Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 519.45

О ГРУППАХ С ИЗОЛИРОВАННОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков

Аннотация. Установлено, что изолированная инволюция бесконечной группы не всегда принадлежит прообразу центра фактор-группы по максимальной нормальной (периодической) подгруппе без инволюций.

Ключевые слова: группа бесконечная, смешанная, периодическая; изолированная инволюция.

В теории конечных групп известна фундаментальная теорема, доказанная Глауберманом [1]. *Пусть G — конечная группа и S — силовская 2-подгруппа в G. Если z — изолированная инволюция в S, то $z \in Z^*(G)$* [2, теорема 4.95]. Здесь $Z^*(G)$ — полный прообраз в группе G подгруппы $Z(G/O(G))$ из фактор-группы $G/O(G)$, где $O(G)$ — максимальная нормальная подгруппа нечетного порядка. Инволюцию z произвольной группы G называем *изолированной*, если для каждого элемента $g \in G$ коммутатор $[g, z] = g^{-1}z^{-1}gz$ имеет нечетный порядок (см. [2, предложение 4.96; 3]).

Z^*-теорема Глаубермана вместе с теоремой Бендера являются двумя наиболее важными инструментами локального анализа теории конечных групп. Она является глубоким обобщением известных теорем Бернсайда и Брауэра — Судзуки о конечных группах с циклическими и кватернионными силовскими 2-подгруппами. Эта тематика имеет богатую историю и своими корнями уходит в гомоморфизм перемещения и классические теоремы Бернсайда и Фробениуса. Доказательства теорем Бернсайда, Брауэра — Судзуки и Глаубермана существенно используют конечность группы, однако эти теоремы, очевидно, справедливы и для локально конечных групп. Верны ли они для периодических групп, неизвестно (см. вопрос 4.75 В. П. Шункова (1973 г.) из «Коуровской тетради» [4]). В настоящей работе построены примеры смешанных и периодических групп G с изолированной инволюцией $z \notin Z^*(G)$, доказан ряд свойств T_0-групп, введенных В. П. Шунковым [5], построен ряд новых примеров T_0-групп.

Из этих результатов следует, что для вышеприведенных групп с изолированной инволюцией теорема Глаубермана неверна. В доказательствах существенно используются свойства известных групп С. И. Адяна [6, 7].

Теорема 1. *В любой T_0-группе G все инволюции сопряжены и изолированы, при этом $O(G) = 1$ и для группы G и любой ее инволюции z Z^*-теорема неверна.*

Следующая теорема 2 доказана в [3], ее доказательство опиралось на свойства групп Ольшанского — свободных групп многообразия, заданного тождеством $x^n y = yx^n$ [8]. Как отмечено в [3], из этой теоремы следует отрицательный ответ на вопрос 11.13 А. В. Боровика из «Коуровской тетради» [4]. В данной работе доказательство теоремы 2 опирается на более широкую базу примеров.

Теорема 2. *В классе всех периодических групп Z^*-теорема неверна.*

Для смешанных групп Z^*-теорема может трактоваться в следующем ослабленном варианте. Пусть G — смешанная группа, $\overline{O}(G)$ — максимальная нормальная в G подгруппа без инволюций и $\overline{Z}^*(G)$ — полный прообраз в группе G подгруппы $Z(G/\overline{O}(G))$ из фактор-группы $G/\overline{O}(G)$. Утверждение о том, что изолированная инволюция z смешанной группы G принадлежит $\overline{Z}^*(G)$, назовем $\overline{Z}^*$-*теоремой.*

Теорема 3. *В классе всех смешанных групп Z^*-теорема и $\overline{Z}^*$-теорема неверны.*

1. Определения, обозначения и вспомогательные предложения

Напомним, что в произвольной группе G через $O(G)$ обозначается максимальная периодическая нормальная подгруппа без инволюций.

Предложение 1. *Пусть $X = \{G_k \mid k \in I\}$ — непустое множество групп G_k с изолированными инволюциями z_k, $z = \overline{\prod_{k\in I}} z_k$ — инволюция из декартова произведения $V = \overline{\prod_{k\in I}} G_k$, $B = \prod_{k\in I} G_k$ — прямое произведение и $G = \langle B, z\rangle$ — подгруппа из V. Тогда инволюция z изолирована в группе G. Если при этом порядки всех коммутаторов $[g_k, z_k]$ ($g_k \in G_k$, $k \in I$) ограничены в совокупности, то инволюция z изолирована в V.*

Доказательство. Когда $I = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество, имеем $B = G$ и для произвольного элемента $g = g_1 \dots g_n$, где $g_k \in G_k$, $k = 1, \dots, n$, выполняется

$$[g, z] = [g_1, z_1] \cdot \ldots \cdot [g_n, z_n]. \tag{1}$$

По условиям предложения порядки элементов $[g_k, z_k]$ конечны и нечетны, и поскольку $[g_k, z_k] \in G_k$, все сомножители в (1) перестановочны, порядок элемента $[g, z]$ конечен и нечетен и инволюция z изолирована в G.

Если множество X бесконечно, то, очевидно, $z \notin B$ и $G = B \leftthreetimes \langle z\rangle$. Поскольку произвольный элемент $g \in B$ представим в виде $g = g_{k_1} \dots g_{k_n}$, где $g_{k_i} \in G_{k_i}$, $i = 1, \dots, n$, как и выше, $[g, z] = [g_{k_1}, z_{k_1}] \cdot \ldots \cdot [g_{k_n}, z_{k_n}]$ и порядок коммутатора $[g, z]$ конечен и нечетен.

Наконец при условии ограниченности порядков коммутаторов $[g_k, z_k]$ ($g_k \in G_k$, $k \in I$) для любого элемента $g \in V$ порядок коммутатора $[g, z]$ конечный и нечетный, что доказывает предложение и в этом случае. Предложение доказано.

Отметим, что изолированная инволюция z в произвольной группе G *конечна* [9], поскольку с любой инволюцией из G порождает конечную подгруппу. Условие конечности (и нечетности) порядков элементов $z^g z$ содержательно для инволюции z из смешанной группы G. Обобщая свой известный результат о периодических группах с почти регулярной инволюцией, В. П. Шунков [10] нашел условия, при которых нормальное замыкание конечной инволюции в смешанной группе G является периодической почти нильпотентной группой [5]. В качестве исключений в этом результате появились T_0-группы и были указаны примеры T_0-групп. Напомним, что если элементы конечных порядков в смешанной группе G составляют подгруппу, то эта характеристическая подгруппа называется *периодической частью группы G.*

Предложение 2 [5, теорема 1]. *Пусть G — группа с инволюциями, i — некоторая ее инволюция, удовлетворяющая следующим условиям.*

(1) *Все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны.*

(2) *В централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно.*

(3) *В группе G нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$-инвариантной конечной подгруппы обладает периодической частью.*

Тогда либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G — T_0-группа.

Определение 1 [5, с. 6]. Группа G с инволюцией i называется T_0-*группой*, если выполняются условия.

(1) Все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны.

(2) Силовские 2-подгруппы из G — циклические группы или обобщенные группы кватернионов.

(3) Централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью.

(4) Нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$-инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка.

(5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого элемента c из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i, т. е. $c^i = c^{-1}$, в $C_G(i)$ существует такой элемент s_c, что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Предложение 3. *В T_0-группе все инволюции сопряжены и изолированы.*

Доказательство. Пусть G — T_0-группа, i — инволюция из определения 1 и z — произвольная инволюция из G. Согласно пп. (1), (2) определения 1 $L = \langle i, z \rangle$ — конечная группа с циклической силовской 2-подгруппой. Ввиду свойств групп диэдра $i = z^g$ для некоторого $g \in L$ и порядок коммутатора $[g, z]$ нечетен. Предложение доказано.

2. Центральные расширения групп бернсайдова типа, *A*-группы и их свойства

Как известно, в аддитивной группе рациональных чисел нет кручения и любые две циклические подгруппы имеют нетривиальное пересечение. Естественно возникающий вопрос о существовании неабелевых групп с такими же свойствами (см. [4, вопрос 1.63 П. Г. Конторовича]) долгое время оставался открытым [7, с. 288]. Первые примеры таких групп построены С. И. Адяном [6] в 1971 г., это группы $A(m, n)$ с уникальными свойствами (см. [7, гл. VII, теоремы 1.3, 1.6, 1.7]).

Предложение 4. *При $m \geqslant 2$ и нечетном числе $n \geq 665$ группа $A = A(m, n)$ обладает следующими свойствами:*

(1) $A = \langle a_1, \dots, a_m, d \rangle$ *и* $a_i d = d a_i$ $(i = 1, \dots, m)$;

(2) *подгруппа $\langle d \rangle$ совпадает с центром группы A;*

(3) *фактор-группа $A/\langle d \rangle$ изоморфна группе $B(m, n)$ — свободной m-порожденной бесконечной периодической группе показателя (периода) n;*

(4) *для любого отличного от единицы элемента x группы A можно указать такое целое число $s \neq 0$, что $x^n = d^s$ в A;*

(5) *порядок каждого неединичного элемента из A бесконечен и пересечение любых двух неединичных циклических подгрупп в A есть бесконечная циклическая группа;*

(6) *в фактор-группе $A(m,n)/\langle d^2\rangle$ подгруппа $\langle d\rangle/\langle d^2\rangle$ не выделяется прямым сомножителем.*

Нам понадобятся некоторые свойства группы Новикова — Адяна $B(m,n)$ — свободной m-порожденной бесконечной периодической группы показателя (периода) n (см. [7, гл. VI, теоремы 1.5, 3.2, 3.3, 3.4, гл. VII, теорема 1.8]).

Предложение 5. *При $m \geqslant 2$ и нечетном числе $n \geq 665$ группа $B(m,n)$ бесконечна, ее центр тривиален, централизатор любого неединичного элемента группы $B(m,n)$ есть циклическая подгруппа порядка n и каждая конечная подгруппа в $B(m,n)$ циклическая.*

Замечание 1. Из свойств (1)–(5) предложения 4 не следует, что элемент d содержится в коммутанте группы A (см. замечание 2).

Приведем известный пример группы, построенный А. Ю. Ольшанским [8].

Предложение 6 [8, теорема 31.4]. *Существует неабелева группа, все собственные подгруппы которой бесконечные циклические, а пересечение любых двух из них отлично от единицы.*

Определение 2. Некоммутативную группу без кручения, в которой любые две собственные подгруппы имеют нетривиальное пересечение, называем *K-группой*.

Определение 3. K-группа G называется *A-группой*, если $Z(G) = \langle d\rangle$ — циклическая группа и в фактор-группе $G/\langle d^2\rangle$ подгруппа $\langle d\rangle/\langle d^2\rangle$ не выделяется прямым сомножителем.

Согласно предложению 4 все группы Адяна $A(m,n)$ являются A-группами.

Лемма 1. *Пусть G — A-группа с центром $\langle d\rangle$.*

(1) *Абелевы подгруппы в G локально циклические.*

(2) *Для любого натурального числа k фактор-группа $\overline{G} = G/\langle d^k\rangle$ — не локально конечная периодическая группа, каждая ее конечная подгруппа циклическая и любые два неперестановочных элемента в $\overline{G}$ порождают бесконечную подгруппу.*

(3) *Любая неабелева подгруппа M в G является K-группой с нетривиальным локально циклическим центром и локально циклическими абелевыми подгруппами.*

(4) *Если $a,b \in A$ и $ab \neq ba$, то $aa^b \neq a^ba$.*

Доказательство. П. (1) вытекает из нетривиальности пересечений пар подгрупп в G и основной теоремы о конечно порожденных абелевых группах [11, теорема 8.1.2].

(2) По определению A-группы любой элемент $b \in G$ в подходящей натуральной степени n принадлежит $\langle d^k\rangle$ и потому $\bar{b}^n = \bar{1}$ и $\overline{G}$ — периодическая группа.

Пусть $\overline{M}$ — произвольная конечная подгруппа группы $\overline{G}$ и M — ее полный прообраз в G. По теореме Шура (см. [9, теорема 2.5]) коммутант M' группы M конечен, и поскольку в M нет кручения, то $M' = 1$ и M — абелева группа. По п. (1) леммы M — циклическая группа, потому $\overline{M}$ — циклическая группа.

Из этого заключаем, что группа $\overline{G}$, будучи неабелевой, бесконечна, все ее конечные подгруппы циклические и любые два ее неперестановочных элемента порождают бесконечную подгруппу.

П. (3) следует из нетривиальности $M \cap Z(G)$ и п. (1) леммы.

(4) Понятно, что $a, b \notin Z(A)$. Допустим, что $aa^b = a^b a$. По п. (1) леммы $A = \langle a, a^b, d\rangle$ — циклическая группа и ввиду п. (2) в фактор-группе $\overline{G} = G/\langle d\rangle$ имеет место равенство $\langle \bar{a}\rangle = \langle \overline{a^b}\rangle$. Но тогда подгруппа $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$ в $\overline{G}$ конечна и по п. (2) циклическая, а ее полный прообраз $\langle a, b, d\rangle$ в G — абелева группа вопреки условиям. Значит, $aa^b \neq a^b a$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная группа, $a, b \in G$, $|a| = \infty$ и $b \in N_G(\langle a\rangle)$. Тогда либо $ab = ba$, либо $b^{-1}ab = a^{-1}$. Если при этом $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, то $ab = ba$.*

Доказательство. Поскольку $\langle a\rangle = \langle b^{-1}ab\rangle$, либо $b^{-1}ab = a$ и $ab = ba$, либо $b^{-1}ab = a^{-1}$, при этом из $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, очевидно, следует $ab = ba$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — A-группа с центром $\langle d\rangle$.*

(1) *Фактор-группа $G/\langle d\rangle$ не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп.*

(2) *Для любого нечетного натурального числа k в фактор-группе $G/\langle d^k\rangle$ нет инволюций.*

(3) *Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$ не содержит инволюций.*

Доказательство. (1) Если $\overline{A}$ — абелева нормальная подгруппа группы $\overline{G} = G/\langle d\rangle$, то по п. (2) леммы 1 $\overline{A} = \langle \bar{a}\rangle$ — циклическая группа, ее полный прообраз A — абелева группа с порождающими a, d и ввиду п. (1) леммы 1 A — циклическая группа. Поскольку A нормальна в G, в силу леммы 2 $A \le Z(G) = \langle d\rangle$ и $\overline{A} = \bar{1}$.

(2) Допустим, что $\bar{a}$ — инволюция из $\overline{G} = G/\langle d^k\rangle$. Ввиду п. (2) леммы 1 подгруппа $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}}\rangle$ конечная циклическая для любого элемента $\bar{g}$ из $\overline{G}$, что возможно только при $C_{\overline{G}}(\bar{a}) = \overline{G}$. Отсюда заключаем, что полный прообраз A подгруппы $\langle \bar{a}\rangle$ является абелевой нормальной в G подгруппой. По п. (1) леммы 1 A — циклическая группа, и по лемме 2 $A \le Z(G) = \langle d\rangle$. Но тогда $\bar{a} \in \langle \bar{d}\rangle$, что невозможно ввиду нечетности числа k. Следовательно, фактор-группа $G/\langle d^k\rangle$ не содержит инволюций.

(3) Пусть $a \in \operatorname{Aut} G$, $g \in G$ и $g^a \neq g$, $b = g^{-1}aga$. Поскольку $b^a = b^{-1}$ и $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = \langle d_b\rangle \neq 1$, ввиду леммы 2 $d_b^a = d_b^{-1}$. Из равенства $\langle d\rangle = Z(G)$ следует, что $\langle d^a\rangle = \langle d\rangle$, и ввиду леммы 2 $d^a = d^{-1}$. Пусть $\bar{c} \in \overline{G} = G/\langle d\rangle$ и $\langle \bar{c}^a\rangle = \langle \bar{c}\rangle$. По лемме 1 полный прообраз C подгруппы $\langle \bar{c}\rangle$ в G является бесконечной циклической группой, и снова по лемме 2 $\bar{c}^a = \bar{c}^{-1}$. По п. (2) леммы в фактор-группе $G/\langle d\rangle$ нет инволюций. Отсюда заключаем, что a действует на периодической фактор-группе $G/\langle d\rangle$ без неподвижных точек и $G/\langle d\rangle$ — абелева группа по лемме 2.20 из [9] вопреки лемме 1. Следовательно, лемма верна.

Лемма 4. *Группа Ольшанского O из предложения 6 является A-группой и порождается любой парой своих неперестановочных элементов. Фактор-группа $O/Z(O)$ бесконечна, проста и каждая ее собственная подгруппа является конечной циклической группой.*

Доказательство. Пусть a, b — любые два неперестановочных элемента из O. Непосредственно из свойств группы O (предложение 6) следует, что $O = \langle a, b\rangle$ и подгруппы $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, $Z(O) = C_O(a) \cap C_O(b)$ бесконечные циклические.

Допустим, что $O' = [O, O] \neq O$. Тогда O' — циклическая группа, ввиду леммы 2 $O' \leq Z(O)$ и фактор-группа $\overline{O} = O/Z(O)$ конечна как абелева группа, порожденная элементами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ конечных порядков. По теореме Шура (см. [9, теорема 2.5]) $|O'| < \infty$, $O' = 1$ и группа O абелева; противоречие. Следовательно, $O' = O$, и O является A-группой.

Далее, по лемме 1 $O/Z(O)$ — бесконечная периодическая группа и все ее собственные подгруппы циклические как гомоморфные образы собственных подгрупп из O. Из этих свойств и из п. (1) леммы 3 следует, что группа $O/Z(O)$ проста. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — A-группа с центром $\langle d\rangle$ и $k = 2^s$. Тогда $\overline{S}_2 = \langle d\rangle/\langle d^k\rangle$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G} = G/\langle d^k\rangle$, $\overline{S}_2 = Z(\overline{G}) = O_2(\overline{G})$ и $\overline{S}_2 \leq \overline{G}'$.*

Доказательство. По п. (1) леммы 1 $\overline{G}$ — периодическая группа. Очевидно, что $\overline{S}_2 \leq Z(\overline{G})$, поэтому $\overline{S}_2$ нормальна в $\overline{G}$. По лемме 3 $\overline{G}/\overline{S}_2$ не содержит инволюций и нормальных абелевых подгрупп. Следовательно, $\overline{S}_2$ — силовская 2-подгруппа в $\overline{G}$ и $\overline{S}_2 = Z(\overline{G}) = O_2(\overline{G})$. Допустим, что $\bar{d} \notin \overline{G}'$. Тогда $d\langle d^2\rangle \notin (G/\langle d^2\rangle)'$, согласно доказанному выше $\langle \bar{d}^2\rangle$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{G}'\langle \bar{d}^2\rangle$, в абелевой периодической фактор-группе $(G/\langle d^2\rangle)/(G/\langle d^2\rangle)'$ подгруппа $\langle d(G/\langle d^2\rangle)'\rangle/(G/\langle d^2\rangle)'$ является силовской 2-подгруппой и, значит, выделяется прямым сомножителем. Тем самым и в фактор-группе $G/\langle d^2\rangle$ центральная подгруппа $\langle d\rangle/\langle d^2\rangle$ обладает нормальным дополнением, что противоречит определению A-группы. Следовательно, $\bar{d} \in \overline{G}'$ и $\overline{S}_2 = \langle \bar{d}\rangle \leq \overline{G}'$. Лемма доказана.

Напомним, что группа G называется *центральным произведением* $A \circ B$ групп A и B с объединенной подгруппой C, если $A, B < G$, $G = AB$, $[A, B] = 1$ и $C = A \cap B$.

Лемма 6. *Пусть m, n — натуральные числа и $L = \langle a, b \mid ab = ba,\ a^m = b^n\rangle$.*

(1) L — центральное произведение групп $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$ с объединенной подгруппой $\langle a^m\rangle$.

(2) Если m делит n, то $L = \langle ab^{-\frac{n}{m}}\rangle \times \langle b\rangle$, $|ab^{-\frac{n}{m}}| = m$, $|b| = \infty$.

(3) Когда $(m, n) = k > 1$, группа L является прямым произведением бесконечной циклической группы и группы $\langle a^{-\frac{m}{k}} b^{\frac{n}{k}}\rangle$ порядка k.

(4) Когда m и n — взаимно простые числа, L — бесконечная циклическая группа.

Доказательство. В силу перестановочности элементов a и b группа L абелева и очевидно, что $L = \langle a\rangle \cdot \langle b\rangle$ и $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle d\rangle$, где $d = a^m = b^n$. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) леммы очевидно. Далее, пусть $k = (m, n)$ и r, s — целые числа, для которых $mr + ns = k$ [12, вопрос 1] и, значит,

$$(a^s b^r)^{mn} = a^{mns} b^{mnr} = d^{ns} d^{mr} = d^{mr+ns} = d^k. \tag{2}$$

Ввиду условия $a^m = b^n$ подгруппа $\langle a^{-\frac{m}{k}} b^{\frac{n}{k}}\rangle$ имеет порядок k. Из равенств (2) очевидно, что $|L : \langle a^s b^r\rangle| = k$ и $L = \langle a^{-\frac{m}{k}} b^{\frac{n}{k}}\rangle \times \langle a^s b^r\rangle$. Утверждение (3) доказано. Утверждение (4) следует из утверждения (3) при $k = 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G_1, G_2 — A-группы с центрами $\langle d_1\rangle$, $\langle d_2\rangle$,*

$$\pi_1 = \pi(G_1/Z(G_1)), \quad \pi_2 = \pi(G_1/Z(G_2)), \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing.$$

Тогда центральное произведение G групп G_1 с G_2 с объединенной подгруппой $\langle d\rangle$ ($d = d_1 = d_2$) является A-группой с центром $\langle d\rangle$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $Z(G) = \langle d\rangle$. Возьмем любые элементы $x \in G_1 \setminus \langle d\rangle$, $y \in G_2 \setminus \langle d\rangle$. В силу леммы 1 подгруппы $A = \langle x, d\rangle$ и $B = \langle y, d\rangle$ — бесконечные циклические группы, $A = \langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$. По условиям леммы $a^m = b^n = d$ для подходящих взаимно простых целых чисел m и n. По лемме 6 подгруппа $\langle a, b\rangle$ является бесконечной циклической группой. Значит, G — группа без кручения, и для любого элемента $g \in G \setminus \langle d\rangle$ пересечение $\langle g\rangle \cap \langle d\rangle$ нетривиально. Также нетрудно убедиться, что подгруппа $\langle \bar{z}\rangle$ в фактор-группе $\overline{G} = G/\langle z^2\rangle$ не выделяется прямым сомножителем. Лемма доказана.

Замечание 2. Пусть $A = A(m,n) = \langle a_1, \dots, a_m, d\rangle$ — группа Адяна с центром $\langle d\rangle$ (предложение 4), $Z = \langle z\rangle$ — бесконечная циклическая группа, k — натуральное число, взаимно простое с числом n, и G — центральное произведение групп A и Z с объединенной подгруппой $\langle d\rangle = \langle z^k\rangle$ (полагаем $z^k = d$). Согласно лемме 6 G — K-группа с центром $Z = \langle z\rangle$ и подгруппы $C_i = \langle a_i, z\rangle$ из G циклические ($i = 1, \dots, m$). Поскольку подгруппа $\langle z\rangle$ в каждой из подгрупп C_i имеет индекс n, порождающие элементы c_i подгрупп C_i можно подобрать так, чтобы выполнялись равенства $z = c_1^n = \dots = c_m^n$. Таким образом, $G = \langle c_1, \dots, c_m, z\rangle$, $z = c_1^n = \dots = c_m^n$, но $z \notin G'$ и подгруппа $\langle z\rangle/\langle z^k\rangle$ выделяется в фактор-группе $G/\langle z^k\rangle$ прямым сомножителем.

Пусть G — группа и z — инволюция из G. Элемент $b \in G$ называем *строго вещественным относительно инволюции* z, если $b^z = b^{-1}$. Обозначим через $M_z(G)$ множество всех строго вещественных относительно z элементов из G, а через $N_z(G)$ — подмножество элементов из $M_z(G)$ нечетных порядков ($1 \in N_z(G)$).

Лемма 8. *Пусть инволюция z изолирована в группе G, подгруппа N нормальна в G, $z \notin N$ и $\overline{G} = G/N$. Тогда инволюция $\bar{z}$ изолирована в $\overline{G}$ и $N_{\bar{z}}(\overline{G}) = \{xN \mid x \in N_z(G)\}$.*

Доказательство. Лемма очевидна.

3. Примеры смешанных групп с изолированной инволюцией

Пусть A — A-группа с центральной подгруппой $Z(A) = \langle d\rangle$, $Z_2 = \langle v\rangle$ — группа порядка 2 и $R = A \wr Z_2$ — их сплетение, т. е. $R = (A \times A^v) \rightthreetimes \langle v\rangle$, $A \times A^v = B$ — база сплетения. Подгруппу $Z(B)$ обозначим через Z, понятно, что $Z = Z(A) \times Z(A^v)$ — свободная абелева группа ранга 2. Пусть $M_v(B)$ — множество инвертируемых инволюцией v элементов из B. Очевидно, что

$$M_v(B) = \{a^{-1}a^v \mid a \in A\} \tag{3}$$

и для любого целого числа k имеем

$$(a^{-1}a^v)^k = (a^k)^{-1}(a^k)^v. \tag{4}$$

Далее, поскольку $Z(A) = \langle d\rangle$, подгруппа $D = \langle d^{-1}d^v\rangle = \{a^{-1}a^v \mid a \in Z(A)\}$ нормальна в R. Рассмотрим фактор-группу $G_1 = R/D$ с инволюцией $z_1 = vD$.

Лемма 9. *Инволюция z_1 изолирована в группе G_1.*

Доказательство. Ввиду леммы 8 и равенства (3) в фактор-группе $G_1 = R/D$ множество инвертируемых инволюцией $z_1 = vD$ элементов совпадает с множеством смежных классов wD, где $w = a^{-1}a^v$, $a \in A$. Согласно равенству (4) соотношение $(wD)^n = D$ эквивалентно включению $a^n \in \langle d \rangle$. По лемме 1 такое число n для каждого элемента $a \in A$ существует, и ввиду леммы 5 число n обязательно нечетно. Это означает, что инволюция z_1 в группе G_1 изолирована. Лемма доказана.

Очевидно, что

$$C = C_B(v) = \{aa^v \mid a \in A\} \simeq A, \quad C_R(v) = \langle v \rangle \times C. \tag{5}$$

Обозначим $B_1 = B/D$, так что $G_1 = B_1 \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$.

Лемма 10. *$C_1 = C_{B_1}(z_1)$ — группа без кручения, и $C_{G_1}(z_1) = \langle z_1 \rangle \times C_1$.*

Доказательство. Допустим, что $\bar{s} \in C_1$ и $|\bar{s}| < \infty$. Рассмотрим прообраз S подгруппы $\langle \bar{s} \rangle$ в R. Поскольку $D \leq Z$, то S — абелева группа без кручения, содержащая циклическую подгруппу D конечного индекса. Из основной теоремы о конечно порожденных абелевых группах следует, что S — циклическая группа. Понятно, что $v \in N_R(S)$, и поскольку $S \not\leq C_R(v)$, по лемме 2 v инвертирует S, значит, $\bar{s}^2 = 1$. Ввиду леммы 4 в B/Z нет инволюций, следовательно, $\bar{s} \in Z/D$. Так как $Z = D \times Z(A)$ и $Z/D \simeq \langle d \rangle$ и $|d| = \infty$, то $\bar{s} = \bar{1}$ и C_1 — группа без кручения. Равенство $C_{G_1}(z_1) = \langle z_1 \rangle \times C_1$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 11. *Имеют место равенства $O(G_1) = 1$ и $\overline{O}(G_1) = B_1$. В частности, для группы G_1 и ее инволюции z_1 Z^*-теорема неверна, но справедлива $\overline{Z}^*$-теорема.*

Доказательство. Допустим, что $O(G_1) \neq 1$. Понятно, что $O(G_1) \leq B_1$ и в силу леммы 10 $O(G_1) \cap C_{G_1}(z_1) = 1$. По лемме Бусаркина [9, лемма 2.20] $O(G_1)$ — абелева группа, инвертируемая инволюцией z_1. В частности, каждый элемент из $z_1O(G_1)$ сопряжен с $z_1 = vD$. Пусть M — полный прообраз подгруппы $O(G_1)$ в группе R. Поскольку v инвертирует D, каждый элемент из vD есть инволюция и потому каждый элемент из vM является инволюцией. Отсюда заключаем, что v инвертирует M, $M \subseteq M_v(B)$ и M — абелева группа. Так как $O(G_1) \neq 1$, согласно равенству (3) M содержит элемент $s = a^{-1}a^v$, где $a \in A$, $a \notin Z(A)$. Но тогда $a^b = c \neq a$ для подходящего $b \in A$ и ввиду нормальности подгруппы M в R элемент $s^b = c^{-1}a^v$ также принадлежит M и потому инвертируется инволюцией v, что противоречит равенству (3). Следовательно, $O(G_1) = 1$, поэтому Z^*-теорема для группы G_1 и ее инволюции z_1 неверна.

Далее, допустим, что s — инволюция из B_1. Ввиду леммы 10 $s \notin C_1$, и по лемме 9 $z_1^s z_1$ — элемент нечетного порядка, в частности, $L = \langle z_1, s \rangle$ — конечная группа диэдра. Поскольку инволюции z_1 и s не сопряжены, порядок элемента $z_1 s$ четен и силовская 2-подгруппа из L есть четверная группа Клейна. Но тогда в $L \cap C_1$ есть инволюция, что противоречит лемме 10. Следовательно, подгруппа B_1 инволюций не содержит, $\overline{O}(G_1) = B_1$ по определению, и для пары (G_1, z_1) верна $\overline{Z}^*$-теорема. Лемма доказана.

Замечание 3. Некоторые из групп типа G_1 были указаны В. П. Шунковым в качестве примеров T_0-групп (см. [5, с. 7, примеры 1, 2]).

Другие примеры групп типа G_1 построены в [3, леммы 3, 4].

Предложение 7. *Пусть n — достаточно большое нечетное число, $H = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ — свободная группа многообразия, заданного тождеством $x^n y = y x^n$, v — автоморфизм порядка 2 из $\operatorname{Aut} H$, инвертирующий свободные порождающие $h_1, \dots, h_m$, $D = M_v(Z(H))$ и $G_1 = (H \leftthreetimes \langle v \rangle)/D$, $B_1 = H/D$, $z_1 = vD$. Тогда*

(1) *инволюция z_1 изолирована в $G_1 = B_1 \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$;*

(2) *$C_1 = C_{B_1}(z_1)$ — группа без кручения и $C_{G_1}(z_1) = C \times \langle z_1 \rangle$.*

4. Примеры T_0-групп, доказательство теоремы 1

Сохраним все обозначения разд. 3.

Лемма 12. *Если в группе A каждый нецентральный элемент содержится в единственной максимальной локально циклической подгруппе, то G_1 является T_0-группой.*

Доказательство. Достаточно проверить все пять пунктов определения 1.

(1) Все подгруппы вида $\langle z_1, z_1^g \rangle$, где $g \in G_1$, конечны в силу леммы 9, и п. (1) определения 1 выполняется для инволюции z_1.

(2) Поскольку ввиду леммы 4 в B/Z нет инволюций и $Z = D \times Z(A)$, $Z/D \simeq \langle d \rangle$, то B_1 — группа без инволюций. Отсюда заключаем, что все силовские 2-подгруппы из G_1 сопряжены с подгруппой $\langle z_1 \rangle$ и являются циклическими подгруппами (порядка 2).

(3) В силу леммы 10 централизатор $C_{G_1}(z_1)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью $\langle z_1 \rangle$. Значит, п. (3) определения 1 также имеет место.

(4) Пусть M — локально конечная подгруппа из G_1 и $z_1 \in M$. В силу леммы 10 $M \cap C_{G_1}(z_1) = \langle z_1 \rangle$ и в случае $M = \langle z_1 \rangle$ п. (4) определения 1 выполняется. Пусть $M \neq \langle z_1 \rangle$. Тогда подгруппа $\langle z_1 \rangle$ обособлена в M, и поскольку для локально конечных групп верна теорема Фробениуса [13], $M = F \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$ — группа Фробениуса с абелевым ядром F и неинвариантным множителем $\langle z_1 \rangle$. Пусть $1 \neq b, c \in F$. Тогда $b^{z_1} = b^{-1}$, $c^{z_1} = c^{-1}$ и согласно (3) $b = a^{-1} a^v D$, $c = x^{-1} x^v D \in F$ для подходящих $a, x \in A$. Из $bc = cb$ следует $ax = xa$, и ввиду свойств группы A (лемме 1) подгруппа $\langle a, x \rangle$ из A циклическая. Отсюда выводим, что $\langle b, c \rangle$ — циклическая группа и F — локально циклическая группа. Пусть $A_F = \{a \in A \mid a^{-1} a^v D \in F\}$. Ввиду доказанного выше A_F — локально циклическая подгруппа группы $A/Z(A)$, и по лемме 1 полный прообраз A_F^* подгруппы A_F в A также локально циклическая группа. По условию леммы A_F^* содержится в единственной максимальной локально циклической подгруппе A^* группы A, при этом $N = A^* \times A^{*v}$ — абелева группа без кручения ранга 2 и $N = A^* \times M_v(N)$.

Далее, пусть $1 \neq f = a^{-1} a^v D \in F$ и $t = x y^v D \in N_{B_1}(F)$, где $a, x, y \in A$. Тогда $t \in N_{B_1}(\langle f \rangle)$ и $t^{-1} f t = f^k$ для некоторого натурального числа k. Отсюда следуют равенства $x^{-1} a x = a^k$ и $y^{-1} a y = a^k$. Применяя лемму 1, получаем $x^{-1} a x = a$, $y^{-1} a y = a$, поэтому $x, y \in A^*$. Тем самым $N_{B_1}(F) = ND/(N \cap D)$. Очевидно, что $F \leq S = \{a^{-1} a^v D \mid a \in A^*\}$, $S^{z_1} = S$ и $\langle S, z_1 \rangle = S \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$ — группа Фробениуса с абелевым ядром S и неинвариантным множителем $\langle z_1 \rangle$. Поскольку $N = A^* \times M_v(N)$, то $S = M_v(N)D/D$ и $\langle S, z_1 \rangle$ — периодическая часть подгрупп $N_{G_1}(F)$ и $N_{G_1}(M)$. Тем самым п. (4) определения 1 доказан.

(5) Неравенство $C_{G_1}(z_1) \neq G_1$ очевидно. Пусть $c \in G_1 \setminus C_{G_1}(z_1)$, $c^{z_1} = c^{-1}$ и $c = a^{-1} a^v D$, где $a \in A$. Пусть $s \in C_{B_1}(z_1)$ и $s = b b^v D$, где $b \in A \setminus C_A(a)$. Допустим, что подгруппа $L = \langle c, c^s \rangle$ конечна. Поскольку $c^s = (a^b)^{-1} (a^b)^v D \in M_{z_1}(B_1)$, ввиду п. (4) леммы $\langle L, z_1 \rangle = L \leftthreetimes \langle z_1 \rangle$ — группа Фробениуса с абелевым

ядром L и неинвариантным множителем $\langle z_1\rangle$. Но тогда $aa^b = a^b a$ вопреки п. (4) леммы 1. Следовательно, L — бесконечная группа, и лемма доказана.

Замечание 4. Группы Адяна $A(m, n)$ из предложения 4 и Ольшанского из предложения 6 удовлетворяют условиям леммы 12.

Замечание 5. Группа G_1 из предложения 7 является T_0-группой.

Лемма 13. *Пусть T — T_0-группа с инволюцией z. Тогда $O(T) = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $M = O(T) \neq 1$.

Пусть M — конечная подгруппа. Согласно п. (4) определения 1 имеет место один из двух случаев:

1) $T = N_T(M) \leq C_T(z)$;

2) $T = N_T(M)$ обладает периодической частью K, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка.

В случае 1 имеет место противоречие с неравенством $T \neq C_T(z)$ из п. (5) определения 1.

В случае 2 периодическая часть K, очевидно, является локально конечной группой, поэтому любые два элемента конечных порядков из T порождают конечную подгруппу, что противоречит второй части п. (5) определения 1.

Ввиду полученных противоречий заключаем, что подгруппа M бесконечна.

В силу п. (3) определения 1 подгруппа $C_M(z)$ конечна и инволюция z почти регулярна в периодической группе $G = \langle M, z\rangle$. По известной теореме Шункова [10] подгруппа M локально конечна. Ввиду бесконечности M и п. (3) определения 1 $M \not\leq C_T(z)$. Но тогда по п. (4) определения 1 T обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка. Однако это противоречит п. (5) определения 1 и предложению 2. Лемма доказана.

Теорема 1 следует из предложения 3 и леммы 13.

Ряд вопросов о строении T_0-групп был поставлен В. П. Шунковым в [5] и «Коуровской тетради» [4, вопросы 12.101, 13.67]. Пока остается нерешенным следующий ключевой

Вопрос. *Пусть G — T_0-группа и z — инволюция из G. Верно ли, что $z \in \overline{Z}^*(G)$?*

5. Доказательства теорем 2 и 3

Вернемся к группе $R = B \leftthreetimes \langle v\rangle$ из разд. 3. По (5) $C = C_B(v) = \{aa^v \mid a \in A\}$, и понятно, что $C_0 = \{aa^v \mid a \in Z(A)\} = \langle dd^v\rangle$ — нормальная в R подгруппа. Пусть l — натуральное число и $t = (dd^v)^{2^l}$. Подгруппы $T = \langle t\rangle$ и $K = TD$ нормальны в R. Обозначим $G_2 = R/K$, $B_2 = B/K$ и $z_2 = vK$.

Лемма 14. *G_2 — периодическая группа с изолированной инволюцией z_2.*

Доказательство. Пусть ab^v — произвольный элемент из $B = A \times A^v$, где $a, b \in A$. В силу леммы 1 $a^r = d^p$, $b^s = d^q$ для подходящих ненулевых целых чисел r, s, p, q. Тогда

$$(ab^v)^{2rsk} = a^{2rsk}(b^{2rsk})^v = d^{2psk}(d^{2qrk})^v = d^{psk-qrk}(d^{qrk-psk})^v d^{psk+qrk}(d^{psk+qrk})^v,$$

а поскольку $d^{psk-qrk}(d^{qrk-psk})^v \in D$ и $d^{psk+qrk}(d^{psk+qrk})^v \in T$, то $(ab^v)^{2rsk} \in K = DT$. Следовательно, порядок любого элемента ab^vK в $B_2 = B/K$ конечен, и G_2 — периодическая группа. По лемме 8 инволюция z_2 изолирована в G_2. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть $S = Z/DT$ и $S_2 = CD/DT$. Тогда*

(1) *S — циклическая группа порядка 2^{l+1} и $[S : S_2] = 2$, при этом S — силовская 2-подгруппа группы B_2 и, в частности, $S = O_2(B_2) = Z(B_2)$;*

(2) *подгруппа S_2 содержится в коммутанте группы B_2.*

Доказательство. (1) Легко проверить, что $Z = D \times \langle d \rangle = C \times \langle d \rangle$. Следовательно, $Z/D \simeq \langle d \rangle \simeq Z/C$, и группа $S = Z/DT$ циклическая. Далее, $[Z : DC] = 2$, поэтому $[S : S_2] = 2$ и $|S| = 2|C/T| = 2^{l+1}$. По лемме 3 фактор-группа $A/\langle d \rangle$ не содержит нетривиальных абелевых нормальных подгрупп и $S = Z(B_2)$. Далее, ввиду леммы 3 в $B/Z \simeq B_2/S$ нет инволюций и $S = O_2(B_2)$.

(2) Рассмотрим подгруппу $C_1 = C_{B_1}(z_1)$. По лемме 10 C_1 — группа без кручения, являющаяся центральным произведением групп CD/D и $Z/D = \langle dD \rangle$ с объединенной подгруппой CD/D, в частности, $[C_1 : CD/D] = 2$. Согласно (3) и (5) $C \cap D = 1$ и, значит, подгруппа CD/D изоморфна группе A, а подгруппа $A_2 = CD/DT$ из B_2 содержит подгруппу S_2 и изоморфна фактор-группе $A/\langle d^{2^l} \rangle$. По лемме 3 подгруппа S_2 содержится в коммутанте группы A_2, а значит, и в коммутанте группы B_2. Лемма доказана.

Лемма 16. *Z^*-теорема для группы G_2 и ее изолированной инволюции z_2 неверна.*

Доказательство. Как следует из лемм 14, 15, $G_2 = B_2 \leftthreetimes \langle z_2 \rangle$ — периодическая группа с изолированной инволюцией z_2 и центральной 2-подгруппой S, содержащейся в коммутанте группы B_2. Поэтому достаточно доказать, что нормальное замыкание X множества $M_{z_2}(G_2)$ в группе G_2 содержит коммутант группы B_2. Множество $M_{z_2}(G_2)$ состоит из элементов $g = a^{-1}a^v DT$, где $a \in A$, и для любого элемента $b \in A$ и элемента $h = bDT \in B_2$ имеет место равенство $h^{-1}ghg^{-1} = b^{-1}a^{-1}baDT$. Следовательно, $A'DT/DT \leq X$, поэтому $(A')^v DT/DT \leq X$ и $B_2' \leq X$. Лемма доказана.

Теорема 2 следует из лемм 14–16.

Замечание 6. В [3] на основе свободных групп многообразия, заданного тождеством $x^n y = yx^n$, построены периодические группы вида $G_2 = \langle z_2^{G_2} \rangle = B_2 \leftthreetimes \langle z_2 \rangle$ с изолированными инволюциями z_2, в которых $z_2 \notin Z^*(G_2)$.

Построенные в леммах 9–12 контрпримеры к Z^*-теореме смешанных групп, для которых верна $\overline{Z}^*$-теорема, назовем *группами типа* G_1, а периодические группы-контрпримеры к Z^*-теореме из лемм 14–16 и замечания 6 — *группами типа* G_2.

Лемма 17. *Пусть X_1 — группа типа G_1 с изолированной инволюцией x_1, X_2 — группа типа G_2 с изолированной инволюцией x_2, $G = X_1 \times X_2$ и $z = x_1x_2$. Тогда инволюция z изолирована в G и для смешанной группы G и ее инволюции z $\overline{Z}^*$-теорема неверна.*

Доказательство. По предложению 1 инволюция z изолирована в G. Поскольку X_1 — не периодическая группа, G — смешанная группа. Нетрудно убедиться, что $\overline{O}(G) = \overline{O}(G_1) \times O(G_2)$ и $\overline{Z}^*(G) = \overline{Z}^*(G_1) \times Z^*(G_2)$. По лемме 11 $x_1 \in \overline{Z}^*(G_1)$, а в силу леммы 16 $x_2 \notin Z^*(G_2)$. Отсюда следует, что $z = x_1x_2 \notin \overline{Z}^*(G)$, и лемма доказана.

Лемма 17 завершает доказательство теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauberman G.* Central elements in core-free groups // J. Algebra. 1966. V. 4, N 3. P. 403–420.
2. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
3. *Созутов А. И., Дураков Е. Б.* О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 5. С. 632–637.
4. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 6-е–17-е изд. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1978–2012.
5. *Шунков В. П.* T_0-группы. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000.
6. *Адян С. И.* О некоторых группах без кручения // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1971. Т. 35, № 3. С. 459–468.
7. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
8. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
9. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011.
10. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
12. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
13. *Бусаркин В. М., Старостин А. И.* О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб. 1963. Т. 62, № 3. С. 275–294.

Статья поступила 14 ноября 2013 г.

Созутов Анатолий Ильич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 82, Красноярск 660041;
Сибирский гос. аэрокосмический университет им. акад. М. Ф. Решетнева,
пр. имени газеты «Красноярский Рабочий», 31, Красноярск 660037
sozutov_ai@mail.ru

Дураков Евгений Борисович
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 82, Красноярск 660041
durakov@mail.ru