Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 519.21

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ БЛЭКУЕЛЛА ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. А. Боровков, К. А. Боровков

Аннотация. Доказаны аналоги теоремы Блэкуелла для взвешенных функций восстановления. Значительно ослаблены, по сравнению с уже известными, условия на последовательность весов и на скачки в процессе восстановления. Доказательства основаны на использовании интегро-локальных предельных теорем и оценок для вероятностей больших уклонений. Относительно распределения скачков рассмотрены четыре типа условий: (a) распределение имеет конечный второй момент, (b) оно принадлежит области притяжения устойчивого закона, (c) его хвосты принадлежат классу так называемых локально правильно меняющихся функций, (d) оно удовлетворяет моментному условию Крамера. В случаях (a)–(c) предполагается, что последовательность весов удовлетворяет условиям регулярности на скользящие средние, тогда как в случае (d) веса могут изменятся экспоненциально быстро.

Ключевые слова: взвешенная функция восстановления, теорема Блэкуелла, интегро-локальные предельные теоремы, теоремы Стоуна — Шеппа, вероятности больших уклонений, локально постоянная функция, правильно меняющаяся функция.

§ 1. Введение

Одним из примеров, где появляются изучаемые в настоящей заметке объекты, является следующая задача. Пусть $\{\xi_j\}_{j\ge1}$ и $\{\tau_j\}_{j\ge0}$ — независимые последовательности случайных величин (с.в.), причем $\xi_j \overset{d}{=} \xi$ независимы и имеют общую функцию распределения F с конечным средним $\mu := \mathbf{E}\,\xi > 0$, а $\tau_j > 0$ произвольны, $a_j := \mathbf{E}\,\tau_j < \infty$. Положим

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \quad T_n := \sum_{j=0}^{n} \tau_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

и рассмотрим обобщенный процесс восстановления $S_{\nu(t)}$, где $\nu(t) := \inf\{n \ge 0 : T_n > t\}$, $t \ge 0$. Этот процесс, очевидно, описывает движение частицы, которая покоится в нуле на интервале времени $[0, T_0)$, затем изменяет свое положение скачком ξ_1 и остается в новой позиции $S_1 = \xi_1$ в течение интервала $[T_0, T_1)$, затем «прыгает» на величину ξ_2 и т. д. Процессы такого типа часто встречаются в приложениях, например в теории массового обслуживания, в задачах о разорении и др.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00220) и ARC Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems.

Время, проведенное процессом $S_{\nu(t)}$ в заданном полуинтервале

$$\Delta[x) := [x, x+\Delta), \quad x \in \mathbf{R},\ \Delta > 0,$$

равно

$$\tau(\Delta[x)) := \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \,\mathbf{1}(S_n \in \Delta[x)),$$

где $\mathbf{1}(A)$ есть индикатор события A. Представляют интерес изучение поведения математического ожидания этого времени

$$h(x,\Delta) := \mathbf{E}\,\tau(\Delta[x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) \tag{1}$$

и, в частности, его асимптотика при $x \to \infty$.

Заметим также, что если «поменять местами время и пространство» и предположить, что $\xi \geq 0$, то $\tau(\Delta[x))$ будет приращением на интервале $\Delta[x)$ обобщенного процесса восстановления $T_{\eta(x)}$, где $\eta(x)$ есть процесс восстановления, порожденный последовательностью $\{\xi_j\}$. В этом случае предположение $\tau_n > 0$ (и, как следствие, $a_n > 0$) не требуется, так что в дальнейшем будем допускать и отрицательные значения a_n.

Если ряд

$$H(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n < x)$$

сходится, то его сумма $H(x)$ называется *взвешенной функцией восстановления* для последовательности $\{\xi_j\}$. В этом случае $h(x,\Delta) = H(x+\Delta) - H(x)$ есть приращение взвешенной функции восстановления H на интервале $\Delta[x)$. Отметим, однако, что $h(x,\Delta)$ может существовать, даже если ряд $H(x)$ расходится. Так, если веса a_n ограничены, то для конечности $H(x)$ достаточно, чтобы $\mathbf{E}(\xi^-)^2 < \infty$, где $v^- := -\min\{v, 0\}$. Если $a_n \equiv 1$ и $\mathbf{E}(\xi^-)^2 = \infty$, то $H(x) = \infty$ (см., например, [1, § 10.1]). С другой стороны, $h(x,\Delta)$ всегда конечно при условиях $0 < \mu < \infty$, $|a_n| \leq C < \infty$ (это вытекает, в частности, из невозвратности случайного блуждания $\{S_n\}$, см. [2, § VI.10]).

Изучению асимптотики $H(x)$ и $h(x,\Delta)$ при $x \to \infty$ посвящено значительное количество работ. Недавние обзоры результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [3, 4]. Приведем ряд результатов, касающихся, главным образом, поведения $h(x,\Delta)$.

В частном случае, когда $a_n = 1/n$, функцию $H(x)$ называют *гармонической функцией восстановления*. Она близко связана с такими понятиями, как факторизационные тождества, лестничные моменты и высоты и т. п. Этот случай был рассмотрен в [5–8].

В дальнейшем наряду с последовательностями $\{a_n\}$ и другими будем рассматривать соответствующие ступенчатые функции $a_x := a_{\lfloor x \rfloor}$, где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x.

Случай правильно меняющейся функции (п.м.ф.) $a_x = x^\gamma L(x)$, где L — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.), рассмотрен в [9]. В предположении, что $\gamma \geq 0$ и a_x возрастает на бесконечности, было показано, что условие

$$\mathbf{E}(\xi^-)^2 a_{\xi^-} < \infty \tag{2}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $H(x) < \infty$ при всех x (это есть обобщение вышеупомянутых результаты о конечности H при $a_n \equiv 1$), а также что условие (2) необходимо и достаточно для справедливости асимптотики

$$H(x) \sim \frac{x}{\mu(\gamma+1)}\, a_{x/\mu}, \quad x \to \infty. \tag{3}$$

В предположении, что $\gamma \in (-1, 0]$ и a_x убывает на бесконечности, было показано, что соотношение (2) влечет (3).

Здесь и всюду ниже символ $\sim$ означает асимптотическую эквивалентность функций: $f(x) \sim g(x)$, если $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

В [9] показано также, что в случае нерешетчатости ξ и возрастания на бесконечности п.м.ф. a_x с показателем $\gamma \geq 0$ соотношение

$$\mathbf{E}\,\xi^- a_{\xi^-} < \infty \tag{4}$$

эквивалентно асимптотике

$$h(x, \Delta) \sim \frac{\Delta}{\mu}\, a_{x/\mu}, \quad x \to \infty, \tag{5}$$

сравни (3) (аналог этого соотношения справедлив и в арифметическом случае), и что (5) выполняется и в том случае, когда $\gamma \in (-1, 0]$, а a_x убывает на бесконечности (в этих условиях (4) всегда справедливо, если ξ имеет конечное среднее). Ранее эта ситуация анализировалась в [10] (в случае, когда $a_x = x^\gamma$) и [11, 12].

Очевидно, что соотношение (5) и его аналог в арифметическом случае суть прямые обобщения известной теоремы Блэкуелла из теории восстановления, которая описывает асимптотику $h(x, \Delta)$ при $x \to \infty$ в случае, когда $a_n \equiv 1$.

Частный случай $a_n = n!\binom{n+k-1}{k}$ рассмотрен в [13], где получены разложения с тремя членами для $H(x)$ в случае нерешетчатой функции распределения F с конечным моментом второго порядка.

В теореме 2.11 в [14] асимптотика (5) доказана в случае, когда $a_n = L(e^{\sqrt{n}})$, где L — м.м.ф. (в терминологии настоящей работы это эквивалентно предположению, что $\{a_n\}$ ψ-локально постоянна при $\psi(t) = \sqrt{t}$, см. (7) ниже). Более того, эта теорема предполагала также, что $\mathbf{P}(\xi > 0) = 1$, $\mathbf{E}\, e^{\delta\xi} < \infty$ при некотором $\delta > 0$ и что распределение ξ удовлетворяет некоторому условию гладкости (сформулированному в терминах производящей функции моментов), обеспечивающему, в частности, что F равномерно непрерывна.

В [3] в нерешетчатом случае доказано следующее. Если последовательность a_n не убывает, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ и

$$\lim_{s\downarrow 0} \limsup_{x\to\infty} \frac{a_{x(1+s)}}{a_x} = 1,$$

то выполнено (5). В этой работе также показано, что (5) справедливо в случае, когда $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ (при некоторых дополнительных условиях).

В случае, когда последовательность a_n «быстро меняется», асимптотика $h(x, \Delta)$ отлична от (5). Специальный случай $a_n = A^n$ при фиксированном $A > 0$, $\mathbf{P}(\xi \geq 0) = 1$ и F, либо имеющей абсолютно непрерывную компоненту, либо являющейся арифметической, рассмотрен в [15]. Было показано, в частности, что если F имеет конечную производящую функцию моментов и A принадлежит подходящей области значений, то асимптотика $h(x, \Delta)$ также экспоненциальна (точная форма асимптотики приведена ниже в § 4, см. формулы (45), (46) при $b_n \equiv 1$).

Наиболее близкий к проблематике настоящей работы общий результат содержится в теореме 6.1 в [4]: *если последовательность* $\{a_n\}$ *правильно осциллирующая в том смысле, что*

$$\lim_{x,y\to\infty,\ x/y\to 1} \frac{a_x}{a_y} = 1,$$

и при $x \to \infty$ *выполнено*

$$F_+(x) := \mathbf{P}(\xi \geq x) = o\left(\frac{a_x}{A_x}\right), \quad \text{где } A_n := \sum_{j=0}^{n} a_j, \tag{6}$$

то в нерешетчатом случае для любого фиксированного $\Delta > 0$ *справедливо* (5).

Аналогичное (5) соотношение справедливо при тех же предположениях и в арифметическом случае (теорема 3.1 в [4]). Именно эти результаты привлекли наше внимание к задаче об асимптотике $h(x, \Delta)$ при $x \to \infty$, поскольку на их примере стало ясно, что условия, наложенные в [4] на последовательность весов $\{a_n\}$, могут быть значительно ослаблены, коль скоро F принадлежит области притяжения устойчивого закона.

В настоящей работе установлена асимптотика вида (5) при значительно более широких, чем ранее, условиях на $\{a_n\}$, при этом ξ может принимать значения обоих знаков. В § 2 рассмотрены два случая, допускающие совершенно однотипные доказательства с помощью интегро-локальной теоремы Стоуна — Шеппа и ряда оценок для вероятностей больших уклонений из [16]: случай конечной дисперсии и случай, когда распределение F принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2)$. В этих случаях, используя тот факт, что последовательность вероятностей $\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta))$ изменяется по x весьма регулярным образом, мы устанавливаем справедливость (5) в предположении, что последовательность весов обладает свойством так называемого ψ-локального постоянства «в среднем» (см. определение в § 2), а также является в некотором смысле неубывающей или невозрастающей «в среднем». Отметим, что при сделанных предположениях на $\{a_n\}$ упомянутые условия на распределение ξ близки к минимальным для выполнения (5). В § 3 получены необходимые и достаточные условия для выполнения (5) в предположении, что $\mathbf{E}\,\xi^2 < \infty$, а хвосты распределения F локально правильно меняющиеся (см. определение в начале § 3). В § 4 найдена асимптотика $h(x, \Delta)$ в предположении, что F удовлетворяет моментному условию Крамера и $a_n = b_n e^{qn}$, где $\{b_n\}$ есть ψ-локально постоянная последовательность при $\psi(n) = \sqrt{n}$, $q = \mathrm{const} \neq 0$.

В заключение этого параграфа отметим тот очевидный факт, что теоремы Блэкуелла сильнее, чем интегральные теоремы восстановления (см., например, обсуждение иерархии теорем восстановления в [3, § 2.3]). То же самое, в общем, справедливо и в случае взвешенных функций восстановления. Действительно, если $H(0) < \infty$, то

$$H(k\Delta) = H(0) + \sum_{j=0}^{k-1} h(j\Delta, \Delta), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Стало быть, коль скоро известна асимптотика $h(j\Delta, \Delta)$ при $j \to \infty$, можно выводить таковую и для $H(x)$, $x \to \infty$. Очевидно, это может привести к успеху, только если поведение $h(j\Delta, \Delta)$ при $j \to \infty$ «достаточно правильное», например, если выполнена приводимая ниже асимптотика (19), в которой правая часть является п.м.ф. при $x \to \infty$. С другой стороны, как уже отмечалось, может случиться так, что $h(x, \Delta)$ существует, а $H(x) = \infty$ (поскольку мы не ограничиваемся случаем неотрицательных с.в. ξ).

§ 2. Случай, когда второй момент конечен или имеет место сходимость к устойчивому закону, отличному от нормального

Чтобы сформулировать нужные условия на последовательность весов, напомним определение ψ-локально постоянной (ψ-л.п.) функции (см. определение 1.2.7 в [16]). Пусть $\psi(t) \geq 1$ — фиксированная неубывающая функция.

Измеримая функция $g(x) > 0$ называется *ψ-локально постоянной*, если для любого фиксированного $v \in \mathbf{R}$ такого, что $x + v\psi(x) \geq cx$ при некотором $c > 0$ и всех достаточно больших x, справедливо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x + v\psi(x))}{g(x)} = 1. \tag{7}$$

Отметим, что здесь и всюду ниже можно предполагать, что g положительна лишь на бесконечности (т. е. $g(x) > 0$ при всех достаточно больших x), а не всюду положительна. Мы предполагаем положительность всюду для того, чтобы упростить изложение и избежать повторения тривиальных оговорок.

Следует упомянуть родственное понятие медленного изменения по Бёрлингу (см., например, [17, § 2.11]): измеримая функция $g(x) > 0$ называется *медленно меняющейся по Бёрлингу*, если $g(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ и g есть ψ-л.п. при $\psi = g$.

Последовательность $\{u_n\}$ называется *ψ-л.п.*, если функция $g(x) := u_x$ является таковой. Везде в дальнейшем ψ будет правильно меняющейся на бесконечности функцией.

Заметим, что ψ-л.п. функции с $\psi \equiv 1$ иногда называются *локально постоянными*, а «хвосты» распределений с этим свойством — *тяжелыми*, тогда как случай $\psi(x) \equiv x$ соответствует медленно меняющимся функциям. Классы ψ-л.п. функций с иными ψ «заполняют просвет» между классами медленно меняющихся и локально постоянных функций, покрывая целый диапазон зон, в которых функции могут быть локально постоянными. Отметим также, что из теоремы 1 в [18] следует, что при широких предположениях на ψ ψ-л.п. функция будет в терминологии [19] h-нечувствительной при $h \equiv \psi$ (см. определение 2.18 в [19]).

Класс ψ-л.п. функций весьма полно изучен в [18]. В частности, там показано, что при довольно слабых условиях на ψ аналоги теоремы о равномерной сходимости (сходимость в (7) равномерна по $v \in [v_1, v_2]$ при любых вещественных v_i) и теоремы Карамата об интегральном представлении для медленно меняющихся функций справедливы и для ψ-л.п. функций (теоремы 1 и 2 в [18] соответственно).

Условие, что хвост F_+ распределения скачков является ψ-л.п., на самом деле наиболее адекватно при отыскании максимально общих условий, обеспечивающих субэкспоненциальную асимптотику

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n \geq x) \sim nF_+(x) \tag{8}$$

при $x \to \infty$, обусловленную «одним большим скачком», в ситуациях, когда в то же время $n \to \infty$. Ранее было известно, что в случае конечной дисперсии соотношение (8) справедливо при $x/\sqrt{n \ln n} \to \infty$, когда F_+ есть п.м.ф. на бесконечности (аналогичные утверждения выполняются, когда ξ притягиваются к другим устойчивым законам, см. [16, гл. 2–4]). Как показано в теореме B в [18], условие правильного изменения может быть ослаблено до предположения, что F_+ является ψ-л.п. Более точно, в случае конечного второго момента при широких дополнительных предположениях было уставлено следующее. Если g — возрастающая функция такая, что $g(v) \gg \sqrt{v \ln v}$ при $v \to \infty$, и F_+ — ψ-л.п. при $\psi(t) = \sqrt{g^{-1}(t)}$, то (8) остается справедливым при $x \to \infty$, $x \geq g(n)$. Как показано в [16], любое дальнейшее расширение условия, что F_+ — ψ-л.п., в классе «достаточно регулярных» функций невозможно.

Оказывается, что свойство ψ-л.п. является также наиболее естественным общим условием на последовательность весов $\{a_n\}$ при изучении асимптотического поведения функции h, определенной в (1), в предположении, что распределение ξ принадлежит области притяжения устойчивого закона. Действительно, в этом случае в «центральной части» ряда в (1) (дающей основной вклад в сумму) значения a_n будут «почти постоянны» (при условии, что $\psi(n)$ — нормирующая последовательность, обеспечивающая сходимость сумм $S_n - \mu n$) и, стало быть, могут быть заменены «типичным значением» a_n в соответствующем диапазоне.

Более того, поскольку последовательность значений $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x))$ будет согласно интегро-локальным предельным теоремам довольно регулярной, второй сомножитель в слагаемых $a_n\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x))$ будет «почти постоянным» при изменении n внутри довольно длинных интервалов. Стало быть, на самом деле достаточно наложить условие ψ-л.п. на последовательность средних значений величин a_n по таким интервалам, а не на сами a_n.

Чтобы сформулировать этот подход точнее, введем следующие условия на последовательность весов.

Условие $[\boldsymbol{\psi}]$. *Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $[\boldsymbol{\psi}]$, если существует п.м.ф. $d(t)$ такая, что $d(t) = o(\psi(t))$ при $t \to \infty$ и усредненная последовательность*

$$\tilde{a}_n := \frac{1}{d(n)} \sum_{n \leq k < n+d(n)} a_k > 0 \tag{9}$$

является ψ-л.п.

Длину $d(n)$ интервала усреднения можно считать целочисленной величиной.

Последовательности, удовлетворяющие этому условию, будем называть *ψ-л.п. в среднем.* Выбор функции ψ в этом параграфе будет задаваться нормировкой из соответствующей предельной теоремы для сумм S_n.

Любая ψ-л.п. последовательность, очевидно, является ψ-л.п. в среднем и удовлетворяет условию $[\boldsymbol{\psi}]$ при $d(n) \equiv 1$. Простейшим примером ψ-л.п. в среднем последовательности, которая не будет ψ-л.п., является периодическая последовательность $a_n = a_{n-\lfloor n/d \rfloor d}$ с периодом $d \geq 2$ такая, что среди значений $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ есть различные. В этом случае $\tilde{a}_n = \text{const}$, а в качестве $d(n)$ можно брать значения, кратные d. Заметим, что условие $[\boldsymbol{\psi}]$ не исключает присутствия отрицательных a_n в последовательности весов.

Следующие два условия можно назвать условиями *монотонности в среднем.*

Условие $[\psi,\downarrow]$. *Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$, если для этой последовательности справедливо $[\boldsymbol{\psi}]$ и при некоторых $r > 1$ и $c < \infty$ выполняется $|a_k| \le c\tilde{a}_n$ при всех $k > n/r$.*

Условие $[\psi,\uparrow]$. *Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $[\boldsymbol{\psi},\uparrow]$, если для этой последовательности справедливо $[\boldsymbol{\psi}]$ и при некоторых $r > 1$ и $c < \infty$ выполняется $|a_k| < c\tilde{a}_n$ при всех $k < nr$.*

Обозначим через $[\boldsymbol{\psi},\uparrow\cup\downarrow]$ условие, состоящее в том, что для рассматриваемой последовательности выполнено по крайней мере одно из условий $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$ и $[\boldsymbol{\psi},\uparrow]$.

Потребуются также следующие условия на хвосты

$$F_+(t) = \mathbf{P}(\xi \ge t) \quad \text{и} \quad F_-(t) := \mathbf{P}(\xi < -t)$$

распределения скачков. Будем предполагать, что либо

$$\sigma^2 := \mathbf{E}(\xi - \mu)^2 < \infty, \tag{10}$$

либо выполнено условие

Условие $[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]$. *Двусторонний хвост*

$$F_*(t) := F_-(t) + F_+(t)$$

является п.м.ф. с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0,2)$, и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_+(t)}{F_*(t)} =: \frac{1}{2}(\rho + 1) \in [0,1].$$

При выполнении $[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]$ положим

$$b(t) := \inf\{x > 0 :\, F^*(x) < 1/t\}, \quad t > 1 \tag{11}$$

(напомним, что $b(t) = t^{1/\alpha} l(t)$, где $l(t)$ медленно меняется при $t \to \infty$, см., например, теорему 1.1.4(v) в [16]).

Пусть, далее,

$$\psi(t) := \begin{cases} \sigma\sqrt{t}, & \text{если выполнено (10)}, \\ b(t), & \text{если выполнено } [\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда, как известно, при выполнении условия (10) или $[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]$ последовательность распределений нормированных сумм $(S_n - \mu n)/\psi(n)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к соответствующему устойчивому закону (см., например, теорему 1.5.1 в [16]), который мы обозначим через Φ.

Кроме того, справедлива интегро-локальная теорема Стоуна — Шеппа: *если F нерешетчато, то для ошибки аппроксимации $\epsilon_n(x,\Delta)$ в равенстве*

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) = \frac{\Delta}{\psi(n)}\,\phi\biggl(\frac{x - \mu n}{\psi(n)}\biggr) + \frac{\epsilon_n(x,\Delta)}{\psi(n)}, \tag{13}$$

где ϕ есть плотность Φ, выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\Delta\in[\Delta_1,\Delta_2]} \sup_x \bigl|\epsilon_n(x,\Delta)\bigr| = 0 \tag{14}$$

при любых фиксированных $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \infty$ (см., например, теоремы 8.7.1 и 8.8.2 в [1] или теорему 6.1.2 в [16]).

В арифметическом случае (т. е. в случае $\mathbf{P}(\xi \in \mathbf{Z}) = 1$), когда

$$\text{н.о.д.}\{k_1 - k_2 : \mathbf{P}(\xi = k_1)\mathbf{P}(\xi = k_2) > 0\} = 1, \tag{15}$$

справедлив аналог названной теоремы для вероятностей $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k \in \mathbf{Z}$ (теорема Гнеденко, см., например, теоремы 8.7.3 и 8.8.4 в [1] или теорему 6.1.1 в [16]).

Сформулируем основные результаты параграфа.

Теорема 2.1. *Пусть распределение F нерешетчато и для $\{a_n\}$ выполнено условие $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$. Пусть, далее, выполнено одно из следующих условий: либо*

(i) $\mathbf{E}\,\xi^2<\infty$ *и правый хвост F_+ распределения F допускает правильно меняющуюся мажоранту:*

$$F_+(t)\le V(t):=t^{-\alpha}L_V(t),\quad t>0, \tag{16}$$

где $\alpha>2$, $L_V(t)$ — м.м.ф. при $t\to\infty$, такую, что

$$V(x)=o\biggl(\frac{\tilde a_x}{\widetilde A_x}\biggr)\ \text{при } x\to\infty,\quad \widetilde A_n:=\sum_{k\le n}\tilde a_k, \tag{17}$$

либо

(ii) *выполнены условия*

$$[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]\ \text{при некотором } \alpha\in(1,2),\ \ F_+(x)=o\biggl(\frac{\tilde a_x}{\widetilde A_x}\biggr)\ \text{при}\ \ x\to\infty. \tag{18}$$

Тогда для любых фиксированных $0<\Delta_1<\Delta_2<\infty$ справедливо соотношение

$$h(x,\Delta)\sim\frac{\Delta}{\mu}\,\tilde a_{x/\mu},\quad x\to\infty, \tag{19}$$

равномерно по $\Delta\in[\Delta_1,\Delta_2]$.

Замечание 2.1. Условимся писать $f(x)\preccurlyeq g(x)$ при $x\to\infty$, если $f(x)\le cg(x)$ при некотором $c>0$ и всех достаточно больших x. Если выполнено условие

$$A_x\succcurlyeq A_x^*:=\sum_{k\le x}|a_k|\quad\text{при } x\to\infty \tag{20}$$

(это условие близко к $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$ и всегда выполнено при $a_k\ge0$), то (17) можно заменить условием

$$V(x)=o\biggl(\frac{\tilde a_x}{A_x}\biggr)\quad\text{при } x\to\infty. \tag{21}$$

Действительно, если справедливо (20), то при $y=x+d(x)$ имеем

$$A_y\succcurlyeq A_y^*\ge\widetilde A_x^*\ge\widetilde A_x,\quad\text{где } \widetilde A_x^*:=\sum_{n\le x}\tilde a_n^*,\quad \tilde a_n^*:=\frac{1}{d(n)}\sum_{n\le k<n+d(n)}|a_k|.$$

Стало быть, при выполнении $[\boldsymbol{\psi}]$ и (21) выполнено

$$V(x)\preccurlyeq V(y)=o\biggl(\frac{\tilde a_y}{A_y}\biggr)=o\biggl(\frac{\tilde a_x}{A_y}\biggr)=o\biggl(\frac{\tilde a_x}{\widetilde A_x}\biggr),$$

где первое соотношение вытекает из правильности изменения V и того, что $x\sim y$, а третье — из того, что $\{\tilde a_x\}$ является ψ-л.п. Тем самым (17) доказано. Нетрудно видеть также, что достаточным для выполнения (17) является и условие $V(x)=o(\tilde a_x/A_x^*)$.

Замечание 2.2. Из приведенных определений немедленно следует, что для последовательностей $\{a_n\}$, удовлетворяющих $[\boldsymbol{\psi}]$, выражение в правой части (19) может быть заменено на $(\Delta/\mu)a_{x/\mu}$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ сама является ψ-л.п.

Теорема 2.2. *Пусть распределение F нерешетчато и для $\{a_n\}$ выполнено условие $[\boldsymbol{\psi},\uparrow]$. Пусть, далее, выполнено одно из следующих условий: либо*

(i) $\mathbf{E}\,\xi^2<\infty$ *и левый хвост F_- распределения F допускает правильно меняющуюся мажоранту:*

$$F_-(t)\le W(t):=t^{-\beta}L_W(t),\quad t>0, \tag{22}$$

где $\beta>2$, $L_W(t)$ — м.м.ф. при $t\to\infty$, такую, что

$$\sum_{n\ge 0}\tilde a_n W(n)<\infty, \tag{23}$$

либо

(ii) *выполнены условия*

$$[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]\ \text{при некотором}\ \alpha\in(1,2),\qquad \sum_{n\ge 0}\tilde a_n F_-(n)<\infty. \tag{24}$$

Тогда при любых фиксированных $0<\Delta_1<\Delta_2<\infty$ имеет место соотношение (19) *равномерно по $\Delta\in[\Delta_1,\Delta_2]$.*

Замечание 2.3. Если $a_n\ge 0$, то в условиях (23), (24) можно заменить $\tilde a_n$ на a_n. Действительно, так как $d(t)$ и $W(t)$ — п.м.ф., суммируя в (23) коэффициенты при a_n, получим

$$\sum_{n\ge 0}\tilde a_n W(n)=\sum_{n\ge 0}a_n e_n W(n),$$

где $e_n\to 1$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что ряды $\sum\tilde a_n W(n)$ и $\sum a_n e_n W(n)$ сходятся или расходятся одновременно. Нетрудно видеть также, что достаточным условием для выполнения (23) является сходимость ряда $\sum|a_n|W(n)$. Аналогично обстоит дело с условием (24).

Замечание 2.4. При замене условия нерешетчатости F условием арифметичности и (15) утверждения теорем 2.1, 2.2 сохранятся в предположении, что x и Δ целые. Другими словами, в арифметическом случае при целых $x\to\infty$ будет выполнено

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathbf{P}(S_n=x)\sim\frac{1}{\mu}\,\tilde a_{x/\mu}.$$

Доказательство теорем 2.1, 2.2. Положим

$$n_\pm:=\frac{x}{\mu}\pm N\psi(x),\quad m_\pm:=\frac{x}{\mu}\,r^{\pm1}, \tag{25}$$

где $N=N(x)\to\infty$ достаточно медленно при $x\to\infty$ (выбор N будет обсуждаться ниже), $r>1$ — величина из условий $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$, $[\boldsymbol{\psi},\uparrow]$.

Представим $h(x,\Delta)$ в виде суммы

$$h(x,\Delta)=\Sigma_{2-}+\Sigma_{1-}+\Sigma_0+\Sigma_{1+}+\Sigma_{2+}, \tag{26}$$

где величины в правой части (26) суть суммы членов $a_n\mathbf{P}(S_n\in\Delta[x))$ по следующим интервалам изменения индекса суммирования n:

$$\Sigma_{2-}:=\sum_{n<m_-},\ \Sigma_{1-}:=\sum_{m_-\le n<n_-},\ \Sigma_0:=\sum_{n_-\le n<n_+},\ \Sigma_{1+}:=\sum_{n_+\le n<m_+},\ \Sigma_{2+}:=\sum_{n\ge m_+}.$$

В нижеследующих леммах 2.1–2.5 получены оценки этих подсумм. Из этих оценок и будут вытекать утверждения теорем 2.1, 2.2.

Лемма 2.1. *Если для* $\{a_n\}$ *выполнено условие* $[\boldsymbol{\psi}]$ *и справедливо либо* (10), *либо* $[\mathbf{R}_{\alpha,\rho}]$ *при* $\alpha \in (1,2)$, *то*

$$\Sigma_0 \sim \frac{\Delta}{\mu}\,\tilde a_{x/\mu},$$

коль скоро величина $N = N(x)$ *из* (25) *стремится к бесконечности достаточно медленно при* $x \to \infty$.

Доказательство. Будем считать для простоты, что n_- целочисленно (как будет видно из дальнейшего, изменение значений $n_\pm$ и $m_\pm$ на величины $o(\psi(x))$ не меняет существа оценок).

Построим последовательность n_k, $0 \le k \le K+1$, полагая $n_0 := n_-$,

$$n_{k+1} := n_k + d(n_k), \quad k = 0,1,\dots,K := \min\{k \ge 0:\ n_{k+1} \ge n_+\}$$

(так что $K \sim 2N\psi(x)/d(x/\mu)$), и несколько изменим n_+, положив согласно сделанному замечанию его новое значение равным $n_+ := n_{K+1}$. Множество $[n_-, n_+)$ разобьем на полуинтервалы $[n_k, n_{k+1})$, $k = 0,1,\dots,K$. На каждом из этих интервалов вероятности

$$p_n := \mathbf{P}(S_n \in \Delta[x))$$

сохраняют «почти постоянное» (в смысле отношений) значение. Более точно, полагая

$$\pi(n) := \phi((x-\mu n)/\psi(n))/\psi(n),$$

в силу соотношений (13), (14) и того, что $d(n_k) = o(\psi(x/\mu))$, получаем, что при $n \in [n_k, n_{k+1})$

$$p_n = (1+o(1))p_{n_k} = (1+o(1))\Delta\pi(n_k)$$

равномерно по $k \in [0,K]$, если $N \to \infty$ достаточно медленно при $x \to \infty$. Поэтому подсуммы $\sum\limits_{n\in[n_k,n_{k+1})} a_n p_n$, $k = 0,1,\dots,K$, составляющие Σ_0, имеют вид

$$(1+o(1))(n_{k+1}-n_k)\tilde a_{n_k}\Delta\pi(n_k).$$

Но в силу условия $[\boldsymbol{\psi}]$ имеем $\tilde a_{n_k} = (1+o(1))\tilde a_{x/\mu}$ равномерно по $k \le K$, если $N \to \infty$ достаточно медленно при $x \to \infty$ (см. теорему 1 в [18]), так что

$$\sum_{n\in[n_k,n_{k+1})} a_n p_n = (1+o(1))\Delta\tilde a_{x/\mu}(n_{k+1}-n_k)\pi(n_k)$$

и, стало быть,

$$\Sigma_0 = (1+o(1))\Delta\tilde a_{x/\mu}\sum_{k=0}^{K}(n_{k+1}-n_k)\pi(n_k)$$

$$= (1+o(1))\Delta\tilde a_{x/\mu}\sum_{k=0}^{K}\frac{n_{k+1}-n_k}{\psi(n_k)}\,\phi\biggl(\frac{x-\mu n_k}{\psi(n_k)}\biggr). \quad (27)$$

Так как

$$\frac{n_{k+1}-n_k}{\psi(n_k)} \sim \frac{n_{k+1}-n_k}{\psi(x/\mu)} \to 0, \quad \phi\biggl(\frac{x-\mu n_k}{\psi(n_k)}\biggr) \sim \phi\biggl(\frac{x-\mu n_k}{\psi(x/\mu)}\biggr)$$

равномерно по $k \le K$ (если $N \to \infty$ достаточно медленно при $x \to \infty$), последняя сумма в (27) является (с точностью до множителя $(1+o(1))$) римановой суммой для интеграла

$$\int\limits_{x/\mu - N\psi(x)}^{x/\mu + N\psi(x)} \phi\biggl(\frac{x-\mu t}{\psi(x/\mu)}\biggr)\frac{dt}{\psi(x/\mu)} = \frac{1+o(1)}{\mu}\int\limits_{-Nc}^{Nc}\phi(u)\,du \to \frac{1}{\mu},$$

где $c = \lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)/\psi(x/\mu) = \mu^{1/\alpha}$ ($\alpha = 2$ в случае, когда $\mathbf{E}\,\xi^2 < \infty$). $\square$

Лемма 2.2. *Если выполнены условия леммы* 2.1 *и* $[\boldsymbol{\psi},\uparrow\cup\downarrow]$, *то справедливо соотношение*

$$\Sigma_{1\pm} = o(\tilde{a}_{x/\mu}), \quad x \to \infty.$$

Доказательство. В силу $[\boldsymbol{\psi},\uparrow\cup\downarrow]$ имеем

$$|\Sigma_{1\pm}| \preccurlyeq \tilde{a}_{x/\mu} h_{\pm}(x), \text{ где } h_{-}(x) := \sum_{m_{-} \le n < n_{-}} p_n, \quad h_{+}(x) := \sum_{n_{+} \le n < m_{+}} p_n.$$

Очевидно, $h_{\pm}(x) \le h(x) - h_0(x)$, где при $x \to \infty$ по теореме Блэкуелла

$$h(x) := \sum_{n \ge 0} p_n \to \frac{\Delta}{\mu}, \quad x \to \infty, \tag{28}$$

и в силу леммы 2.1 для последовательности $a_n \equiv 1$

$$h_0(x) := \sum_{n_{-} \le n < n_{+}} p_n \to \frac{\Delta}{\mu}. \tag{29}$$

Отсюда следует, что $h_{\pm}(x) \to 0$ при $x \to \infty$. $\square$

Положим

$$\underline{S}^{(n)} := \inf_{k \ge n} (S_k - S_n) \overset{d}{=} \underline{S}^{(0)}, \quad \overline{S}_n := \max_{k \le n} S_k.$$

Так как $\mu > 0$, то с.в. $\underline{S}^{(0)}$ собственная, причем

$$\gamma := \mathbf{P}(\underline{S}^{(0)} = 0) > 0 \tag{30}$$

(см., например, [1, § 12.2]). Для оценки $\Sigma_{2\pm}$ понадобится следующее обобщение леммы 6.1 из [4] на случай, когда $\mathbf{P}(\xi < 0) > 0$.

Лемма 2.3. *Если* $\Delta > 0$ *таково, что* $F_{+}(\Delta) > 0$, *то при любом* $n \ge 1$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{k \le n} \mathbf{P}(S_k \in \Delta[x]) \le \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n \ge x)}{\gamma F_{+}(\Delta)}, \tag{31}$$

$$\sum_{k \ge n} \mathbf{P}(S_k \in \Delta[x]) \le \frac{\mathbf{P}(S_n + \underline{S}^{(n)} < x + \Delta)}{\gamma F_{+}(\Delta)}. \tag{32}$$

Доказательство. Для любого $I \subset \mathbf{R}_{+}$ имеем

$$\sum_{k \in I} \mathbf{P}(S_k \in \Delta[x]) = \Sigma' + \Sigma'', \tag{33}$$

где

$$\Sigma' := \sum_{k \in I} \mathbf{P}(S_k \in \Delta[x],\, S_{k+j} \notin \Delta[x] \text{ при всех } j \ge 1),$$

$$\Sigma'' := \sum_{k \in I} \mathbf{P}(S_k \in \Delta[x],\, S_{k+j} \in \Delta[x] \text{ для некоторого } j \ge 1).$$

Так как события под знаком вероятности в сумме Σ' взаимоисключающие, справедливы оценки

$$\Sigma' \le \mathbf{P}\Big(\bigcup_{k \in I} \{S_k \in \Delta[x]\}\Big) \le \begin{cases} \mathbf{P}(\overline{S}_n \ge x), & \text{если } I = (0, n], \\ \mathbf{P}(S_n + \underline{S}^{(n)} < x + \Delta), & \text{если } I = [n, \infty). \end{cases}$$

Далее, в силу независимости S_k и $\xi_{k+1}+\underline{S}^{(k+1)}\overset{d}{=}\xi_1+\underline{S}^{(1)}$ получаем

$$\Sigma''\le\sum_{k\in I}\mathbf{P}(S_k\in\Delta[x),\,\inf_{j>0}S_{k+j}<x+\Delta)$$
$$\le\sum_{k\in I}\mathbf{P}(S_k\in\Delta[x),\,\xi_{k+1}+\underline{S}^{(k+1)}<\Delta)=\mathbf{P}(\xi_1+\underline{S}^{(1)}<\Delta)\sum_{k\in I}\mathbf{P}(S_k\in\Delta[x)),$$

где, используя независимость ξ_1 и $\underline{S}^{(1)}$ и определение (30), имеем

$$\mathbf{P}(\xi_1+\underline{S}^{(1)}<\Delta)=\mathbf{P}(\xi_1+\underline{S}^{(1)}<\Delta,\,\underline{S}^{(1)}=0)+\mathbf{P}(\xi_1+\underline{S}^{(1)}<\Delta,\,\underline{S}^{(1)}<0)$$
$$\le\mathbf{P}(\xi_1<\Delta,\,\underline{S}^{(1)}=0)+\mathbf{P}(\underline{S}^{(1)}<0)=\mathbf{P}(\xi_1<\Delta)\gamma+1-\gamma=1-\gamma F_+(\Delta).$$

Подставляя установленные для Σ' и Σ'' оценки в (33) при $I=(0,n]$ и при $I=[n,\infty)$, получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.4. *Для справедливости соотношения*

$$\Sigma_{2-}=o(\tilde a_{x/\mu}),\quad x\to\infty,\tag{34}$$

достаточно выполнения одного из следующих двух условий:

(i) $\{a_n\}$ *удовлетворяет* $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$ *и выполнено одно из условий* (i), (ii) *теоремы* 2.1*;*

(ii) $\{a_n\}$ *удовлетворяет* $[\boldsymbol{\psi},\uparrow]$.

Доказательство. (i) Предположим для простоты (и не ограничивая общности), что $x/\mu\equiv m_-r=r^{M+1}$ (см. (25)) при некотором целом $M\ge1$, где $r>1$ — величина из условия $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$, и рассмотрим полуинтервалы

$$I_j:=[r^{j-1},r^j),\quad j=1,2,\dots.\tag{35}$$

Пусть сначала $\Delta>0$ таково, что $F_+(\Delta)>0$. Тогда, используя условие $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$, неравенство (31) и обозначение $\chi_j:=\mathbf{1}(I_j\cap\mathbb{N}\ne\varnothing)$, получаем

$$|\Sigma_{2-}|\le\sum_{j=1}^M\sum_{n\in I_j}|a_n|p_n\preccurlyeq\sum_{j=1}^M\tilde a_{r^j}\sum_{n\in I_j}p_n\le\sum_{j=1}^M\tilde a_{r^j}\mathbf{P}(\overline{S}_{r^j}\ge x)\chi_j.\tag{36}$$

Напомним, что в случае конечной дисперсии при выполнении условий (16) и $n\preccurlyeq y\to\infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n}(S_k-\mu k)\ge y)\preccurlyeq nV(y)\tag{37}$$

(см. следствие 4.1.4(i) в [16]). Замечая, что

$$\{\overline{S}_{r^j}\ge x\}=\{\overline{S}_{r^j}-\mu r^j\ge x-\mu r^j\}\subset\{\max_{k\le r^j}(S_k-\mu k)\ge x-\mu r^j\}$$

и $x-\mu r^j\ge x-\mu r^M=(1-r^{-1})x$ при $j\le M$, получаем из (37) оценку

$$\mathbf{P}(\overline{S}_{r^j}\ge x)\le\mathbf{P}(\max_{n\le r^j}(S_n-\mu n)\ge(1-r^{-1})x)\preccurlyeq r^jV(x),\quad j\le M.$$

Подставляя ее в (36) и используя неравенство $\tilde a_{r^j}\le c\tilde a_n$, $n\in I_j$ (справедливое в силу условия $[\boldsymbol{\psi},\downarrow]$), находим, что

$$|\Sigma_{2-}|\preccurlyeq V(x)\sum_{j=1}^M r^j\tilde a_{r^j}\chi_j\preccurlyeq V(x/\mu)\sum_{j=1}^M\sum_{n\in I_j}\tilde a_n\le V(x/\mu)\tilde A_{x/\mu}.$$

Теперь соотношение (34) следует немедленно из условия (17).

В случае сходимости к устойчивому закону вышеприведенные рассуждения остаются в силе при замене ссылки на следствие 4.1.4 из [16] при обосновании неравенства (37) ссылкой на следствие 3.1.2 из той же монографии.

Если $F_+(\Delta) = 0$ (т. е. $\mathbf{P}(\xi < \Delta) = 1$), то всегда можно выбрать $k \in \mathbb{N}$ такое, что для $\Delta_k := \Delta/k$ справедливо $F_+(\Delta_k) > 0$. После этого остается применить полученную выше оценку к каждому слагаемому в правой части представления

$$h(x, \Delta) = h(x, k\Delta_k) = \sum_{j=0}^{k-1} h(x + j\Delta_k, \Delta_k).$$

(ii) В этом случае

$$|\Sigma_{2-}| \le \sum_{n<m_-} |a_n| p_n \preccurlyeq \tilde{a}_{x/\mu} \sum_{n<m_-} p_n \le \tilde{a}_{x/\mu}(h(x) - h_0(x)) = o(\tilde{a}_{x/\mu})$$

в силу (28), (29). $\square$

Лемма 2.5. *Для справедливости соотношения*

$$\Sigma_{2+} = o(\tilde{a}_{x/\mu}), \quad x \to \infty,$$

достаточно выполнения одного из следующих двух условий:

(i) $\{a_n\}$ *удовлетворяет* $[\boldsymbol{\psi}, \downarrow]$;

(ii) $\{a_n\}$ *удовлетворяет* $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$ *и выполнено одно из условий* (i), (ii) *теоремы* 2.2.

Доказательство. (i) В этом случае

$$|\Sigma_{2+}| \preccurlyeq \tilde{a}_{x/\mu} \sum_{n>m_+} p_n \le \tilde{a}_{x/\mu}(h(x) - h_0(x)) = o(\tilde{a}_{x/\mu})$$

в силу (28), (29).

(ii) Используя обозначение (35) и предполагая для простоты, что теперь $x/\mu \equiv m_+/r = r^{M-2}$ при некотором целом $M > 1$, где $r > 1$ — величина из условия $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$, получаем из условия $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$ и (32) неравенство

$$|\Sigma_{2+}| \le \sum_{j\ge M} \sum_{n\in I_j} |a_n| p_n \preccurlyeq \sum_{j\ge M} \tilde{a}_{r^{j-1}} \sum_{n\in I_j} p_n \preccurlyeq \sum_{j\ge M} \tilde{a}_{r^{j-1}} \mathbf{P}(S_{r^{j-1}} + \underline{S}^{(r^{j-1})} < x + \Delta) \tag{38}$$

(в отличие от доказательства леммы 2.4 использование индикаторов χ_j здесь излишне, поскольку M велико и, стало быть, $r^j - r^{j-1} > 1$ при $j \ge M$).

Заметим, что при $j \ge M$ и достаточно большом M среднее $\mathbf{E}\, S_{r^{j-1}} = \mu r^{j-1} \equiv xr$ первой случайной величины в правой части (38) превосходит значение $x + \Delta$ на величину

$$\mu r^{j-1} - (x + \Delta) = \mu r^{j-1} - \mu r^{M-2} - \Delta \ge \mu r^{j-2}(r - 1) - \Delta \ge 2cr^j$$

при некотором $c > 0$, тогда как $\underline{S}^{(r^{j-1})}$ стохастически минорируется глобальным минимумом $\underline{S}^0$. Поэтому для оценки вероятностей в правой части (38) следует привлечь результаты о больших уклонениях для левых хвостов распределений величин S_n и $\underline{S}^0$. В случае конечной дисперсии требуемая оценка для первой случайной величины содержится в утверждении следствия 4.1.4(i) в [16] (примененного к случайному блужданию со скачками $-\xi_j$). Для оценки левого хвоста распределения $\underline{S}^0$ достаточно воспользоваться условием (22) для построения случайного блуждания с правильно меняющимся левым хвостом распределения скачков и положительным сносом, которое стохастически минорирует $\{S_n\}$, и затем воспользоваться теоремой 7.5.1 в [16].

Следуя этому пути, приходим к оценке

$$\mathbf{P}(S_{r^{j-1}} + \underline{S}^{(r^{j-1})} < x + \Delta) \le \mathbf{P}(S_{r^{j-1}} - \mu r^{j-1} < -cr^j) + \mathbf{P}(\underline{S}^{(0)} < -cr^j) \\ \preccurlyeq r^{j-1}W(cr^{j-1}) + cr^jW(cr^j) \preccurlyeq r^jW(r^j).$$

Возвращаясь к (38), получаем

$$|\Sigma_{2+}| \preccurlyeq \sum_{j\ge M} \tilde{a}_{r^{j-1}} r^j W(r^j) \preccurlyeq \sum_{j\ge M} W(r^j) \sum_{n\in I_j} \tilde{a}_n \preccurlyeq \sum_{n\ge m_+} \tilde{a}_n W(n),$$

где мы снова воспользовались условием $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$ и тем, что W — п.м.ф. Стало быть, при выполнении (23) имеем

$$\Sigma_{2+} = o(1) = o(\tilde{a}_{x/\mu}),$$

где последнее соотношение вытекает из $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$.

В случае сходимости к устойчивому закону вместо следствия 4.1.4 следует воспользоваться следствием 3.1.2 из [16]. $\square$

Утверждения теорем 2.1 и 2.2 следуют из лемм 2.1, 2.2, 2.4 и 2.5. Требуемая равномерность по Δ в оценках лемм 2.2–2.5 очевидна.

§ 3. Случай, когда хвосты распределения F являются локально правильно меняющимися функциями

Будем говорить, что $V(x)$ есть *локально правильно меняющаяся функция* (л.п.м.ф.), если она является п.м.ф. и, кроме того, при любом фиксированном $\Delta > 0$ выполняется

$$V(x) - V(x+\Delta) = \Delta v(x)(1+o(1)), \quad x \to \infty, \tag{39}$$

где $v(x) = \alpha V(x)/x$, $-\alpha$ есть показатель п.м.ф. $V(x)$ (ср. с (16)). В этом параграфе всюду предполагаем, что $\alpha > 2$. Свойство (39) можно назвать *дифференцируемостью V на бесконечности.*

Ясно, что (39) выполняется, если медленно меняющаяся функция L_V в представлении в правой части (16) дифференцируема и $L'_V(x) = o(L_V(x)/x)$ при $x \to \infty$.

Если хвост F_+ (или F_-) распределения F является л.п.м.ф., то получение асимптотики $h(x,\Delta)$ при $x \to \infty$ значительно упрощается в силу наличия для таких распределений интегро-локальных теорем, действующих на всей полуоси. Если, например, F_+ — л.п.м.ф., то в [20] установлено, что в случае $\mathbf{E}\,\xi = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\,\xi^2 < \infty$ при всех $x > c\sqrt{n}$, $c = \mathrm{const} > 0$, выполняется

$$\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) = \left[\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\,\phi\!\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) + n\Delta v(x)\right](1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

где ϕ — стандартная нормальная плотность, а

$$v(x) = \frac{\alpha F_+(x)}{x}$$

— функция из представления (39) для $V(x) = F_+(x)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x))$ при $x \le -c\sqrt{n}$, если F_- есть л.п.м.ф.; в этом случае будем использовать обозначение

$$w(x) = \frac{\beta F_-(x)}{x},$$

где $-\beta$ — показатель п.м.ф. F_-.

Отсюда и из теоремы Стоуна — Шеппа очевидным образом получаем следующее утверждение, которое сводит задачу вычисления асимптотики $h(x,\Delta)$ к чисто аналитической проблеме.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi = \mu > 0$, $\sigma^2 < \infty$ *и хвосты* $F_+(x) = x^{-\alpha}L_V(x)$, $F_-(x) = x^{-\beta}L_W(x)$ *являются л.п.м.ф.*, $\min\{\alpha,\beta\} > 2$. *Тогда при* $b(n) = \sigma\sqrt{n}$, $x \to \infty$

$$h(x,\Delta) = \Delta\Biggl[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \sum_{c_-x\le n\le c_+x} a_n e^{-(x-\mu n)^2/(2\sigma^2 n)} + \sum_{n>x/\mu+b(x)} a_n n w(\mu n - x) + \sum_{n<x/\mu-b(x)} a_n n v(x-\mu n)\Biggr](1+o(1)) \qquad (40)$$

при любых фиксированных $\Delta > 0$, $c_- \in (0, 1/\mu)$, $c_+ \in (1/\mu, \infty)$.

Приведем также утверждения, показывающие что в теореме 2.2(ii) условие на связь между хвостами F_- и весами a_n в (24) неулучшаемо, а условие (18) на связь между a_n и F_+ можно расширить в условиях этого параграфа до минимального. Поскольку предполагается конечность второго момента F, полагаем $\psi(t) := \sigma\sqrt{t}$ (см. (12)).

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathbf{E}\,\xi = \mu > 0$, $\sigma^2 < \infty$ *и* $a_n \ge 0$.

(i) *Если* F_- *— л.п.м.ф., то из расходимости ряда* $\sum_n a_n F_-(n) = \infty$ *следует, что* $h(x,\Delta) = \infty$ *при любом* $\Delta > 0$.

(ii) *Если выполнено условие* $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$ *и* F_- *— л.п.м.ф., то* (5) *выполняется тогда и только тогда, когда ряд* $\sum_n a_n F_-(n)$ *сходится.*

(iii) *Пусть выполнено условие* $[\boldsymbol{\psi}, \downarrow]$ *и* F_+ *— л.п.м.ф. Тогда при* $x \to \infty$

$$h(x,\Delta) = \frac{\Delta}{\mu}\,\tilde a_{x/\mu}(1+o(1)) + \Delta \sum_{n<x/(r\mu)} a_n n v(x-\mu n)(1+o(1)). \qquad (41)$$

В этом случае соотношение (5) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$F_+(x) = o\biggl(\frac{x\tilde a_{x/\mu}}{B_{x/(r\mu)}}\biggr), \quad x \to \infty, \qquad (42)$$

где $B_x := \sum_{k\le x} k a_k$.

Замечание 3.1. Заметим, что главная часть второго слагаемого в правой части (41) находится между значениями

$$\Delta B_{x/(r\mu)} v(x) \quad \text{и} \quad \Delta B_{x/(r\mu)} v((r-1)x).$$

Замечание 3.2. Если ряд A_∞ расходится и a_x — п.м.ф., то условия (42) и (17) эквивалентны. Если же $A_\infty < \infty$, то условие (42) шире, чем (6), (17).

Например, если $B_\infty < \infty$, то $A_\infty < \infty$ и условие (42) примет вид $F_+(x) = o(x\tilde a_{x/\mu})$, в то время как условие (17) будет означать, что $F_+(x) = o(\tilde a_{x/\mu})$.

Доказательство теоремы 3.2. (i) Утверждение вытекает из неравенств

$$h(x,\Delta) \geq \Delta \sum_{n\geq x/(r\mu)} a_n n w(\mu n - x) \succcurlyeq \sum_{n\geq x/(r\mu)} a_n F_-(n).$$

(ii) Воспользуемся представлением

$$h(x,\Delta) = \Sigma_{1-} + \Sigma_0 + \Sigma_{1+} + \Sigma_{2+},$$

где

$$\Sigma_{1-} := \sum_{n<x/\mu - Nb(x)} a_n p_n, \Sigma_0 := \sum_{|n-x/\mu|\leq Nb(x)} a_n p_n,$$

$$\Sigma_{1+} := \sum_{n\in(x/\mu+Nb(x),\, x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x}]} a_n p_n, \Sigma_{2+} := \sum_{n>x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x}} a_n p_n.$$

В силу леммы 2.1 при $N = N(x) \to \infty$ достаточно медленно при $x\to\infty$ имеем

$$\Sigma_0 \sim \frac{\Delta}{\mu}\tilde a_{x/\mu},$$

тогда как в силу леммы 2.2 $\Sigma_{1-} = o(\tilde a_{x/\mu})$. Далее, при $c_1 = \mathrm{const} > 0$

$$\Sigma_{1+} = \frac{\Delta(1+o(1))}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \sum_{n\in(x/\mu+Nb(x),\, x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x}]} a_n e^{-(x-\mu n)^2/(2\sigma^2 n)}$$
$$\preccurlyeq \tilde a_{x/\mu} e^{-cN^2} = o(\tilde a_{x/\mu})$$

и

$$\Sigma_{2+} = (1+o(1))\Delta \sum_{n>x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x}} a_n n w(\mu n - x). \tag{43}$$

Если ряд $\sum\limits_n a_n F_-(n)$ расходится, то $\Sigma_{2+} = \infty$ (см. доказательство п. (i) выше). В противном случае воспользуемся представлением

$$\Sigma_{2+} = \Sigma_{2,1+} + \Sigma_{2,2+}, \quad \Sigma_{2,1+} := \sum_{n\in(x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x},\, xr/\mu]}, \quad \Sigma_{2,2+} := \sum_{n>xr/\mu}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Sigma_{2,1+} \preccurlyeq \tilde a_{x/\mu} \sum_{n\in(x/\mu+c_1\sqrt{x\ln x},\, xr/\mu]} n w(\mu n - x) \preccurlyeq \tilde a_{x/\mu} x F_-(Nb(x)) = o(\tilde a_{x/\mu})$$

и в силу сходимости $\sum\limits_n a_n F_-(n) < \infty$ и условия $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow]$ выполняется

$$\Sigma_{2,2+} \preccurlyeq \sum_{n>xr/\mu} a_n F_-(n) = o(1) = o(\tilde a_{x/\mu}).$$

Тем самым доказано утверждение (ii).

(iii) Представление (41) доказывается совершенно аналогично утверждению (ii) теоремы. Необходимость и достаточность условия (42) для выполнения (5) вытекает из замечания 3.1. □

Замечание 3.3. Аналогичным образом может быть рассмотрен случай, когда хвосты $F_\pm$ убывают как семиэкспоненциальные функции, поскольку для таких хвостов также имеют место интегро-локальные теоремы для $\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x))$, действующие на всей полуоси (см. [21, 22]). Случай семиэкспоненциально распределенных слагаемых является «промежуточным» между случаем, когда хвосты суть л.п.м.ф., и случаем экспоненциально убывающих хвостов, рассмотренным в следующем параграфе.

§ 4. Случай, когда выполнено моментное условие Крамера

Обозначим через $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}\, e^{\lambda\xi}$ производящую функцию моментов с.в. ξ и положим

$$\lambda_- := \inf\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\} \le 0, \quad \lambda_+ := \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\} \ge 0.$$

В этом параграфе предположим, что выполнено моментное условие Крамера:

$$\lambda_+ - \lambda_- > 0. \tag{44}$$

Обозначим через $\lambda_{\min}$ точку минимума функции $\varphi(\lambda)$. Ясно, что $\lambda_{\min}$ будет также точкой минимума (выпуклой) функции $A(\lambda) := \ln\varphi(\lambda)$ и что, поскольку $\mu > 0$, всегда выполняется $\lambda_{\min} < \lambda_+$. Действительно, если $\lambda_- < 0$, то $\lambda_{\min} < 0 \le \lambda_+$; если же $\lambda_+ > 0$, то $\lambda_{\min} \le 0 < \lambda_+$.

Так как функция $A(\lambda)$ строго возрастает на $(\lambda_{\min}, \lambda_+)$, в этом интервале всегда существует единственное решение $A^{(-1)}(t)$ уравнения $A(\lambda) = t$ при $t \in (A(\lambda_{\min}), A(\lambda_+))$. Положим

$$\lambda_q := A^{(-1)}(-q) \in (\lambda_{\min}, \lambda_+), \quad \text{где } -q \in (A(\lambda_{\min}), A(\lambda_+)).$$

Определим преобразование Крамера над с.в. ξ как с.в. $\xi^{(\lambda)}$ с распределением

$$\mathbf{P}(\xi^{(\lambda)} \in dt) = \frac{e^{\lambda t}}{\varphi(\lambda)}\, \mathbf{P}(\xi \in dt).$$

Очевидно,

$$A'(\lambda) = \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \mathbf{E}\, \xi^{(\lambda)}, \quad \lambda \in (\lambda_-, \lambda_+),$$

так что $\mu_q := \mathbf{E}\, \xi^{(\lambda_q)} \equiv A'(\lambda_q) > 0$.

Аналогично обозначению (9) в условии $[\boldsymbol{\psi}]$ для числовой последовательности $\{b_n\}$ обозначим через $\tilde{b}_n$ скользящие средние этой последовательности по интервалам длины $d(n)$:

$$\tilde{b}_n := \frac{1}{d(n)} \sum_{n \le k < n+d(n)} b_k.$$

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнено* (44) *и последовательность весов имеет вид* $a_n = b_n e^{qn}$, *где* $-q \in (A(\lambda_{\min}), A(\lambda_+))$, *а для* $\{b_n\}$ *выполнено условие* $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow\cup\downarrow]$. *при* $\psi(t) = \sqrt{t}$.

(i) *В нерешетчатом случае для любых фиксированных* $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \infty$ *соотношение*

$$h(x, \Delta) \sim \frac{(1 - e^{-\lambda_q \Delta}) e^{-\lambda_q x}}{\mu_q \lambda_q}\, \tilde{b}_{x/\mu_q}, \quad x \to \infty, \tag{45}$$

выполняется равномерно по $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$. *Если* $q = 0$, *то* $\lambda_q = 0$, $\mu_q = \mu$ *и коэффициент при* $\tilde{b}_{x/\mu_q}$ *в* (45) *превращается по непрерывности в* Δ/μ, *а сама асимптотика принимает вид* (19).

(ii) *В арифметическом случае при выполнении* (15) *для целочисленных* $x \to \infty$ *справедливо*

$$h(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n = x) \sim \frac{e^{-\lambda_q x}}{\mu_q}\, \tilde{b}_{x/\mu_q}. \tag{46}$$

Доказательство. Приведем доказательство только для нерешетчатого случая (в арифметическом случае оно лишь упрощается). Используя стандартное наблюдение, что для суммы $S_n^{(\lambda)} := \xi_1^{(\lambda)} + \dots + \xi_n^{(\lambda)}$ н.о.р. копий с.в. $\xi^{(\lambda)}$ выполнено $\mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda)} \in dt\big) = \frac{e^{\lambda t}}{\varphi^n(\lambda)}\,\mathbf{P}(S_n \in dt)$ (которое использовано и в примере 1 в [3]), получаем

$$e^{qn}\mathbf{P}(S_n \in dt) = e^{(q+A(\lambda))n} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda)} \in dt\big).$$

Стало быть, разбивая $\Delta[x)$ на K подынтервалов $\Delta_x[x+j\Delta_x)$, $j = 0, 1, \dots, K-1$, длины $\Delta_x := \Delta/K$, где $K = K(x) \to \infty$ достаточно медленно при $x \to \infty$, имеем

$$\begin{aligned} h(x,\Delta) &= \sum_n b_n e^{qn}\mathbf{P}(S_n \in \Delta[x)) \\ &= \sum_n b_n \int\limits_{\Delta[x)} e^{qn}\mathbf{P}(S_n \in dt) = \sum_n b_n \int\limits_{\Delta[x)} e^{-\lambda_q t}\mathbf{P}(S_n^{(\lambda_q)} \in dt) \\ &= \sum_n b_n \sum_{j=0}^{K-1} \int\limits_{\Delta_x[x+j\Delta_x)} e^{-\lambda_q t}\mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \in dt\big) \\ &\sim \sum_n b_n \sum_{j=0}^{K-1} e^{-\lambda_q(x+j\Delta_x)}\mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \in \Delta_x[x+j\Delta_x)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{K-1} e^{-\lambda_q(x+j\Delta_x)} \sum_n b_n \mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \in \Delta_x[x+j\Delta_x)\big), \end{aligned} \tag{47}$$

где изменение порядка суммирования в последней строке можно обосновать, используя приведенное ниже соотношение (48) и условие $[\boldsymbol{\psi}, \uparrow\cup\downarrow]$.

Теперь заметим, что для внутренней суммы в правой части (47) выполняется

$$\sum_n b_n \mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \in \Delta_x[x+j\Delta_x)\big) \sim \frac{\Delta_x}{\mu_q}\,\tilde{b}_{(x+j\Delta_x)/\mu_q} \sim \frac{\Delta_x}{\mu_q}\,\tilde{b}_{x/\mu_q}, \quad x \to \infty, \tag{48}$$

равномерно по $j \le K$ (вторая эквивалентность имеет место, поскольку $\{\tilde{b}_n\}$ есть ψ-л.п. последовательность при $\psi(t) = \sqrt{t}$). Действительно, если $\{b_n\}$ удовлетворяет условию $[\boldsymbol{\psi}, \downarrow]$, то это соотношение следует из рассуждения, аналогичного использованному при доказательстве утверждения (i) в теореме 2.1, где надо заменить a_n на b_n, а S_n — на $S_n^{(\lambda_q)}$. Результаты лемм 2.1, 2.2 и 2.5(i) остаются в силе и в этом случае, так что надо лишь показать, что для «крайней левой» суммы Σ_{2-} (где мы теперь в качестве m_- берем значение $x/(r\mu_q)$) выполняется $\Sigma_{2-} = o(\tilde{b}_{x/\mu_q})$. Это нетрудно сделать, используя экспоненциальное неравенство Чебышева, очевидное представление $\mathbf{E}\,e^{\delta\xi^{(\lambda_q)}} = \varphi(\lambda_q+\delta)/\varphi(\lambda_q)$ (при $\delta \in (0, \lambda_+ - \lambda_q)$) и тот факт, что в силу следствия 1 в [18] имеет место $\tilde{b}_n = e^{o(\sqrt{n})}$. Именно, выбирая $\eta := (r-1)/3 > 0$ и замечая, что $\varphi(\lambda_q+\delta)/\varphi(\lambda_q) \le e^{\delta\mu_q(1+\eta)}$ при достаточно малых $\delta > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{2-} &= \sum_{n<m_-} b_n \mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \in \Delta_x[x+j\Delta_x)\big) \\ &\preccurlyeq \sum_{n<m_-} \tilde{b}_n \mathbf{P}\big(S_n^{(\lambda_q)} \ge x\big) \le \sum_{n<m_-} e^{o(\sqrt{n})-\delta x}\left(\frac{\varphi(\lambda_q+\delta)}{\varphi(\lambda_q)}\right)^n \end{aligned}$$

$$\le \sum_{n<m_-} \exp\{o(\sqrt{n}) - \delta x + n\delta\mu_q(1+\eta)\}$$

$$\preccurlyeq \sum_{n<m_-} \exp\{-\delta x + n\delta\mu_q(1+2\eta)\} \preccurlyeq \exp\{-\delta x + m_-\delta\mu_q(1+2\eta)\} = e^{-\delta\eta x/r}.$$

Это завершает доказательство (48), поскольку, как отмечено выше, $\tilde{b}_{x/\mu_q} = e^{o(\sqrt{x})}$. Случай, когда $\{b_n\}$ удовлетворяет условию $[\psi, \uparrow]$, рассматривается аналогично.

Таким образом, выражение в последней строке (48) равно

$$(1+o(1))\frac{\tilde{b}_{x/\mu_q}}{\mu_q}\sum_{j=0}^{K-1} e^{-\lambda_q(x+j\Delta_x)}\Delta_x \sim \frac{\tilde{b}_{x/\mu_q}}{\mu_q}\int\limits_{\Delta[x)} e^{-\lambda_q t}dt = \frac{(1-e^{-\lambda_q\Delta})e^{-\lambda_q x}}{\mu_q\lambda_q}\,\tilde{b}_{x/\mu_q},$$

что устанавливает (45). Доказательство в арифметическом случае проводится точно так же. Теорема 4.1 доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
3. *Omey E., Teugels J. L.* Weighted renewal functions: An hierarchical approach // Ann. Appl. Prob. 2002. V. 34, N 2. P. 394–415.
4. *Lin J.* Some Blackwell-type renewal theorems for weighted renewal functions // J. Appl. Probab. 2008. V. 45, N 4. P. 972–993.
5. *Greenwood P., Omey E., Teugels J. L.* Harmonic renewal measures // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1982. Bd 59. Heft 3. S. 391–409.
6. *Grübel R.* Harmonic renewal sequences and the first positive sum // J. London Math. Soc. 1988. V. 38, N 2. P. 179–192.
7. *Alsmeyer G.* Some relations between harmonic renewal measures and certain first passage times // Stat. Probab. Lett. 1991. V. 12, N 1. P. 19–27.
8. *Baltrunas A., Omey E.* Second-order subexponential sequences and the asymptotic behavior of their De Pril transform // Lith. Math. J. 2001. V. 41, N 1. P. 17–27.
9. *Alsmeyer G.* On generalized renewal measures and certain first passage times // Ann. Probab. 1992. V. 20, N 3. P. 1229–1247.
10. *Kalma J. M.* Generalized renewal measures: Thes. … doct. Groningen Univ., 1972.
11. *Maejima M., Omey E.* A generalized Blackwell renewal theorem // Yokohama Math. J. 1984. V. 32, N 1–2. P. 123–133.
12. *Embrechts P., Maejima M., Omey E.* A renewal theorem of Blackwell type // Ann. Probab. 1984. V. 12, N 2. P. 561–570.
13. *Сгибнев М. С.* Асимптотика обобщенных функций восстановления при наличии конечной дисперсии // Теория вероятностей и ее применения. 1997. Т. 42, № 3. С. 632–637.
14. *Hilberdink T.* On the Taylor coefficients of the composition of two analytic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. V. 21, N 1. P. 189–204.
15. *Нагаев С. В.* Некоторые теоремы типа восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Т. 13, № 4. С. 585–601.
16. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. М.: Физматлит, 2008.
17. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
18. *Borovkov A. A., Borovkov K. A.* An extension of the concept of slowly varying function with applications to large deviation limit theorems // Prokhorov and contemporary probability theory. 2013. P. 127–139. (Springer Proc. Math. Stat.; V. 33).
19. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. New York: Springer-Verl., 2011.
20. *Могульский А. А.* Интегро-локальная теорема, действующая на всей полуоси, для сумм случайных величин с правильно меняющимися распределениями // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 837–854.

21. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1218–1257.

22. *Могульский А. А.* Интегральные и интегро-локальные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. № 6. С. 251–271.

Статья поступила 7 февраля 2014 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru

Боровков Константин Александрович
Department of Mathematics & Statistics,
The University of Melbourne,
Parkville 3010, Australia
borovkov@unimelb.edu.au