для* $(x,t) \in (B_\varepsilon \times [0,T))$.

Заметим, что в случае, когда $p(x,t)$, $q(x,t)$ являются полиномами по переменной t, для их построения требуется найти только конечное число функций $p_k(x)$, $q_k(x)$. Для вычисления этих функций достаточно использовать конечное лучевое разложение решения задачи (1)–(3). Для этого достаточно, чтобы коэффициенты уравнения (1) имели конечную гладкость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
2. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.
3. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязко-упругости // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 246–253.
4. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 3. С. 310–313.
5. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
6. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
7. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
8. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1401–1412.
9. *Романов В. Г.* Задача об определения ядра в уравнении вязкоупругости // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 1. С. 18–20.
10. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
11. *Romanov V. G.* An asymptotic expansion for a solution to viscoelasticity equations // Eurasian J. Math. Computer Appl. 2013. V. 1, N 1. P. 42–62.
12. *Мухометов Р. Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.
13. *Мухометов Р. Г., Романов В. Г.* К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 41–44.
14. *Бернштейн И. Н., Гервер М. Л.* О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмики // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 2. С. 302–305.
15. *Бейлькин Г. Я.* Устойчивость и единственность решения обратной кинематической задачи сейсмики в многомерном случае // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука, 1979. С. 3–6.

16. *Романов В. Г.* Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 2. С. 290–293.

Статья поступила 31 января 2014 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru