Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 517.946.9

О СИСТЕМЕ МАКСВЕЛЛА ПРИ ИМПЕДАНСНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ С ПАМЯТЬЮ

М. В. Урев

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в ограниченной области с гладкой границей на конечном временном интервале с новыми граничными условиями с памятью. В подходящих функциональных пространствах определяется и исследуется несамосопряженный оператор, порождаемый оператором Максвелла при граничном условии с памятью. Операторным методом доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи.

Ключевые слова: система Максвелла, оператор Максвелла, граничные условия с памятью, дробные интегралы и производные, операторный метод.

1. Введение

Исследованию свойств оператора Максвелла и системы уравнений Максвелла при краевых условиях идеальной проводимости, а в случае гармонической временной зависимости при краевых условиях М. А. Леонтовича [1] посвящено большое количество работ (см., например, [2–5] и имеющуюся там литературу).

Наряду с этим прикладной и теоретический интерес имеет также проблема исследования начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла и соответствующего оператора Максвелла при произвольной временной зависимости с корректно поставленными и имеющими естественный физический смысл импедансными краевыми условиями. В [6, 7] граничные условия М. А. Леонтовича для комплексных амплитуд гармонического по времени электромагнитного поля (эмп) формально ставятся для системы Максвелла и в случае произвольной временной зависимости.

В [8–11] рассматривается начально-краевая задача для системы Максвелла при краевых условиях с памятью по времени. Однако такие краевые условия отличаются от рассматриваемых в данной работе и к тому же при гармонической зависимости от времени не переходят в условия М. А. Леонтовича. Для доказательства теорем существования и единственности решения в [8–11] применяются преобразование Лапласа и методы теории полугрупп.

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла и соответствующего оператора Максвелла в ограниченной области при импедансном краевом условии с временной памятью, полученном автором в [12]. Это граничное условие позволяет по теореме Умова — Пойтинга приближенно учитывать диссипацию энергии эмп из области через границу с большой проводимостью при произвольной временной зависимости эмп от времени. В случае гармонической зависимости эмп от времени это граничное условие переходит в классическое импедансное условие М. А. Леонтовича для комплексных амплитуд эмп [1, 12]. Для доказательства теоремы существования и единственности решения применяется операторный метод в пространстве соленоидальных функций, близкий к методу работы [13, гл. 4]. Применение операторного метода основано на установленных в данной работе свойствах оператора Максвелла с рассматриваемыми граничными условиями с памятью.

2. Необходимые определения и утверждения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $S \in C^2(S)$. При $T > 0$ введем обозначения: $Q_T = \Omega \times (0, T)$ — цилиндр, $S_T = S \times (0, T)$ — боковая поверхность цилиндра Q_T, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к S. Стандартные операции векторного анализа $\nabla(= \mathrm{grad})$, div, rot исходя из контекста понимаются как в обычном смысле, так и в смысле теории распределений.

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в непроводящей области Ω:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \mathrm{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{J}$ — плотность тока источника электромагнитного поля, ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, c — скорость света.

К уравнениям (1) и (2) добавляем нулевые начальные условия

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3}$$

и краевые условия с памятью

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{\mathbf{H}(\mathbf{x}, \xi) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})\, d\xi}{\sqrt{t - \xi}} \quad \text{на } S_T, \tag{4}$$

где $\times$ означает векторное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_\tau$ — касательная составляющая вектора $\mathbf{v}$ на S: $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$, а $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что граница S является однородным проводником с магнитной проницаемостью μ и большой проводимостью σ.

Будем считать, что $\varepsilon = \mu = 1$. Случай, когда ε и μ являются гладкими положительными функциями и $\varepsilon(\mathbf{x}) \geq \varepsilon_0 > 0$, $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$, требует в дальнейших рассуждениях незначительных изменений. Случай ненулевых в (3) начальных условий $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ таких, что $\mathbf{E}_{0\tau}|_S = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_{0\tau}|_S = \mathbf{0}$, сводится путем замены искомых функций $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ на $\widehat{\mathbf{E}}, \widehat{\mathbf{H}}$ так, что $\mathbf{E} = \widehat{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} = \widehat{\mathbf{H}} + \mathbf{H}_0$, к задаче (1), (2) для $\widehat{\mathbf{E}}, \widehat{\mathbf{H}}$ с нулевыми начальными условиями и измененной правой частью.

Введем используемые в данной статье функциональные гильбертовы пространства. Жирным шрифтом будем обозначать пространства векторных функций, а простым — скалярных функций. Различные оценочные постоянные обозначаются через C с индексами или без индексов. Скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega)^3$ определяется как

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 = \int\limits_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega).$$

Такое же обозначение $(\cdot,\cdot)_0$ будем использовать и для скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение в $(\mathbf{L}_2(\Omega))^2$ определяется как

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_0 = (\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)_0 + (\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)_0, \quad \mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2),\ \mathbf{v}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\in(\mathbf{L}_2(\Omega))^2.$$

Через $\mathbf{L}_2(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство $L_2(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega))$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{Q_T} = \int\limits_0^T (\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t))_0\,dt, \quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(Q_T).$$

Скалярное произведение в $(\mathbf{L}_2(Q_T))^2$ между элементами $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ и $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ определяется как

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_{Q_T} = (\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)_{Q_T} + (\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)_{Q_T}.$$

В $\mathbf{L}_2(\Omega)$ определим подпространство $\mathbf{J}(\Omega)$ как замыкание в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множества $\widetilde{\mathbf{J}}(\Omega)$ гладких соленоидальных векторных функций. В $\mathbf{L}_2(Q_T)$ определим подпространство $\mathbf{J}(Q_T)=L_2(0,T;\mathbf{J}(\Omega))$. Далее, пусть $\mathscr{J}(Q_T)=\mathbf{J}(Q_T)\times\mathbf{J}(Q_T)$.

Для функции $f(t)$, определенной на интервале $(0,T)$, через $\big(I^{1/2}_{0+}f\big)(t)$ и $\big(I^{1/2}_{T-}f\big)(t)$ будем обозначать правосторонний и левосторонний дробные интегралы порядка 1/2 Римана — Лиувилля, а через $\big(D^{1/2}_{0+}f\big)(t)$ и $\big(D^{1/2}_{T-}f\big)(t)$ — дробные производные справа и слева порядка 1/2 Римана — Лиувилля [14]. По определению имеем

$$\big(I^{1/2}_{0+}f\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t-\xi}}, \quad \big(D^{1/2}_{0+}f\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t-\xi}}, \quad t>0, \tag{5}$$

$$\big(I^{1/2}_{T-}f\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^T \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi-t}}, \quad \big(D^{1/2}_{T-}f\big)(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi-t}}, \quad t<T. \tag{6}$$

Теперь граничное условие (4) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E}_\tau(\mathbf{x},t) = \alpha\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{H}\big)(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{на } S_T, \tag{7}$$

либо в другом эквивалентном виде

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \alpha^{-1}\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{E}_\tau\big)(\mathbf{x},t) \quad \text{на } S_T, \tag{8}$$

где $\alpha=\sqrt{\frac{\mu}{4\pi\sigma}}$, а индекс t в операторах дробного интегродифференцирования указывает на их действие по переменной t по формуле (5) или (6). Уравнение (8) есть уравнение Абеля, а (7) представляет его решение [14].

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$. Для $s\in\mathbb{R}$ через $H^s(D)$ обозначим пространство Соболева с нормой $\|\cdot\|_{s,D}$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{s,D}$, опуская D в очевидных случаях. Когда $s=0$, полагаем $H^0(D)=L_2(D)$. Из [15, теорема 1.11.4] следует, что продолжение нулем вне $(0,T)$ на все $\mathbb{R}$ функций $\varphi\in H^{1/4}(0,T)$ до функций $\Phi:\varphi=\Phi$ на $(0,T)$ является непрерывным отображением $H^{1/4}(0,T)$ в $H^{1/4}(\mathbb{R})$:

$$\|\varphi\|_{1/4,(0,T)} \le \|\Phi\|_{1/4,\mathbb{R}} \le C_1\|\varphi\|_{1/4,(0,T)}, \quad \varphi\in H^{1/4}(0,T),$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от φ. Данное утверждение позволяет ввести в пространстве $H^{1/4}(0,T)$ норму следующим образом:

$$\|\varphi\|_{1/4,(0,T)} \equiv \|\Phi\|_{1/4,\mathbb{R}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+\omega^2)^{1/4} |\widehat{\Phi}(\omega)|^2 \, d\omega \right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $\widehat{\Phi}$ — преобразование Фурье функции Φ:

$$\widehat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{x}} \Phi(\mathrm{x}) \, d\mathrm{x}.$$

В $H^{1/4}(0,T)$ эквивалентной норме (9) является норма $|\cdot|_{1/4,(0,T)}$ [16]:

$$|\varphi|_{1/4,(0,T)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\omega|^{1/2} |\widehat{\Phi}(\omega)|^2 \, d\omega \right)^{1/2},$$

а в $H^{-1/4}(0,T)$ для функций $\psi \in L_2(0,T)$ эквивалентной обычной норме сопряженного пространства является норма $|\cdot|_{-1/4,(0,T)}$ [16]:

$$|\psi|_{-1/4,(0,T)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\omega|^2)^{-1/4} |\widehat{\Psi}(\omega)|^2 \, d\omega \right)^{1/2}.$$

Далее в очевидных ситуациях вместо Φ или Ψ будем писать φ или ψ.

Нам понадобится следующий результат из работы [16].

Лемма 1. (i) *Оператор $D_{0+}^{1/2}$ осуществляет изоморфизм $H^{1/4}(0,T)$ на $H^{-1/4}(0,T)$, и существует такая константа $C_1 > 0$, что*

$$\left(D_{0+}^{1/2}\varphi, \varphi\right)_{0,(0,T)} \geq C_1 \|\varphi\|^2_{1/4,(0,T)}, \quad \varphi \in H^{1/4}(0,T). \tag{10}$$

(ii) *Оператор $I_{0+}^{1/2}$ осуществляет изоморфизм пространства $H^{-1/4}(0,T)$ на $H^{1/4}(0,T)$, и имеет место неравенство*

$$\left(I_{0+}^{1/2}\varphi, \varphi\right)_{0,(0,T)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi|^2_{-1/4,(0,T)}, \quad \varphi \in L_2(0,T). \tag{11}$$

Замечание 1. В левой части неравенства (10) скалярное произведение в $L_2(0,T)$ реализует отношение двойственности между $H^{1/4}(0,T)$ и $H^{-1/4}(0,T)$.

Замечание 2. Неравенства (10) и (11) остаются справедливыми, если в (10) оператор $D_{0+}^{1/2}$ заменить на $D_{T-}^{1/2}$, а в неравенстве (11) $I_{0+}^{1/2}$ заменить на $I_{T-}^{1/2}$.

Лемма 1 позволяет определить в $H^{1/4}(0,T)$ подпространства $E_{0+}^{1/2}(0,T) := I_{0+}^{1/2}(L_2(0,T))$ и $E_{T-}^{1/2}(0,T) := I_{T-}^{1/2}(L_2(0,T))$. Классы $E_{0+}^{1/2}(0,T)$ и $E_{T-}^{1/2}(0,T)$ состоят из функций $f(t)$ и $g(t)$, представимых соответственно левосторонним и правосторонним дробными интегралами порядка $1/2$ от квадратично суммируемых функций:

$$f(t) = \left(I_{0+}^{1/2}\varphi\right)(t), \quad g(t) = \left(I_{T-}^{1/2}\psi\right)(t), \quad \varphi, \psi \in L_2(0,T).$$

В данной работе будут использоваться следующие соотношения для дробных интегралов и производных (см. [14]):

$$D_{0+}^{1/2} I_{0+}^{1/2} f = f,\ f \in L_2(0,T), \quad I_{0+}^{1/2} D_{0+}^{1/2} g = g,\ g \in E_{0+}^{1/2}(0,T),$$

$$\int_0^T f(t)\big(I_{0+}^{1/2} g\big)(t)\,dt = \int_0^T g(t)\big(I_{T-}^{1/2} f\big)(t)\,dt, \quad f, g \in L_2(0,T),$$

$$\int_0^T f(t)\big(D_{0+}^{1/2} g\big)(t)\,dt = \int_0^T g(t)\big(D_{T-}^{1/2} f\big)(t)\,dt, \quad f \in E_{T-}^{1/2}(0,T),\ g \in E_{0+}^{1/2}(0,T).$$

Если $f \in E_{0+}^{1/2}(0,T)$, то $D_{0+}^{1/2} f = D_{0+}^{1/2} I_{0+}^{1/2} \varphi = \varphi \in L_2(0,T)$. Класс $E_{0+}^{1/2}(0,T)$ снабдим новой нормой $\|\cdot\|_{E_{0+}^{1/2}}$:

$$\|f\|_{E_{0+}^{1/2}} = \big\|D_{0+}^{1/2} f\big\|_0, \quad f \in E_{0+}^{1/2}(0,T).$$

Пространство $E_{0+}^{1/2}(0,T)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(f,g)_{E_{0+}^{1/2}} = \big(D_{0+}^{1/2} f, D_{0+}^{1/2} g\big)_{L_2(0,T)}.$$

Для $f \in E_{0+}^{1/2}(0,T)$ по теореме Планшереля имеем

$$\|f\|_{E_{0+}^{1/2}}^2 = \big\|D_{0+}^{1/2} f\big\|_0^2 = \big\|\widehat{D_{0+}^{1/2} f}\big\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} |\omega| |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$$

Применяя неравенство (см., например, доказательство леммы 3.1 в [16])

$$\|f\|_{0,(0,T)} \le C|f|_{1/4,(0,T)}, \quad f \in H^{1/4}(0,T),$$

и неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|f|_{1/4,(0,T)} \le C\|f\|_{E_{0+}^{1/2}}, \quad f \in E_{0+}^{1/2}(0,T).$$

Таким образом, пространство $E_{0+}^{1/2}(0,T)$ непрерывно вкладывается в $H^{1/4}(0,T)$. Для $E_{0+}^{1/2}(0,T)$ сопряженным является $E_{T-}^{-1/2}(0,T) := D_{T-}^{1/2}(L_2(0,T))$ и отношение двойственности реализуется через скалярное произведение в $L_2(0,T)$:

$$\langle f, g\rangle_{E_{0+}^{1/2} \times E_{T-}^{-1/2}} = (f,g)_0 = \big(I_{0+}^{1/2}\varphi, D_{T-}^{1/2}\psi\big)_0 = \big(D_{0+}^{1/2} I_{0+}^{1/2}\varphi, \psi\big)_0 = (\varphi,\psi)_0,$$

$$f = I_{0+}^{1/2}\varphi \in E_{0+}^{1/2}(0,T), \quad g = D_{T-}^{1/2}\psi \in E_{T-}^{-1/2}(0,T), \quad \varphi,\psi \in L_2(0,T).$$

Здесь $D_{T-}^{1/2}\psi$ для $\psi \in L_2(0,T)$ понимается в обобщенном смысле, т. е. как выполнение интегрального равенства (см. [14, с. 130]):

$$\big(D_{T-}^{1/2}\psi, \varphi\big)_0 = \big(\psi, D_{0+}^{1/2}\varphi\big)_0, \quad \varphi \in C_{0+}^{\infty}([0,T]),$$

где

$$C_{0+}^{\infty}([0,T]) = \{\varphi : \varphi(t) \in C^{\infty}([0,T]),\ \varphi^{(k)}(0) = 0,\ k = 0,1,2,\dots\}.$$

Пусть X — гильбертово пространство. Введем гильбертовы пространства $H^{1/4}(0,T;X)$ и $H^{-1/4}(0,T;X)$ с нормами

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{1/4}(0,T;X)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+\omega^2)^{1/4} \|\hat{\mathbf{v}}(\omega)\|_X^2 \, d\omega \right)^{1/2},$$

$$|\mathbf{u}|_{H^{-1/4}(0,T;X)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+\omega^2)^{-1/4} \|\hat{\mathbf{u}}(\omega)\|_X^2 \, d\omega \right)^{1/2}$$

и скалярными произведениями$(\cdot,\cdot)_{1/4,(0,T;X)}$ и $(\cdot,\cdot)_{-1/4,(0,T;X)}$ соответственно. Скалярное произведение в $L_2(0,T;X)$ обозначим через $(\cdot,\cdot)_{0,(0,T;X)}$.

Для функций $\mathbf{u} : (0,T) \to X$ справедлив аналог леммы 1.

Лемма 2. (i) *Оператор* $D_{0+,t}^{1/2}$ *осуществляет изоморфизм пространства* $H^{1/4}(0,T;X)$ *на* $H^{-1/4}(0,T;X)$, *и существует такая константа* $\widetilde{C}_1 > 0$, *что*

$$\left(D_{0+,t}^{1/2}\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_{0,(0,T;X)} \geq \widetilde{C}_1 \|\mathbf{u}\|_{1/4,(0,T;X)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^{1/4}(0,T;X). \tag{12}$$

(ii) *Оператор* $I_{0+,t}^{1/2}$ *осуществляет изоморфизм пространства* $H^{-1/4}(0,T;X)$ *на* $H^{1/4}(0,T;X)$, *и имеет место неравенство*

$$\left(I_{0+,t}^{1/2}\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_{0,(0,T;X)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{u}|_{-1/4,(0,T;X)}^2, \quad \mathbf{u} \in L_2(0,T;X). \tag{13}$$

Относительно утверждений леммы 2 справедливы естественные аналоги замечаний 1 и 2 к лемме 1.

Аналогично скалярному случаю определяем пространство $E_{0+}^{1/2}(0,T;X) := I_{0+,t}^{1/2}(L_2(0,T;X))$ с обозначением нормы, как в скалярном случае $\|\cdot\|_{E_{0+}^{1/2}}$:

$$\|\mathbf{v}\|_{E_{0+}^{1/2}} = \left(\int\limits_0^T \left\| D_{0+,t}^{1/2} \mathbf{v}(t,\cdot) \right\|_X^2 dt \right)^{1/2}, \quad \mathbf{v} \in E_{0+}^{1/2}(0,T;X).$$

Введем сокращенные обозначения для необходимых пространств:

$$\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)\},$$

$$\mathbf{Xf}_1 = L_2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(S)), \quad \mathbf{Xf}_2 = E_{0+}^{1/2}(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(S)),$$

$$\mathbf{XF}_1 = L_2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \mathbf{XF}_2 = E_{0+}^{1/2}(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \mathbf{XF} = \mathbf{XF}_1 \times \mathbf{XF}_2,$$

$$\mathbf{U}_1 = L_2(0,T;\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)), \quad \mathbf{U}_2 = E_{0+}^{1/2}(0,T;\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)), \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2,$$

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{XF}} = \left(\|\mathbf{F}_1\|_{\mathbf{XF}_1}^2 + \|\mathbf{F}_2\|_{\mathbf{XF}_2}^2\right)^{1/2}, \quad \mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} \in \mathbf{XF},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} = \left(\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{U}_1}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{U}_2}^2\right)^{1/2}, \quad \mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{U}.$$

Такой выбор нормировки декартова произведения гильбертовых пространств $\mathbf{XF}_1 \times \mathbf{XF}_2$ и $\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$ обеспечивает выполнение следующих равенств для сопряженных пространств (см. [17, с. 209]):

$$(\mathbf{XF}_1 \times \mathbf{XF}_2)^* = \mathbf{XF}_1^* \times \mathbf{XF}_2^*, \quad (\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2)^* = \mathbf{U}_1^* \times \mathbf{U}_2^*.$$

3. Характеризация в смысле следов граничных условий (4)

Лемма 3. *Если $S \in C^2$, то отображение $\gamma_{1/2} : \mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \to \mathbf{u}_{1\tau} - \alpha D^{1/2}_{0+,t}(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n})$ из $C^\infty_{0+}(0,T; \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}))^2$ в $C^\infty_{0+}(0,T; \mathbf{C}^1(S))$ может быть продолжено по непрерывности до линейного непрерывного отображения (также обозначаемого через $\gamma_{1/2}$) из $\mathbf{U}$ в $L_2(0,T; \mathbf{H}^{-1/2}(S))$.*

Доказательство. Для каждого $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{U}$ определим над пространством $\mathbf{Xf}_1$ линейный непрерывный функционал $\varrho_\mathbf{u}$. Каждой $\mathbf{f}_1(\mathbf{x},t) \in \mathbf{Xf}_1$ сопоставим векторную функцию $\mathbf{f}_2(\mathbf{x},t) \in \mathbf{Xf}_2$ с помощью следующего равенства:

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x},t) = \alpha^{-1}\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big)(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

из которого следует, что

$$\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_2\big)(\mathbf{x},t) = \alpha^{-1}\mathbf{f}_1(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{14}$$

Для п. в. $t \in (0,T)$ с помощью некоторого непрерывного линейного оператора продолжения из $\mathbf{H}^{1/2}(S)$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ получим функцию $\mathbf{F}_1(\mathbf{x},t) \in \mathbf{XF}_1$ такую, что $\mathbf{F}_1|_{S_T} = \mathbf{f}_1$. По $\mathbf{F}_1$ определим в Q_T функцию $\mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{x},t) = \alpha^{-1}\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{F}_1\big)(\mathbf{x},t) \times \tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

где $\tilde{\mathbf{n}}$ — гладкое продолжение нормали $\mathbf{n}$ с границы S в область Ω. Из равенства

$$\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{F}_1\big)(\mathbf{x},t) \times \tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{x})|_{S_T} = \big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big)(\mathbf{x},t) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

следует, что $\mathbf{F}_2|_{S_T} = \mathbf{f}_2$. Из непрерывности оператора $I^{1/2}_{0+}$ в $L_2(0,T)$ [14, с. 53] и непрерывности оператора продолжения из $\mathbf{H}^{1/2}(S)$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ получим

$$\|\mathbf{F}_i\|_{\mathbf{XF}_i} \le C\|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{Xf}_1}, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

где константа C не зависит от выбора вектора $\mathbf{f}_1$. Каждому вектору $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{Xf}_1$ поставлена в соответствие пара $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\} \in \mathbf{XF}$, след которой на S_T удовлетворяет краевому условию (14). Линейный функционал $\varrho_\mathbf{u} : \mathbf{Xf}_1 \to \mathbb{R}$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\varrho_\mathbf{u}(\mathbf{f}_1) = -\alpha \int\limits_{Q_T} \big[\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 \cdot \big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{F}_2\big) - \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{rot}\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{F}_2\big)\big]\,d\mathbf{x}dt \\ - \alpha \int\limits_{Q_T} \big[\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 \cdot \big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_2\big) - \mathbf{F}_1 \cdot \operatorname{rot}\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_2\big)\big]\,d\mathbf{x}dt.\end{aligned} \tag{16}$$

Значение функционала $\varrho_\mathbf{u}(\mathbf{f}_1)$ на элементе $\mathbf{f}_1$ не зависит ни от выбора оператора продолжения, т. е. от выбора $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$, ни от нормальной компоненты вектора $\mathbf{f}_1$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, неравенство (15) и определения норм в пространствах $\mathbf{U}$ и $\mathbf{XF}$, получим оценку

$$|\varrho_\mathbf{u}(\mathbf{f}_1)| \le C_1\|\mathbf{u}\|_\mathbf{U}\|\mathbf{F}\|_\mathbf{XF} \le C_2\|\mathbf{u}\|_\mathbf{U}\|\mathbf{f}_1\|_{\mathbf{Xf}_1}, \quad \mathbf{f}_1 \in \mathbf{Xf}_1,$$

из которой следует, что функционал $\varrho_\mathbf{u}$ ограничен на пространстве $\mathbf{Xf}_1$ и норма $\varrho_\mathbf{u}$ не превосходит $C_2\|\mathbf{u}\|_\mathbf{U}$. Значит, существует элемент $\gamma_{1/2}(\mathbf{u}) \in (\mathbf{Xf}_1)^* = L_2(0,T; \mathbf{H}^{-1/2}(S))$ такой, что

$$\varrho_\mathbf{u}(\mathbf{f}_1) = (\gamma_{1/2}(\mathbf{u}), \mathbf{f}_1)_{S_T}, \quad \mathbf{f}_1 \in \mathbf{Xf}_1,$$

где $(\cdot,\cdot)_{S_T}$ — скалярное произведение между $\mathbf{Xf}_1$ и $(\mathbf{Xf}_1)^*$. Таким образом, определено линейное отображение $\mathbf{u} \to \gamma_{1/2}(\mathbf{u})$ пространства $\mathbf{U}$ в $(\mathbf{Xf}_1)^*$. Оно непрерывно, так как $\|\gamma_{1/2}(\mathbf{u})\|_{(\mathbf{Xf}_1)^*} \le C_2\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}$. Если $\mathbf{u} \in C_{0+}^{\infty}(0,T;\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}))^2$, то, применяя формулу Грина к (16) и граничное условие (14) для функций $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, получим

$$\varrho_{\mathbf{u}}(\mathbf{f}_1) = \alpha \int\limits_{S_T} \big[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \cdot D_{0+,t}^{1/2}\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \times \mathbf{n} \cdot D_{0+,t}^{1/2}\mathbf{u}_2\big]\, dSdt$$

$$= \alpha \int\limits_{S_T} \left[\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{n})\frac{1}{\alpha} + \mathbf{f}_1 \times \mathbf{n} \cdot D_{0+,t}^{1/2}\mathbf{u}_2\right] dSdt$$

$$= \int\limits_{S_T} \big[\mathbf{u}_{1\tau} - \alpha D_{0+,t}^{1/2}(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n})\big] \cdot \mathbf{f}_1\, dSdt$$

и, следовательно, $\gamma_{1/2}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{1\tau} - \alpha D_{0+,t}^{1/2}(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{n})$. $\square$

4. Определение оператора Максвелла $\mathscr{A}$ и его свойства

Пусть

$$\operatorname{Ker}(\gamma_{1/2}) = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \in \mathbf{U} : \gamma_{1/2}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \text{ — ядро оператора } \gamma_{1/2},$$

$$\mathscr{J}_{1/2}(Q_T) := L_2(0,T;\mathbf{J}(\Omega)) \times E_{0+}^{1/2}(0,T;\mathbf{J}(\Omega)),$$

$$\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T) := E_{0+}^{1/2}(0,T;\mathbf{J}(\Omega)) \times L_2(0,T;\mathbf{J}(\Omega)),$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)} = \big(\|\mathbf{v}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|\mathbf{v}_2\|^2_{E_{0+}^{1/2}}\big)^{1/2}, \quad \mathbf{v} \in \mathscr{J}_{1/2}(Q_T),$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)} = \big(\|\mathbf{u}_1\|^2_{E_{0+}^{1/2}} + \|\mathbf{u}_2\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\big)^{1/2}, \quad \mathbf{u} \in \breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T).$$

Определим неограниченный оператор Максвелла $\mathscr{A} : \mathscr{J}_{1/2}(Q_T) \to \breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$. В качестве области определения $D(\mathscr{A})$ оператора $\mathscr{A}$ примем линеал

$$D(\mathscr{A}) = \operatorname{Ker}(\gamma_{1/2}) \cap \mathscr{J}_{1/2}(Q_T).$$

На элементах $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\} \in D(\mathscr{A})$ имеем

$$\mathscr{A}\mathbf{u} = \{\operatorname{rot}\mathbf{u_2}, -\operatorname{rot}\mathbf{u_1}\}.$$

Линеал $D(\mathscr{A})$ плотен в $\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)$. Это следует из того, что в $\mathbf{J}(\Omega)$ плотно множество гладких соленоидальных функций с нулевой тангенциальной составляющей (см. [2]). Имея в виду плотность $\mathbf{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ в $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ (см. [18, теорема 2.10]), нетрудно видеть, что в $D(\mathscr{A})$ плотно множество $C_0^1(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}) \times C_{0+}^1(0,T;\widetilde{\mathbf{J}})$ по норме пространства $\mathbf{U} \cap \mathscr{J}_{1/2}(Q_T)$. Здесь

$$C_{0+}^1(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}) = \{\mathbf{v} \in C^1(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}) : \mathbf{v}(\mathbf{x},0) = \mathbf{0}\}.$$

Лемма 4. *Оператор $\mathscr{A}$ замкнутый.*

Доказательство. Пусть последовательность $\mathbf{u}_n = \{\mathbf{u}_{n1}, \mathbf{u}_{n2}\} \in D(\mathscr{A})$ такова, что $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ в $\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)$ (тем более сходится в $\mathscr{J}(Q_T)$) и $\mathscr{A}\mathbf{u}_n = \{\operatorname{rot}\mathbf{u_{n2}}, -\operatorname{rot}\mathbf{u_{n1}}\} \to \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ в $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ (тем более сходится в $\mathscr{J}(Q_T)$). Тогда из определения обобщенного ротора в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ следует, что $\mathbf{u} \in L_2(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega))^2$ и $\mathbf{v} = \mathscr{A}\mathbf{u}$. Более того, из определения и полноты пространства $E^{1/2}_{0+}(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega))$ вытекает, что $\mathbf{u}_2 \in E^{1/2}_{0+}(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega))$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\gamma_{1/2}) \ni \mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ в $\mathbf{U}$ и из замкнутости ядра $\operatorname{Ker}(\gamma_{1/2})$ в $\mathbf{U}$ получаем $\gamma_{1/2}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Итак, $\mathbf{u} \in D(\mathscr{A})$, и по определению оператор $\mathscr{A}$ замкнут. $\square$

Отождествляя по теореме Рисса $\mathbf{J}(\Omega)$ с $(\mathbf{J}(\Omega))^*$, получим

$$\big(E^{1/2}_{0+}(0, T; \mathbf{J}(\Omega))\big)^* = E^{-1/2}_{T-}(0, T; \mathbf{J}(\Omega)).$$

$$\mathbf{U}^*_1 = L_2(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)), \quad \mathbf{U}^*_2 = E^{-1/2}_{T-}(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)).$$

Тогда

$$(\mathscr{J}_{1/2}(Q_T))^* = L_2(0, T; \mathbf{J}(\Omega)) \times E^{-1/2}_{T-}(0, T; \mathbf{J}(\Omega)),$$

$$(\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T))^* = E^{-1/2}_{T-}(0, T; \mathbf{J}(\Omega)) \times L_2(0, T; \mathbf{J}(\Omega)).$$

Определим оператор $\mathscr{B} : (\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T))^* \to (\mathscr{J}_{1/2}(Q_T))^*$ так, что

$$D(\mathscr{B}) = \operatorname{Ker}(\gamma^*_{1/2}) \cap (\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T))^*,$$

$$\mathscr{B}\mathbf{v} = \{-\operatorname{rot}\mathbf{v}_2, \operatorname{rot}\mathbf{v}_1\}, \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \in D(\mathscr{B}).$$

Здесь $\gamma^*_{1/2}$ обозначает отображение следа, аналогичное $\gamma_{1/2}$ в лемме 2. Точнее, отображение $\gamma^*_{1/2}$, определенное на гладких векторах как

$$\gamma^*_{1/2}(\{\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}) = \mathbf{v}_{1\tau} + \alpha D^{1/2}_{T-,t}(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}) \quad \text{на } S_T,$$

может быть непрерывно продолжено до отображения

$$\gamma^*_{1/2} : \mathbf{V} \equiv L_2(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)) \times E^{1/2}_{T-}(0, T; \mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)) \to L_2(0, T; \mathbf{H}^{-1/2}(S)).$$

Нетрудно видеть, что в $D(\mathscr{B})$ плотно множество $C^1_0(0, T; \widetilde{\mathbf{J}}) \times C^1_{T-}(0, T; \widetilde{\mathbf{J}})$ по норме пространства $\mathbf{V} \cap (\mathscr{J}_{1/2}(Q_T))^*$, где

$$C^1_{T-}(0, T; \widetilde{\mathbf{J}}) = \{\mathbf{v} \in C^1(0, T; \widetilde{\mathbf{J}}) : \mathbf{v}(\mathbf{x}, T) = \mathbf{0}\}.$$

Будем считать, что отношение двойственности между пространствами $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ и $(\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T))^*$, а также между $\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)$ и $(\mathscr{J}_{1/2}(Q_T))^*$ реализовано через скалярное произведение в $\mathscr{J}(Q_T)$ и совпадает со скалярным произведением в $(\mathbf{L}_2(Q_T))^2$.

Лемма 5. *Операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ сопряжены друг к другу, т. е.*

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{Q_T} = \langle \mathbf{u}, \mathscr{B}\mathbf{v}\rangle_{Q_T}, \quad \mathbf{u} \in D(\mathscr{A}),\ \mathbf{v} \in D(\mathscr{B}).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in D(\mathscr{A})$ и $\mathbf{v} \in D(\mathscr{B})$ — пределы по соответствующим нормам гладких функций $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ из плотных в $D(\mathscr{A})$ и в $D(\mathscr{B})$

множеств соответственно. Тогда по формуле Грина получим

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k\rangle_{Q_T} - \langle \mathbf{u}_k, \mathscr{B}\mathbf{v}_k\rangle_{Q_T} = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [-(\operatorname{rot}\mathbf{u}_{k1}\cdot\mathbf{v}_{k2} - \mathbf{u}_{k1}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_{k2})$$

$$+ (\operatorname{rot}\mathbf{u}_{k2}\cdot\mathbf{v}_{k1} - \mathbf{u}_{k2}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_{k1})]\,d\Omega dt = \int\limits_{S_T} (\mathbf{u}_{k1}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{k2} - \mathbf{u}_{k2}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{k1})\,dSdt$$

$$= -\int\limits_{S_T} \big[\mathbf{u}_{k1\tau} - \alpha D^{1/2}_{0+,t}(\mathbf{u}_{k2}\times\mathbf{n})\big]\cdot(\mathbf{v}_{k2}\times\mathbf{n})\,dSdt = 0.$$

Здесь в предпоследнем равенстве использована следующая выкладка:

$$-\int\limits_{S_T} \mathbf{u}_{k2}\times\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{k1}\,dSdt = \alpha\int\limits_{S_T} (\mathbf{u}_{k2}\times\mathbf{n})\cdot D^{1/2}_{T-,t}(\mathbf{v}_{k2}\times\mathbf{n})\,dSdt$$

$$= \alpha\int\limits_{S_T} D^{1/2}_{0+,t}(\mathbf{u}_{k2}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{v}_{k2}\times\mathbf{n})\,dSdt.$$

Таким образом, для каждого натурального k имеет место равенство

$$\langle \mathscr{A}\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k\rangle_{Q_T} = \langle \mathbf{u}_k, \mathscr{B}\mathbf{v}_k\rangle_{Q_T}.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в последнем равенстве, получим требуемый в лемме 5 результат. □

Замечание 3. В лемме 5 не утверждается, что оператор $\mathscr{B}$ является максимальным сопряженным к $\mathscr{A}$. Для дальнейшего достаточно того, что $D(\mathscr{B})$ плотно в $(\check{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T))^*$.

Лемма 6. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\int\limits_0^T \langle \mathscr{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_0(t)\,dt \le 0, \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\in D(\mathscr{A}), \tag{17}$$

$$\int\limits_0^T \langle \mathscr{B}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle_0(t)\,dt \le 0, \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\in D(\mathscr{B}). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть для $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}\in D(\mathscr{A})\times D(\mathscr{B})$ функции $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ такие же, как в лемме 5. Тогда по формуле Грина имеем

$$\int\limits_0^T \langle \mathscr{A}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k\rangle_0(t)\,dt = \int\limits_0^T \langle(\operatorname{rot}\mathbf{u}_{k2}, -\operatorname{rot}\mathbf{u}_{k1}), (\mathbf{u}_{k1}, \mathbf{u}_{k2})\rangle_0(t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_S \mathbf{n}\times\mathbf{u}_{k2}\cdot\mathbf{u}_{k1}\,dSdt.$$

Используя граничное условие (8) с переобозначением $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ на $(\mathbf{u}_{k1},\mathbf{u}_{k2})$ и неравенство (13), получим

$$\int\limits_0^T \langle \mathscr{A}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k\rangle_0(t)\,dt = -\alpha^{-1}\int\limits_S \int\limits_0^T \big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_{k1\tau}\big)(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}_{k1}(\mathbf{x},t)\,dtdS \le 0.$$

Предельный переход при $k \to \infty$ устанавливает неравенство (17) для $\mathbf{u} \in D(\mathscr{A})$. Аналогично доказывается неравенство (18). $\square$

Пусть $\mathbf{g} \in L_2(0,T;\mathbf{H}^{1/2}(S))$. Рассмотрим в цилиндре Q_T вспомогательную краевую задачу для системы уравнений Лапласа:

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad i = 1,2, \tag{19}$$

с нестационарными граничными условиями с памятью

$$\left[(\nabla\varphi_1)_\tau - \alpha D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2) \times \mathbf{n}\right]\Big|_{S_T} = (\mathbf{g} \times \mathbf{n})|_{S_T}. \tag{20}$$

Наряду с задачей (19), (20) рассмотрим в области Ω стационарную краевую задачу для системы уравнений Лапласа:

$$\Delta\psi_i = 0, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

$$[(\nabla\psi_1)_\tau - \alpha\nabla\psi_2 \times \mathbf{n}]|_S = (\tilde{\mathbf{g}} \times \mathbf{n})|_S, \quad \tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{H}^{1/2}(S). \tag{22}$$

Из теории разрешимости эллиптических краевых задач (см., например, [19]) следует, что система (21) является правильной эллиптической, а граничные операторы в (22) удовлетворяют условию накрывания Лопатинского. Кроме того, для задачи (21), (22) имеет место [3]

Лемма 7. *Для каждой вектор-функции* $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbf{H}^{l+1/2}(S)$ $(l \geq 0)$ *существует решение задачи* (21), (22), *причем* $\psi_1, \psi_2 \in H^{l+2}(\Omega)$.

В [3] для решения задачи (21), (22) получена оценка градиентов в норме пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Лемма 8. *Для достаточно гладких решений задачи* (21), (22) *справедливы неравенства*

$$\int\limits_\Omega |\nabla\psi_i|^2\, d\Omega \leq C \int\limits_S |\tilde{\mathbf{g}}_\tau|^2\, dS, \quad i = 1,2. \tag{23}$$

Для задачи (19), (20) имеют место аналогичные результаты.

Лемма 9. *Для каждой вектор-функции* $\mathbf{g} \in L_2(0,T;\mathbf{H}^{l+1/2}(S))$ $(l \geq 0)$ *существует решение задачи* (19), (20), *причем* $\varphi_1 \in L_2(0,T;H^{l+2}(\Omega))$, $\varphi_2 \in E^{1/2}_{0+}(0,T;H^{l+2}(\Omega))$ *и справедливы неравенства*

$$\|\nabla\varphi_i\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq C\|\mathbf{g}_\tau\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}, \quad i = 1,2. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\{\psi_1(\mathbf{x},t), \psi_2(\mathbf{x},t)\}$ — однопараметрическое семейство решений задачи (21), (22) с правой частью $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ вместо $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ в граничном условии (22). Тогда ввиду равенства $D^{1/2}_{0+,t} I^{1/2}_{0+,t}\psi_2 = \psi_2$ функции φ_1 и φ_2, определяемые как $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = I^{1/2}_{0+,t}\psi_2$, дают решение задачи (19), (20) и удовлетворяют ввиду леммы 7 указанным в лемме 9 условиям регулярности.

Для φ_1 неравенство (24) следует непосредственно из (23). Из (23) также вытекает, что

$$\left\|D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2)\right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq C\|\mathbf{g}_\tau\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}. \tag{25}$$

Докажем неравенство (24) для φ_2. По определению функции φ_2 имеем

$$\varphi_2(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\psi_2(\mathbf{x},\xi)\, d\xi}{\sqrt{t-\xi}}. \tag{26}$$

Оператор дробного интегрирования $I_{0+}^{1/2}$ ограничен в пространстве $L_2(0,T)$, и для всех $f \in L_2(0,T)$ имеет место оценка (см. [14])

$$\big\|I_{0+}^{1/2} f\big\|^2_{L_2(0,T)} \le \frac{4T}{\pi}\|f\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{27}$$

Из формулы (26) получим

$$|\nabla\varphi_2(\mathbf{x},t)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\nabla\psi_2(\mathbf{x},\xi)\,d\xi}{\sqrt{t-\xi}}\right|^2 = \big|I_{0+,t}^{1/2}(\nabla\psi_2)(\mathbf{x},t)\big|^2.$$

Применение неравенства (27) дает

$$\int\limits_0^T |\nabla\varphi_2(\mathbf{x},t)|^2\,dt = \int\limits_0^T \big|I_{0+,t}^{1/2}(\nabla\psi_2)(\mathbf{x},t)\big|^2\,dt \le \frac{4T}{\pi}\int\limits_0^T |\nabla\psi_2(\mathbf{x},t)|^2\,dt.$$

После интегрирования последнего неравенства по $\mathbf{x} \in \Omega$ и применения неравенства (23) получается требуемая оценка (24) для φ_2. $\square$

Следствие. *Из леммы* 9 *следует, что решение задачи* (19), (20) *определяется единственным образом с точностью до постоянных слагаемых.*

Лемма 10. *Для любой функции* $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ *из плотного в* $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ *множества* $C^1_{0+}(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}(\Omega)) \times C^1_0(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}(\Omega))$ *существует единственный элемент* $\mathbf{u} \in D(\mathscr{A})$ *такой, что* $\mathscr{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} \in C^1_{0+}(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}(\Omega)) \times C^1_0(0,T;\widetilde{\mathbf{J}}(\Omega))$, покажем существование и единственность элемента $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \in D(\mathscr{A})$ такого, что $\mathscr{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, т. е. что для всех $t \in (0,T)$ в области Ω выполняются равенства

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_1, \quad -\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_2, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_1 = \operatorname{div}\mathbf{u}_2 = 0, \tag{28}$$

где векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ удовлетворяют граничному условию $\gamma_{1/2}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

В [2] предложен конструктивный способ построения решения $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ уравнений (28) без удовлетворения заданным граничным условиям. В [3] этот прием был использован при доказательстве взаимной однозначности отображения, осуществляемого стационарным оператором Максвелла с граничными условиями М. А. Леонтовича. Приведем формулы, определяющие векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, которые для всех $t \in (0,T)$ являются решениями уравнений (28):

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\bigg[\int\limits_\Omega \frac{-\mathbf{f}_2(\mathbf{y},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} + \int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega} \frac{(\nabla\psi_1)(\mathbf{y},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y}\bigg], \tag{29}$$

где Ω_1 — произвольная область с гладкой границей S_1, содержащая Ω внутри себя; а $\psi_1(\mathbf{x},t)$ для $t \in (0,T)$ есть решение задачи Неймана в области $\Omega_1 \setminus \Omega$:

$$\Delta\psi_1 = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n}\bigg|_S = (\mathrm{f}_2)_n|_S, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n}\bigg|_{S_1} = 0. \tag{30}$$

Аналогично строится в Ω соленоидальный вектор $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\bigg[\int\limits_\Omega \frac{\mathbf{f}_1(\mathbf{y},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} + \int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega} \frac{(\nabla\psi_2)(\mathbf{y},t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y}\bigg], \tag{31}$$

где $\psi_2(\mathbf{x},t)$ для всех $t\in(0,T)$ — решение задачи Неймана в области $\Omega_1\setminus\Omega$:

$$\Delta\psi_2=0,\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n}\Big|_S=-(\mathrm{f}_1)_n\Big|_S,\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial n}\Big|_{S_1}=0. \tag{32}$$

Из [2] следует, что для для всех $t\in(0,T)$ имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_1=-\mathbf{f}_2,\quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_2=\mathbf{f}_1,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}_1=\operatorname{div}\mathbf{v}_2=0.$$

Для однозначного определения функций ψ_1,ψ_2 потребуем, чтобы для всех $t\in(0,T)$

$$\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega}\psi_1(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega}\psi_2(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}=0.$$

Вектор-функция $\mathbf{v}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$, определяемая формулами (29)–(32), является частным решением системы (28). Для того чтобы получить решение системы (28), удовлетворяющее граничному условию $\gamma_{1/2}(\mathbf{u})=\mathbf{0}$, решим в цилиндре Q_T систему уравнений

$$\Delta\varphi_i=0,\quad i=1,2, \tag{33}$$

с граничными условиями

$$\big[(\nabla\varphi_1)_\tau-\alpha D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2)\times\mathbf{n}\big]\big|_{S_T}=\big[\big(\alpha D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1\times\mathbf{n}\big)\times\mathbf{n}\big]\big|_{S_T}. \tag{34}$$

Нетрудно проверить, что функции $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1+\nabla\varphi_1$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2+\nabla\varphi_2$ будут представлять решение задачи (28) с граничным условием $\gamma_{1/2}(\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\})=\mathbf{0}$.

Единственность решения $\mathbf{u}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ следует из того, что если $\operatorname{rot}\mathbf{u}_i=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_i=0$, $i=1,2$ для всех $t\in(0,T)$, то $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}=\{\nabla h_1,\nabla h_2\}$, где h_1,h_2 — гармонические функции, удовлетворяющие системе (19), (20) при $\mathbf{g}=\mathbf{0}$. Тогда из следствия леммы 9 вытекает, что $\mathbf{u}_1=\nabla h_1=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}_2=\nabla h_2=\mathbf{0}$. $\square$

Лемма 11. *Для каждой вектор-функции* $\mathbf{u}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\in D(\mathscr{A})$ *имеет место оценка*

$$\|\mathbf{u}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_2\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\le C\big(\|\operatorname{rot}\mathbf{u}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\big\|D^{1/2}_{0+,t}(\operatorname{rot}\mathbf{u}_2)\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\big). \tag{35}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (35) для гладких вектор-функций $\mathbf{u}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ из плотного в $D(\mathscr{A})$ множества. Пусть $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}=\mathscr{A}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$, т. е. $\mathbf{f}_1=\operatorname{rot}\mathbf{u}_2$, $\mathbf{f}_2=-\operatorname{rot}\mathbf{u}_1$. Для вектор-функции $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ в лемме 10 получено следующее представление:

$$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}=\{\mathbf{v}_1+\nabla\varphi_1,\mathbf{v}_2+\nabla\varphi_2\}, \tag{36}$$

где вектор-функции $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ определяются формулами (29) и (31), а функции φ_1,φ_2 являются решением системы (33), (34). Из (36) получаем, что

$$|\mathbf{u}_1|^2+\big|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_2\big|^2\le 2\big(|\mathbf{v}_1|^2+\big|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_2\big|^2+|\nabla\varphi_1|^2+\big|D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2)\big|^2\big). \tag{37}$$

Вывод L_2-оценок для $\mathbf{v}_1$ и $D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_2$ основан на представлениях (29) и (31), записанных, как в [3], в виде интегралов типа потенциала:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{-\mathbf{f}_2(\mathbf{y},t)\times\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\,d\mathbf{y}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega}\frac{(\nabla\psi_1)(\mathbf{y},t)\times\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\,d\mathbf{y},$$

$$D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_2(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1(\mathbf{y},t)\times\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\,d\mathbf{y}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega}\frac{D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\psi_2)(\mathbf{y},t)\times\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\,d\mathbf{y},$$

где $\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — единичный вектор, направленный из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{y}$. Следуя доказательству оценок в лемме 6 из работы [3], получим наши неравенства в следующем виде:

$$\|\mathbf{v}_1\times\mathbf{n}\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}\le C\|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)},\quad \big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_2\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\le C\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)},$$
$$\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{2\tau}\big\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}\le C\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)},\quad \|\mathbf{v}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\le C\|\mathbf{f}_2\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \tag{38}$$

Для L_2-оценок функций $\nabla\varphi_1$ и $D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2)$ в правой части (37) воспользуемся неравенствами (24) и (25) с $\mathbf{g}_\tau=\alpha D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{2\tau}+\mathbf{v}_1\times\mathbf{n}$, а также неравенствами (38). Находим, что

$$\max\big\{\|\nabla\varphi_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)},\big\|D^{1/2}_{0+,t}(\nabla\varphi_2)\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\big\}\le C\big(\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{2\tau}\big\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}$$
$$+\|\mathbf{v}_1\times\mathbf{n}\|^2_{\mathbf{L}_2(S_T)}\big)\le C\big(\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\big)\le C_1\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \tag{39}$$

Здесь аналогично скалярному случаю использовано неравенство

$$\|\mathbf{f}_1\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\le C_2\big\|D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_1\big\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Из оценок (38) и (39) неравенство (35) следует для гладких функций, а путем предельного перехода для любой функции из $D(\mathscr{A})$. □

Теорема 1. *Оператор $\mathscr{A}$ взаимно однозначно отображает $D(\mathscr{A})$ на $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ и имеет ограниченный обратный оператор $\mathscr{A}^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}\in\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ и $\mathbf{f}_k\to\mathbf{f}$ при $k\to\infty$ по норме $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$, а $\mathbf{f}_k$ — гладкие функции из плотного в $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ множества, как в лемме 10. По лемме 10 для каждого $k\in\mathbb{N}$ существует элемент $\mathbf{u}_k\in D(\mathscr{A})$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{u}_k=\mathbf{f}_k$. Неравенство (35), которое можно записать в виде

$$\|\mathbf{u}_k\|_{\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)}\le C\|\mathbf{f}_k\|_{\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)},$$

показывает, что из сходимости $\mathbf{f}_k$ в $\breve{\mathscr{J}}_{1/2}(Q_T)$ следует сходимость $\mathbf{u}_k\to\mathbf{u}$ в $\mathscr{J}_{1/2}(Q_T)$. По лемме 4 оператор $\mathscr{A}$ замкнут, откуда $\mathbf{u}\in D(\mathscr{A})$ и $\mathscr{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}$. Ограниченность обратного оператора $\mathscr{A}^{-1}$ вытекает из неравенства (35). □

5. Теорема существования и единственности

Полагая $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=(\mathbf{E},\mathbf{H})$, будем рассматривать начально-краевую задачу (1)–(4) как задачу Коши для операторного уравнения в гильбертовом пространстве $\mathscr{J}(Q_T)$ с неограниченным оператором $\mathscr{A}$:

$$\begin{cases}\mathscr{L}\mathbf{u}\equiv\mathbf{u}_t-c\mathscr{A}\mathbf{u}=\mathbf{f},\\ \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{0}.\end{cases} \tag{40}$$

Для операторов $\mathscr{A}$ и $c\mathscr{A}$ все приведенные выше свойства одинаковы, поэтому при рассмотрении вопроса о существовании и единственности решения задачи (40) положительное числовое значение константы c не имеет значения и мы ограничимся случаем $c = 1$.

Считаем, что оператор $\mathscr{L}$ действует в пространстве $\mathscr{J}(Q_T)$.

За область определения оператора $\mathscr{L}$ примем линеал

$$D(\mathscr{L}) = \left\{\mathbf{u} \in D(\mathscr{A}) : \frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathscr{J}(Q_T),\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{0}\right\}. \tag{41}$$

Имеет место включение $D(\mathscr{L}) \subset D(\mathscr{A})$.

Лемма 12. *Для всех* $\mathbf{u} \in D(\mathscr{L})$ *и* $t \in [0, T]$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{u}(t)\|_0^2 \le C \int\limits_0^t \|(\mathscr{L}\mathbf{u})(\xi)\|_0^2 \, d\xi. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in D(\mathscr{L})$. Тогда, очевидно, $\mathscr{L}\mathbf{u} \in \mathscr{J}(Q_T)$. Умножим скалярно в $(\mathbf{L}_2(\Omega))^2$ обе части первого равенства (40) на $\mathbf{u}(\xi)$, $\xi \in [0, T]$, и проинтегрируем по ξ от 0 до $t \in [0, T]$. Тогда получим

$$\int\limits_0^t \langle(\mathscr{L}\mathbf{u})(\xi), \mathbf{u}(\xi)\rangle_0 \, d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{d}{d\xi}\|\mathbf{u}(\xi)\|_0^2 \, d\xi - \int\limits_0^t \langle(\mathscr{A}\mathbf{u})(\xi), \mathbf{u}(\xi)\rangle_0 \, d\xi. \tag{43}$$

Так как по лемме 6

$$\int\limits_0^t \langle(\mathscr{A}\mathbf{u})(\xi), \mathbf{u}(\xi)\rangle_0 \, d\xi \le 0$$

и $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, из (43) находим, что

$$\|\mathbf{u}(t)\|_0^2 \le 2\int\limits_0^t \langle(\mathscr{L}\mathbf{u})(\xi), \mathbf{u}(\xi)\rangle_0 \, d\xi \le \int\limits_0^t \|(\mathscr{L}\mathbf{u})(\xi)\|_0^2 \, d\xi + \int\limits_0^t \|\mathbf{u}(\xi)\|_0^2 \, d\xi,$$

и, применяя лемму Гронуолла, получаем неравенство (42). □

Наряду с оператором $\mathscr{L}$ рассмотрим оператор $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}^*$, где $\mathscr{M}$ — сопряженный к $\mathscr{L}$ оператор, а $\mathscr{L}^*$ — максимальный сопряженный к $\mathscr{L}$ оператор. В качестве области определения оператора $\mathscr{M}$ примем линеал

$$D(\mathscr{M}) = \left\{\mathbf{v} \in D(\mathscr{B}) : \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in \mathscr{J}(Q_T),\ \mathbf{v}|_{t=T} = \mathbf{0}\right\}. \tag{44}$$

Для $\mathbf{v} \in D(\mathscr{M})$ значение $\mathscr{M}\mathbf{v}$ определяется как $\mathscr{M}\mathbf{v} = -\mathbf{v}_t - \mathscr{B}\mathbf{v}$. Нетрудно видеть, что $D(\mathscr{M}) \subset D(\mathscr{B})$ и $D(\mathscr{M})$ плотно в $\mathscr{J}(Q_T)$.

Покажем, что оператор $\mathscr{L}$ в результате замыкания расширяется до оператора $\overline{\mathscr{L}}$, область значений которого совпадает со всем $\mathscr{J}(Q_T)$. Это и будет означать, что задача (40) имеет решение $\mathbf{u}$ при любой $\mathbf{f} \in \mathscr{J}(Q_T)$ и это решение $\mathbf{u}$ принадлежит $D(\overline{\mathscr{L}})$.

Возможность расширения оператора $\mathscr{L}$ путем замыкания до оператора $\overline{\mathscr{L}}$ следует из плотности в $\mathscr{J}(Q_T)$ области определения сопряженного к $\mathscr{L}$ оператора $\mathscr{M}$. Действительно, пусть последовательность $\{\mathbf{u}_k\}$ из $D(\mathscr{L})$ сходится к

$\mathbf{0}$ в $\mathscr{J}(Q_T)$, а $\{\mathscr{L}\mathbf{u}_k\}$ сходится к $\mathbf{f}$ в $\mathscr{J}(Q_T)$. Покажем, что тогда $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Это и будет означать для оператора $\mathscr{L}$ возможность расширения путем замыкания до оператора $\overline{\mathscr{L}}$ (см. [20, предложение 2, с. 115]). Умножим скалярно в $\mathscr{J}(Q_T)$ обе части равенства $\mathscr{L}\mathbf{u}_k=\mathbf{f}_k$ на произвольную функцию $\mathbf{v}$ из $D(\mathscr{M})$. Тогда

$$\int\limits_{Q_T}\mathbf{f}_k\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}dt=\int\limits_{Q_T}(\mathbf{u}_{kt}-\mathscr{A}\mathbf{u}_k)\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}dt=\int\limits_{Q_T}\mathbf{u}_k\cdot(-\mathbf{v}_t-\mathscr{B}\mathbf{v})\,d\mathbf{x}dt. \qquad (45)$$

Переходя в (45) к пределу при $k\to\infty$, получим, что

$$\int\limits_{Q_T}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}dt=0,\quad \mathbf{v}\in D(\mathscr{M}).$$

Из плотности $D(\mathscr{M})$ в $\mathscr{J}(Q_T)$ следует равенство $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Таким образом, возможность замыкания оператора $\mathscr{L}$ в $\mathscr{J}(Q_T)$ доказана.

Из неравенства (42) следует, что если $\mathbf{u}_k\in D(\mathscr{L})$ таковы, что $\mathscr{L}\mathbf{u}_k$ сходятся в $\mathscr{J}(Q_T)$, то и сами $\mathbf{u}_k$ сходятся в $\mathscr{J}(Q_T)$ и даже лучше. А именно, $\mathbf{u}_k(t)$ сходятся в $(\mathbf{L}_2(\Omega))^2$ равномерно по t. Из этого можно заключить, что замыкание $\mathscr{L}$ приводит к замыканию области значений $R(\mathscr{L})$ оператора $\mathscr{L}$ в $\mathscr{J}(Q_T)$. Таким образом, $R(\overline{\mathscr{L}})=\overline{R(\mathscr{L})}$ является замкнутым подпространством в $\mathscr{J}(Q_T)$. Из неравенства (42) выводим также, что на $R(\overline{\mathscr{L}})$ определен ограниченный обратный оператор $\overline{\mathscr{L}}^{-1}$.

Теорема 2. *Образ $R(\overline{\mathscr{L}})$ оператора $\overline{\mathscr{L}}$ совпадает со всем $\mathscr{J}(Q_T)$, т. е. $R(\overline{\mathscr{L}})=\mathscr{J}(Q_T)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}\in\mathscr{J}(Q_T)$ и $\mathbf{f}$ ортогонально $R(\overline{\mathscr{L}})$ или, что равносильно, $\mathbf{f}$ ортогонально $R(\mathscr{L})$, т. е.

$$0=\langle\mathbf{f},\mathscr{L}(\mathbf{u})\rangle_{Q_T}=\int\limits_{Q_T}\mathbf{f}\cdot(\mathbf{u}_t-\mathscr{A}\mathbf{u})\,d\mathbf{x}dt,\quad \mathbf{u}\in D(\mathscr{L}). \qquad (46)$$

Покажем, что в этом случае $\mathbf{f}=\mathbf{0}$. Теорема 1 позволяет построить по $\mathbf{f}$ параметрические ($a\in[0,T]$ — параметр) семейства векторов $\{\mathbf{v}_a\}=\{\mathbf{v}_{a1},\mathbf{v}_{a2}\}$ и $\{\mathbf{u}_a\}=\{\mathbf{u}_{a1},\mathbf{u}_{a2}\}$:

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{x},t)=\mathscr{A}^{-1}\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_a\big)(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{u}_a(\mathbf{x},t)=\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_a\big)(\mathbf{x},t), \qquad (47)$$

где для п. в. t

$$\mathbf{f}_a=\begin{cases}\mathbf{0}, & 0\le t\le a,\\ \mathbf{f}(\mathbf{x},t), & a\le t\le T.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{v}_a\in D(\mathscr{A})$ и $\mathbf{v}_a=I^{1/2}_{0+,t}\boldsymbol{\varphi}_a$, где $\boldsymbol{\varphi}_a\in\mathscr{J}(Q_T)$. Покажем, что $\mathbf{u}_a\in D(\mathscr{L})$. Имеем

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt}=D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_a=D^{1/2}_{0+,t}I^{1/2}_{0+,t}\boldsymbol{\varphi}_a=\boldsymbol{\varphi}_a\in\mathscr{J}(Q_T).$$

Осталось установить, что $\mathbf{u}_a\in D(\mathscr{A})$. Для $\mathbf{v}_a$ на S_T выполнено равенство $\gamma_{1/2}(\mathbf{v}_a)=\mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{v}_{a1\tau}(\mathbf{x},t)=\alpha\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\big)(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Тогда для $\mathbf{u}_a=I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_a$ имеем

$$\mathbf{u}_{a1\tau}(\mathbf{x},t)=\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1\tau}\big)(\mathbf{x},t)=\alpha\big(I^{1/2}_{0+,t}D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\big)(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x})$$
$$=\alpha\mathbf{v}_{a2}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x})=\alpha\big(D^{1/2}_{0+,t}\big(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\big)\big)(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x})=\alpha\big(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{u}_{a2}\big)(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

откуда $\gamma_{1/2}(\mathbf{u}_a) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{u}_a \in D(\mathscr{A})$.

Подставим в (46) вместо $\mathbf{u}$ вектор $\mathbf{u}_a$. Тогда для всех $a \in [0, T]$ получим

$$0 = \int_a^T \left\langle \mathbf{f}, \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} - \mathscr{A}\,\mathbf{u}_a \right\rangle_0 dt = \int_a^T \left(\mathbf{f}_1, \frac{d\mathbf{u}_{a1}}{dt} - \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a2}\right)_0 dt$$
$$+ \int_a^T \left(\mathbf{f}_2, \frac{d\mathbf{u}_{a2}}{dt} - \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a1}\right)_0 dt = \int_a^T \left[\left(\mathbf{f}_1, \frac{d\mathbf{u}_{a1}}{dt}\right)_0 + \left(\mathbf{f}_2, \frac{d\mathbf{u}_{a2}}{dt}\right)_0\right] dt$$
$$- \int_a^T (\mathbf{f}_1, \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a2})_0\, dt + \int_a^T (\mathbf{f}_2, \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a1})_0\, dt = J_1 + J_2 + J_3. \quad (48)$$

Покажем, что каждое из трех слагаемых в последнем равенстве (48) неположительно. Для этого приведем необходимые соотношения. Так как $\mathscr{A}\mathbf{v}_a = \{\operatorname{rot}\mathbf{v}_{a2}, -\operatorname{rot}\mathbf{v}_{a1}\}$, из (47) находим, что

$$I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_{a1} = \operatorname{rot}\mathbf{v}_{a2}, \quad I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{f}_{a2} = -\operatorname{rot}\mathbf{v}_{a1},$$

откуда

$$\mathbf{f}_{a1} = \operatorname{rot}\left(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\right), \quad \mathbf{f}_{a2} = -\operatorname{rot}\left(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\right).$$

Из (47) получим формулы для $\mathbf{u}_a$:

$$\mathbf{u}_{a1} = I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}, \quad \mathbf{u}_{a2} = I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{u}_{a1}}{dt} = D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}, \quad \frac{d\mathbf{u}_{a2}}{dt} = D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}_{a1} = \operatorname{rot}\left(I^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\right) = -\int_a^t \mathbf{f}_2\, d\tau, \quad \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a2} = \int_a^t \mathbf{f}_1\, d\tau.$$

Переходим к оценке слагаемых J_1, J_2, J_3 в (48). Применение формулы Грина, граничного условия $\gamma_{1/2}(\mathbf{v}_a) = \mathbf{0}$ и неравенства (12) дают

$$J_1 = \int_a^T \left[\left(\operatorname{rot}\left(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\right), D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\right)_{0,\Omega} - \left(\operatorname{rot}\left(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\right), D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2}\right)_{0,\Omega}\right] dt$$
$$= -\int_S \int_a^T \left(D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a2} \times \mathbf{n} \cdot D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\right) dt dS = -\alpha^{-1} \int_S \int_a^T (\mathbf{v}_{a1})_\tau \cdot D^{1/2}_{0+,t}\mathbf{v}_{a1}\, dt dS \le 0,$$

$$J_2 = -\int_a^T (\mathbf{f}_1, \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a2})_0\, dt = -\int_a^T \left(\mathbf{f}_1, \int_a^t \mathbf{f}_1\, d\tau\right)_0 dt = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_a^T \mathbf{f}_1\, d\tau\right)^2 d\mathbf{x} \le 0,$$

$$J_3 = \int_a^T (\mathbf{f}_2, \operatorname{rot}\mathbf{u}_{a1})_0\, dt = \int_a^T \left(\mathbf{f}_2, -\int_a^t \mathbf{f}_2\, d\tau\right)_0 dt = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_a^T \mathbf{f}_2\, d\tau\right)^2 d\mathbf{x} \le 0.$$

Таким образом, в (48) $J_1 + J_2 + J_3 = 0$ и каждое слагаемое неположительно, значит, каждое слагаемое равно нулю. Тогда

$$\int_a^T \mathbf{f}_1 \, d\tau = \mathbf{0}, \quad \int_a^T \mathbf{f}_2 \, d\tau = \mathbf{0}, \quad a \in [0, T],$$

откуда $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонтович М. А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 5–22.
2. *Быховский Э. Б.* Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы // Вестн. ЛГУ. 1957. № 13. С. 50–66.
3. *Крейн С. Г., Куликов И. М.* Об операторе Максвелла — Леонтовича // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1275–1282.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 6. С. 61–76.
5. *Ammari H., Latiri-Grouz C., Nedelec J.-C.* The Leontovitch boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations // Asympt. Anal. 1998. N 18. P. 33–47.
6. *Raviart P. A., Sonnendruker E.* A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 1996. V. 73. P. 329–372.
7. *Капитонов Б. В.* Об экспоненциальном убывании при $t \to \infty$ решений внешней краевой задачи для системы Максвелла // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 4. С. 469–490.
8. *Fabrizio M., Morro A.* A boundary condition with memory in electromagnetism // Arch. Rational Mech. Anal. 1996. V. 136. P. 359–381.
9. *Nibbi R., Polidoro S.* Exponential decay for Maxwell equations with a boundary memory condition // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 302. P. 30–55.
10. *Kapitonov B. V., Perla Menzala G.* Uniform stabilization for Maxwell's equations with boundary conditions with memory // Asymptot. Anal. 2001. V. 26. P. 91–104.
11. *Nicaise S., Pignotti C.* Energy decay rates for solutions of Maxwell's system with a memory boundary condition // Collect. Math., North America. 2007. V. 58. P. 1–16.
12. *Урев М. В.* Граничные условия для уравнений Максвелла в случае произвольной зависимости от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, № 4. С. 1444–1451.
13. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
16. *Allegretto W., Lin Y., Yang H.* Finite element error estimates for a nonlocal problem in american option valuation // SIAM J. Numer. Anal. 2001. V. 39, N 3. P. 834–857.
17. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
18. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer-Verl., 1986.
19. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 110, № 3. С. 373–415.
20. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Статья поступила 31 января 2012 г.

Урев Михаил Вадимович
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mih.urev2010@yandex.ru