Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 512.552.52+512.552.7

О ВЛОЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ G–ФИЛЬТРОВАННЫХ КОЛЕЦ В ТЕЛА

А. И. Валицкас

Аннотация. Рассматриваются фильтрованные кольца с фильтрацией v, принимающей значения в упорядоченной группе G (G-фильтрованные кольца). Доказывается, что если такое кольцо R удовлетворяет условию

$$\forall a, b \in R^* \ \forall \varepsilon \in G \ \exists x, y \in R^* \quad v(a \cdot x - b \cdot y) > \varepsilon \cdot v(a \cdot x),$$

то R вложимо в тело. Это тело D становится топологическим в топологии, индуцированной продолжением фильтрации v, а множество $R \cdot R^{-1}$ всюду плотно в D.

Ключевые слова: кольцо, группа, упорядоченная группа, тело, фильтрация, первичный матричный идеал, алгебра Ли, универсальная обертывающая алгебра.

Пусть $(G, *, <)$ — упорядоченная группа, т. е. группа относительно операции $*$ с отношением линейного порядка $<$, устойчивым относительно умножений слева и справа: $\forall a, b, c \in G \ (a < b) \to (c * a < c * b) \wedge (a * c < b * c)$. Положим $G_\infty = G \cup \{\infty\}$ и распространим порядок и операцию умножения с G на G_∞, полагая $\forall a \in G \ (a < \infty) \wedge (a * \infty = \infty * a = \infty * \infty = \infty)$.

Кольцо $(R, +, \cdot)$ назовем *G-фильтрованным*, если задана функция $v : R \to G_\infty$, называемая *G-фильтрацией* (или *G-оценкой*) и удовлетворяющая условиям:

(V1) $\forall x \in R \quad v(x) = \infty \leftrightarrow x = 0$,

(V2) $\forall x, y \in R \quad v(x - y) \geq \min(v(x), v(y))$,

(V3) $\forall x, y \in R \quad v(x \cdot y) \geq v(x) * v(y)$.

Очевидно, что любое кольцо можно рассматривать как G-фильтрованное с тривиальной G-фильтрацией, где $G = \{e\}$ — единичная группа. Другим примером G-фильтрованного кольца может служить групповая алгебра $F[G]$ (над полем F) упорядоченной группы G. В этом случае G-фильтрация определяется формулой $v\big(\sum\limits_{g \in G} \alpha_g \cdot g\big) = \min\{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ для ненулевых элементов $\sum\limits_{g \in G} \alpha_g \cdot g \in F[G]$ и условием (V1).

Легко понять, что для любых $x, y \in R$ в G-фильтрованном кольце R выполнены свойства: $v(-x) = v(x)$, $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ и $v(x \pm y) = \min\{v(x), v(y)\}$, если $v(x) \neq v(y)$.

Введенная выше G-фильтрация на групповой алгебре $F[G]$ удовлетворяет более сильному, чем (V3), условию

(V4) $\forall x, y \in R \quad v(x \cdot y) = v(x) * v(y)$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будут рассматриваться G-фильтрации, удовлетворяющие условию (V4). Очевидно, что любое такое G-фильтрованное кольцо R не содержит делителей нуля, так что множество $R^* = R \setminus \{0\}$ является его мультипликативной полугруппой.

С каждым G-фильтрованным кольцом R связано *G-градуированное кольцо* $\mathrm{gr}(R) = \sum_{g \in G} \oplus R_g/R_{>g}$ — прямая сумма *однородных компонент* $R_g/R_{>g}$, где $R_g = \{r \in R \mid v(r) \geq g\}$ и $R_{>g} = \{r \in R \mid v(r) > g\}$ — аддитивные абелевы группы. Операции сложения и умножения в этом кольце определяются естественным образом.

Рассмотрим следующее условие: *для любых* $a, b \in R^*$ *функция* $f_{a,b} : R^* \times R^* \to G_\infty$, *где* $f_{a,b}(x, y) = v(a \cdot x - b \cdot y) * v(a \cdot x)^{-1}$, *не ограничена сверху*, т. е.

$$\forall a, b \in R^* \ \forall g \in G \ \exists x, y \in R^* \quad f_{a,b}(x, y) > g. \tag{1}$$

Очевидно, что для тривиальной группы G оно равносильно *правому условию Оре*: $\forall a, b \in R^* \ \exists x, y \in R^* \quad a \cdot x = b \cdot y$. $\mathbb{Z}$-фильтрованные кольца (с обычным порядком на абелевой группе $\mathbb{Z}$) с условием (1) изучались Коном в [1], где доказано, что в этом случае условие (1) эквивалентно правому условию Оре для градуированного кольца $\mathrm{gr}(R)$, а также доказана

Теорема Кона [1]. *Кольцо с $\mathbb{Z}$-оценкой, удовлетворяющей условию* (1), *вложимо в тело.*

Доказательство этой теоремы состояло в построении «фильтрованного» аналога конструкции Оре классического тела частных. Оно существенно использовало топологические методы и требовало кропотливых вычислений для получения некоторых неравенств. Впоследствии более простое доказательство теоремы Кона (также использующее некоторые топологические конструкции) было дано Лихтманом [2].

Нетрудно понять (примеры приведены в § 6), что в общем случае условие (1) не эквивалентно правому условию Оре для $\mathrm{gr}(R)$: ни одно из этих свойств не влечет другое.

В настоящей работе предлагается алгебраический подход к доказательству аналога теоремы Кона для произвольных G-фильтрованных колец с условием (1), называемым в дальнейшем *условием Кона.* При этом используется следующий критерий вложимости колец в тела.

Теорема [3, гл. 7]. *Область целостности R с единицей вложима в тело тогда и только тогда, когда существует первичный матричный идеал над R, не содержащий ненулевых скалярных матриц.*

Прежде чем сформулировать основной результат работы, введем некоторые обозначения. Очевидно, что любую G-фильтрацию можно распространить с кольца R на множество $\mathrm{Mat}(R)$ всех прямоугольных матриц над R, полагая для матрицы $A = (a_{ij})$ с компонентами $a_{ij} \in R$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, значение $v(A)$ равным $\min\{v(a_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$. В частности, кольцо $M(n, R)$ всех квадратных $n \times n$-матриц над R становится G-фильтрованным кольцом (не удовлетворяющим при $n > 1$ свойству (V4)). Для любой прямоугольной матрицы A над R зададим функцию $f_A : \mathrm{Mat}(R) \to G$, считая $f_A(X) = v(A \cdot X) * v(X)^{-1}$, если $A \cdot X$ определено и $X \neq 0$, и $f_A(X) = e \in G$ в противном случае.

Целью работы является доказательство следующей основной теоремы.

Теорема. *Любое кольцо R с G-оценкой, удовлетворяющей условию Кона, вложимо в тело. При этом если R — кольцо с единицей, то множество матриц*

$$\wp = \{A \in M(R) \mid \forall g \in G \ \exists X \in \mathrm{Mat}(R) \ f_A(X) > g\} \tag{2}$$

является первичным матричным идеалом над R, не содержащим ненулевых скалярных матриц.

Множество матриц (2) является аналогом естественного первичного матричного идеала над правым кольцом Оре (состоящего из всех матриц, являющихся левыми делителями нуля). Эта аналогия делает более прозрачными все проводимые вычисления и в целом доказательство основной теоремы.

Для кольца с единицей теорема доказывается в § 3, а в § 4 из этого результата путем «присоединения» единицы к G-фильтрованному кольцу выводится сформулированная теорема в полном объеме. В § 5 G-фильтрация кольца R распространяется на полученное тело частных, которое тоже становится G-фильтрованным кольцом. При этом оказывается, что множество дробей $R^* \cdot (R^*)^{-1}$ всюду плотно в индуцированной оценкой топологии.

В § 1 даются необходимые определения, а в § 2 доказывается вспомогательная теорема 1, из которой выводится более удобный для рассматриваемого случая критерий вложимости кольца в тело. В § 6 приведены некоторые примеры и приложения доказанной основной теоремы.

К сожалению, доказанные теоремы нельзя применить для вложения в тела групповых алгебр: нетрудно заметить (это сделано в § 6), что групповая алгебра упорядоченной группы с рассмотренной выше естественной G-фильтрацией удовлетворяет условию Кона тогда и только тогда, когда она является правым кольцом Оре.

Полученные результаты были ранее анонсированы автором в [4].

Автор выражает благодарность профессору Л. А. Бокутю за интерес к работе и поддержку, а также рецензенту за замечания и любезно указанную ссылку на [5].

§ 1. Обозначения и определения

Если не оговорено противное, все рассматриваемые кольца предполагаются имеющими единицы. Множество всех $m \times n$-матриц над кольцом R обозначим через $M(m, n, R)$. В случае $m = n$ будем использовать краткую запись $M(n, R)$, а при $n = 1$ отождествлять $M(1, R)$ с кольцом R. Кроме того, положим $R^n = \mathrm{Mat}(1, n, R)$, ${}^mR = \mathrm{Mat}(m, 1, R)$. Через $\mathrm{Mat}(R)$, $M(R)$, R^∞ и ${}^\infty R$ будут обозначаться множества всех прямоугольных, всех квадратных матриц, всех строк и всех столбцов над R соответственно. Множество всех прямоугольных матриц, у которых количество строк не превосходит числа столбцов, обозначим через $\mathrm{Mat}_-(R)$. *Минором* (*порядка* k) прямоугольной матрицы назовем любую ее $(k \times k)$-подматрицу (состоящую из элементов, расположенных на пересечениях некоторых k строк и k столбцов).

Для обозначения единичной матрицы из $M(n, R)$ будет использоваться символ I_n или просто I, если порядок матрицы ясен из контекста. Нулевые матрицы из множества $\mathrm{Mat}(R)$ будут обозначаться одним символом 0, а их размеры, как правило, будут однозначно определяться размерами окружающих матриц. Если один из размеров не восстанавливается однозначно, то символ 0 следует интерпретировать как строку или столбец.

Через $E(n, R)$ обозначим группу элементарных матриц порядка n над кольцом R (порожденную всеми трансвекциями), а символ $E(R)$ будем использовать для обозначения множества всех элементарных матриц над R. Естественным образом определяется произведение матриц из $E(\mathbb{Z})$ на прямоугольные матрицы подходящего размера над R.

Для матрицы $A \in \mathrm{Mat}(R)$ иногда будут использоваться ее блочные разбиения: $A = (\,A_1 \quad A_2\,)$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где все блоки A_i, A_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, являются прямоугольными матрицами над R подходящих согласованных друг с другом размеров. При этом некоторые блоки могут быть пустыми, т. е. отсутствовать.

Приводимые ниже определения содержатся в [3, гл. 7]. Для любых двух прямоугольных матриц A и B над R формула $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ определяет их *диагональную сумму*. Матрица вида $\underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{n}$, где $a \in R$, называется *скалярной*.

Если прямоугольные матрицы A и B одинакового размера отличаются лишь в i-м столбце, то говорят, что определена их *детерминантная сумма относительно i-го столбца*, обозначаемая в дальнейшем символом $A \bigtriangledown_i^c B$ и представляющая собой матрицу того же размера, что A и B, i-й столбец которой равен сумме i-х столбцов матриц A и B, а остальные совпадают с соответствующими (равными) столбцами этих матриц. Таким образом, если заданы матрицы $A = (\,A_1 \quad a \quad A_2\,)$, $B = (\,A_1 \quad b \quad A_2\,)$, где a и b — выделенные i-е столбцы, то $A \bigtriangledown_i^c B = (\,A_1 \quad a+b \quad A_2\,)$.

Аналогично определяется *детерминантная сумма* $A \bigtriangledown_i^r B = \begin{pmatrix} A_1 \\ a+b \\ A_2 \end{pmatrix}$ *матриц* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ a \\ A_2 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} A_1 \\ b \\ A_2 \end{pmatrix}$ *относительно i-й строки.*

Для произвольных непустых множеств X и Y прямоугольных матриц над R и операции ω — одной из (частичных) операций $\bigtriangledown_i^c, \bigtriangledown_i^r, +, \cdot, \oplus$ — положим $X\omega Y = \{x\omega y \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Кроме того, обозначим через $X \bigtriangledown^c Y$ и $X \bigtriangledown^r Y$ множества $\bigcup\limits_i (X \bigtriangledown_i^c Y)$ и $\bigcup\limits_i (X \bigtriangledown_i^r Y)$ соответственно.

Пусть $\mathscr{Z}D_l(R)$ — множество всех матриц, являющихся *левыми делителями нуля* (включая нулевые матрицы), а $\mathscr{N}(R)$ — множество всех *неполных над* R матриц:

$$\mathscr{Z}D_l(R) = \{A \in \mathrm{Mat}(R) \mid \exists X \in^\infty R \setminus \{0\}\ A \cdot X = 0\},$$
$$\mathscr{N}(R) = \{0\} \cup \bigcup_{n \ge 2} M(n, n-1, R) \cdot M(n-1, n, R).$$

Множество $\wp$ квадратных матриц над кольцом R с единицей называется *первичным матричным идеалом*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(P0) $\wp \bigtriangledown^r \wp \subseteq \wp$,
(P1) $\wp \bigtriangledown^c \wp \subseteq \wp$,
(P2) $\mathscr{N}(R) \subseteq \wp$,
(P3) $\wp \oplus M(R) \subseteq \wp$,
(P4) $\forall A, B \in M(R)\ (A \oplus B \in \wp) \to (A \in \wp) \vee (B \in \wp)$,
(P5) $1 \notin \wp$.

В [3, гл. 7] доказано, что любой первичный матричный идеал совпадает с множеством всех квадратных матриц, отображающихся в вырожденные при некотором гомоморфизме кольца R в тело. Отсюда следует приведенный во введении критерий Кона вложимости колец в тела. В § 2 показано, что условие (P0) в определении первичного матричного идеала следует из остальных.

§ 2. Условие вложимости кольца в тело

Для доказательства основной теоремы 2 удобно рассматривать вместо первичных матричных идеалов множества $\mathscr{Q}$ всех прямоугольных матриц над кольцом R, отображающихся в левые делители нуля при фиксированном вложении области целостности R в тело. Множество $\mathscr{Q}$ удовлетворяет, очевидно, следующим свойствам:

(Q1) $\mathscr{Q} \bigtriangledown^c \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{Q}$,

(Q2) $\mathscr{Z}D_l(R) \subseteq \mathscr{Q}$,

(Q3) $\mathscr{Q} \oplus \mathrm{Mat}(R) \subseteq \mathscr{Q}$,

(Q4) $\forall A, B \in \mathrm{Mat}(R)\ (A \oplus B \in \mathscr{Q}) \to (A \in \mathscr{Q} \vee B \in \mathscr{Q})$,

(Q5) $\mathscr{Q} \cap R = \{0\}$,

(Q6) $M(1,2,R) \subseteq \mathscr{Q}$,

(Q7) $\forall A \in \mathscr{Q} \cap M(m,n,R),\ B \in M(m,k,R)\ \ (A \quad B) \in \mathscr{Q}$,

(Q8) $\forall A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$; в частности, $\forall A \in \mathscr{Q} \quad \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$.

Ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{Q}$ — множество прямоугольных матриц над кольцом R с единицей, удовлетворяющее условиям* (Q1)–(Q8). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$M(m,n,R) \subseteq \mathscr{Q}$ при $m < n$,*

(2) (Q7) $\wedge$ (Q8) $\Rightarrow$ (Q3),

(3) *множество $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$ является первичным матричным идеалом, не содержащим ненулевых скалярных матриц,*

(4) *матрица $A \in M(m,n,R)$, где $m > n$, принадлежит $\mathscr{Q}$ тогда и только тогда, когда любой ее $(n \times n)$-минор является элементом $\wp$,*

(5) *если $\lambda : R \to R_\wp$ — вложение кольца R в тело $R_\wp$, полученное локализацией относительно первичного матричного идеала $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$, то $\mathscr{Q} = \lambda^{-1}(\mathscr{Z}D_l(R_\wp))$.*

Доказательство. Большинство из использованных ниже рассуждений известны (см. [3, с. 324–326]) и приводятся лишь для удобства читателя. Пусть $\mathscr{Q}$ — произвольное множество прямоугольных матриц над кольцом R, удовлетворяющее свойствам (Q1)–(Q8), а $\mathscr{R}$ — любое множество квадратных матриц над R, удовлетворяющее условиям (P1)–(P5). Чтобы изучать свойства этих множеств одновременно, условимся, что символ M на протяжении всего доказательства будет обозначать либо множество $\mathscr{Q}$, либо множество $\mathscr{R}$, а символ M_- — множество $\mathrm{Mat}_-(R) \cap M$. Ссылаясь в рассуждениях на свойства (1)–(5) множества M, будем иметь в виду (в зависимости от контекста) соответствующие однотипные свойства (P1)–(P5) или (Q1)–(Q5).

Вначале докажем некоторые вспомогательные свойства множества M.

1°. Множество M замкнуто относительно элементарных преобразований столбцов: $M \cdot E(R) = M$.

В самом деле, для любых матрицы $(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j \quad \ldots) \in M$ с выделенными столбцами a_i, a_j и $r \in R$ имеем

$$(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j + a_i \cdot r \quad \ldots) \\ = (\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j \quad \ldots) \bigtriangledown_j^c (\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_i \cdot r \quad \ldots),$$

причем вторая из участвующих в этой детерминантной сумме матриц является, очевидно, как неполной, так и делителем нуля. Поэтому ввиду свойства (1) $(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j + a_i \cdot r \quad \ldots) \in M$.

2°. Результат перестановки в матрице из множества M двух столбцов с одновременным изменением знака одного из них лежит в M:

$$(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j \quad \ldots) \in M \Leftrightarrow (\ldots \quad -a_j \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots) \in M \\ \Leftrightarrow (\ldots \quad a_j \quad \ldots \quad -a_i \quad \ldots) \in M.$$

Действительно, на основании 1° имеем

$$(\ldots \quad a_i \quad \ldots \quad a_j \quad \ldots) \in M \Leftrightarrow (\ldots \quad a_i - a_j \quad \ldots \quad a_j \quad \ldots) \in M \\ \Leftrightarrow (\ldots \quad a_i - a_j \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots) \in M \Leftrightarrow (\ldots \quad -a_j \quad \ldots \quad a_i \quad \ldots) \in M.$$

3°. Пусть $A \in M(m,n,R)$, $B \in M(m,k,R)$. Тогда

$$(A \quad B) \in M \Leftrightarrow ((-1)^n \cdot B \quad A) \in M \Leftrightarrow (B \quad (-1)^k \cdot A) \in M.$$

Это свойство выводится из 2° путем последовательной многократной перестановки столбцов одной из указанных матриц со всеми столбцами другой матрицы.

4°. При $m < n$ справедливо включение $M(m,n,R) \subseteq \mathscr{Q}$.

В самом деле, произвольную $(m \times n)$-матрицу можно представить в виде детерминантной суммы по столбцам некоторых матриц, у которых в каждом столбце присутствует не более одного ненулевого элемента. Ввиду условия (Q1) достаточно показать, что каждое такое слагаемое лежит в $\mathscr{Q}$. С учетом свойства 2° каждое из рассматриваемых слагаемых с помощью перестановки столбцов приводится к диагональной сумме строк, причем так как $n > m$, хотя бы одна из них имеет длину не менее двух. Остается заметить, что из условий (Q6), (Q7) следует включение $M(1,n,R) \subseteq \mathscr{Q}$ при $n > 1$, и воспользоваться свойством (Q3).

Проиллюстрируем эти рассуждения на примере (2×3)-матриц:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \nabla_1^c \begin{pmatrix} 0 & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \nabla_2^c \begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \right) \nabla_1^c \left(\begin{pmatrix} 0 & c & e \\ b & 0 & f \end{pmatrix} \nabla_2^c \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\left(\begin{pmatrix} a & c & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \nabla_3^c \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right) \nabla_2^c \left(\begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \nabla_3^c \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\nabla_1^c \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & c & e \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \nabla_3^c \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ b & 0 & f \end{pmatrix} \right) \nabla_2^c \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ b & d & 0 \end{pmatrix} \nabla_3^c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & d & f \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в полученной детерминантной сумме матриц принадлежит $\mathscr{Q}$: например, $\begin{pmatrix} a & 0 & e \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} a & -e & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$, и последнее условие выполнено ввиду $(a \quad -e) \in \mathscr{Q}$ и свойства (Q3).

Таким образом, доказано утверждение (1) теоремы 1.

5°. (Q7) $\wedge$ (Q8) $\Rightarrow$ (Q3), $\mathrm{Mat}(R) \oplus \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{Q}$.

Действительно, пусть $A \in \mathscr{Q}$, $B \in \mathrm{Mat}(R)$. Тогда в силу (Q8) $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$ и по условию (Q7) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$, т. е. $\mathscr{Q} \oplus \mathrm{Mat}(R) \subseteq \mathscr{Q}$.

Условие $\mathrm{Mat}(R) \oplus \mathscr{Q} \subseteq \mathscr{Q}$ проверяется аналогично: $\begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$, $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$ в силу (Q8) и (Q7), так что $\begin{pmatrix} \pm B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$ по свойству 3°.

Таким образом, утверждение (2) теоремы 1 доказано.

6°. Пусть A, B, C, D — матрицы согласованных размеров над кольцом R, причем либо A — квадратная матрица и $M = \mathscr{R}$, либо A — прямоугольная матрица такая, что для любого столбца x матриц C или D матрица $(\,A \quad \pm x\,)$ при любых комбинациях знаков принадлежит $M = \mathscr{Q}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M, \quad \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & A \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M.$$

В частности, эти эквивалентности имеют место в случае, когда для любого столбца x подходящего размера над R верно включение $(\,A \quad x\,) \in M = \mathscr{Q}$, например, для $A \in M(R) \cup \mathscr{Q}$.

Применим индукцию по числу ненулевых столбцов матрицы C для доказательства следующего утверждения: участвующие в левых и правых частях эквивалентностей матрицы отличаются на детерминантные слагаемые из M. Проведем доказательство для первой эквивалентности, так как вторая рассматривается аналогично.

Если $C = 0$, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть $C = (\,0 \quad c \quad C_2\,)$, $B = (\,B_1 \quad b \quad B_2\,)$, где c — выделенный первый ненулевой столбец. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & c & C_2 \\ 0 & B_1 & b & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & B_1 & b & B_2 \end{pmatrix} \bigtriangledown^c \begin{pmatrix} A & 0 & c & C_2 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Первое детерминантное слагаемое удовлетворяет предположению индукции. Докажем, что второе слагаемое при сделанных предположениях о матрице A также принадлежит M.

По свойству 2°

$$\begin{pmatrix} A & 0 & c & C_2 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & \pm c & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} \in M.$$

Если $M = \mathscr{R}$, то $\begin{pmatrix} A & \pm c & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & C_2 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & \pm c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ — неполная матрица, принадлежащая M по свойству (P2). Если же $M = \mathscr{Q}$, то $(\,A \quad \pm c\,) \in M$ по условию, а рассматриваемая матрица принадлежит M в силу свойств (Q7), (Q8).

7°. $\forall k \in \mathbb{N} \ \pm I_k \notin M$.

Ввиду свойства (4) достаточно проверить, что $\pm 1 \notin M$. Если $M = \mathscr{Q}$, это следует из (Q5) и (Q4), а если $M = \mathscr{R}$ — из (P5), (P4) и следующей цепочки эквивалентностей:

$$-1 \in M \overset{3,4}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M \overset{1°}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M$$

$$\overset{1°}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M \overset{2°}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M \overset{1°}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \overset{4}{\Leftrightarrow} 1 \in M.$$

8°. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow A \in M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M$.

Первая эквивалентность очевидна в силу свойств (4), (5). Вторая эквивалентность для $M = \mathscr{Q}$ следует из 5°, (4), (5). Если $M = \wp$, то она справедлива ввиду следующей цепочки равносильных утверждений для $A \in M(m,R)$:

$$A \in M \overset{3,4}{\underset{7^\circ}{\Leftrightarrow}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (-I_m)^{m+1} \end{pmatrix} \in M \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A & (-I_m)^m \\ 0 & (-I_m)^{m+1} \end{pmatrix} \in M$$
$$\overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & (-I_m)^m \\ A & (-I_m)^{m+1} \end{pmatrix} \in M \overset{3^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -I_m & A \end{pmatrix} \in M \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M$$
$$\overset{4,5}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M \overset{5^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M.$$

9°. $\mathscr{R} \cdot M(R) = \mathscr{R}$. Имеем

$$(A \in M(n,R) \cap \mathscr{R}) \wedge (B \in M(n,R)) \overset{3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$$
$$\overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \cdot B & (-1)^n \cdot A \\ 0 & (-I_n)^{n+1} \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$$
$$\overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \cdot B & 0 \\ 0 & (-I_n)^{n+1} \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \overset{3,4}{\underset{7^\circ}{\Leftrightarrow}} A \cdot B \in \mathscr{R}.$$

10°. $M(R) \oplus \mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}$.

Действительно, если $A \in \mathscr{R}$, $B \in M(R)$, то по свойству 8° $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$ и по свойству 9° $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$.

11°. Если $m \leq n$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $M(m,k,R) \cdot (M(k,n,R) \cap M) \subseteq M$. В частности, $M(R) \cdot \mathscr{R} = \mathscr{R}$.

В самом деле, если $A \in M(k,n,R) \cap M$ и $B \in M(m,k,R)$, то $B \cdot A \in \mathrm{Mat}_-(R)$ и по свойствам 5°, 10° имеем $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M$, так что

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & 0 \\ -I & A \end{pmatrix} \in M \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & B \cdot A \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M$$
$$\overset{3^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B \cdot A & \pm B \\ 0 & \mp I \end{pmatrix} \in M \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B \cdot A & 0 \\ 0 & \mp I \end{pmatrix} \in M \overset{4,6^\circ}{\underset{7^\circ}{\Leftrightarrow}} B \cdot A \in M.$$

Докажем утверждение (3) теоремы 1, проверив свойства (P0)–(P5) первичных матричных идеалов для множества матриц $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$. При этом свойства (P1), (P3)–(P5) следуют, очевидно, из соответствующих свойств множества $\mathscr{Q}$.

12°. Множество $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$ удовлетворяет свойству (P2), т. е. верно включение $\mathscr{N}(R) \subseteq M(R) \cap \mathscr{Q}$.

Пусть $A \in \mathscr{N}(R)$. Если A — нулевая матрица, то $A \in \mathscr{Q}$ по свойствам (Q5) и (Q3). Если же $A = B \cdot C$, где $B \in M(n, n-1, R)$, $C \in M(n-1, n, R)$, то, дополняя матрицы B и C нулевыми столбцом и строкой соответственно, получим $A = (\,B \quad 0\,) \cdot \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$ — произведение квадратных матриц. По свойствам 4° и (Q8) второй множитель является элементом $\mathscr{Q}$, и для доказательства включения $A \in \mathscr{Q}$ можно применить свойство 11°.

13°. Условие (P0) в определении первичного матричного идеала является следствием остальных условий (P1)–(P5).

Если $\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{R}$ и для этих матриц определена детерминантная сумма $\begin{pmatrix} a+b \\ A \end{pmatrix}$ относительно первой строки (рассуждения для любой другой строки сводятся к этому случаю путем перестановки строк, допустимой ввиду 11°), то

$$\begin{pmatrix} a+b \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \underset{6^\circ}{\overset{3,\,4}{\Leftrightarrow}} \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ A & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{R},$$

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ A & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ A & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \nabla^c \begin{pmatrix} a+b & -1 \\ A & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

и оба детерминантных слагаемых лежат в $\mathscr{R}$:

$$\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ A & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \overset{11^\circ,\,6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 \\ A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \underset{5}{\overset{3,\,4}{\Leftrightarrow}} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{R},$$

$$\begin{pmatrix} a+b & -1 \\ A & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \overset{11^\circ,\,6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} b & 0 \\ A & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{R} \underset{5}{\overset{3,\,4}{\Leftrightarrow}} \begin{pmatrix} b \\ A \end{pmatrix} \in \mathscr{R}.$$

Таким образом, утверждение (3) теоремы 1 доказано.

Рассмотрим тело $R_\wp$, полученное из R локализацией относительно первичного матричного идеала $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$, и соответствующее вложение $\lambda : R \to R_\wp$. Как доказано в [3, гл. 7], множество $\wp$ состоит из тех и только тех матриц, которые отображаются в вырожденные при гомоморфизме λ. Положим $\mathscr{Q}_\wp = \lambda^{-1}(\mathscr{Z}D_l(R_\wp))$. Ясно, что матрица $A \in M(m,n,R)$ при $m \geq n$ принадлежит $\mathscr{Q}_\wp$ тогда и только тогда, когда каждый ее $(n \times n)$-минор переходит при гомоморфизме λ в вырожденную над $R_\wp$ матрицу, т. е. $A \in \mathscr{Q}_\wp$ тогда и только тогда, когда каждый ее $(n \times n)$-минор является элементом $\wp$. Таким образом, утверждения (4) и (5) доказываемой теоремы эквивалентны.

Если A — $(m \times n)$-матрица из $\mathscr{Q}$ и $m \geq n$, то любой ее $(n \times n)$-минор может быть получен умножением матрицы A слева на подходящую $(n \times m)$-матрицу. По свойству 11° каждое такое произведение лежит в $\mathscr{Q}$, а значит, выполнено включение $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{Q}_\wp$. Докажем обратное включение $\mathscr{Q}_\wp \subseteq \mathscr{Q}$.

14°. $\forall A = (\,B \quad c\,) \in \mathscr{Q}\ \forall x \in R\ \ (\,B \quad c \cdot x\,) \in \mathscr{Q}$.

В самом деле, для $x = 0$ утверждение очевидно, а для $x \neq 0$ имеем

$$(\,B \quad c\,) \in \mathscr{Q} \overset{3,\,4}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & c & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$$

$$\overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & c & c \cdot x \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & c \cdot x & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$$

$$\overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} B & c \cdot x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{4,\,5}{\Leftrightarrow} (\,B \quad c \cdot x\,) \in \mathscr{Q}.$$

15°. Пусть A $= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$. Тогда для любых элемента $x \in R$ и строки y подходящего размера над R верно $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ y & x \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{Q8,\,Q7}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ y & 1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q},$$

и доказываемое утверждение следует из 14°.

16°. Пусть матрица A над R такова, что любая ее подматрица, полученная из A вычеркиванием одной строки, принадлежит $\mathscr{Q}$. Тогда для произвольного столбца x подходящего размера над R верно $(\,A \quad x\,) \in \mathscr{Q}$.

Действительно, пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$ — $(m \times n)$-матрица со строками $a_1, \dots, a_m$, $m > n$, и столбец длины m над R. Тогда матрицу $(\,A \quad x\,)$ можно разложить в детерминантную сумму по последнему столбцу: $(\,A \quad x\,) = \bigtriangledown_i \begin{pmatrix} A_i^{(1)} & 0 \\ a_i & x_i \\ A_i^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$, где $A_i^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_{i-1} \end{pmatrix}$, $A_i^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_i^{(1)} \\ A_i^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$, $1 \le i \le m$, и воспользоваться свойствами 15° и (Q1).

Рассмотрим матрицу $A \in M(m, n, R)$ и, проведя индукцию по числу m, докажем одновременно следующие два утверждения.

17°. Если $A \in \mathscr{Q}$, то $E(R) \cdot A \subseteq \mathscr{Q}$ (т. е. $E(R) \cdot \mathscr{Q} = \mathscr{Q}$).

18°. Если $A \in \mathscr{Q}_\wp$, то $A \in \mathscr{Q}$ (т. е. $\mathscr{Q}_\wp \subseteq Q$).

База индукции (случай $m = 1$), очевидно, имеется. Предположим, что оба утверждения уже доказаны при $m = k$, и обоснуем их для $m = k + 1$. При этом ввиду 11°, 4° можно ограничиться случаем $m > n$. Кроме того, поскольку все $(n \times n)$-миноры матрицы A принадлежат $\wp \subseteq \mathscr{Q}$, будем считать (применяя предположение индукции для свойства 18°), что любая $((m-1) \times n)$-подматрица матрицы A тоже принадлежит $\mathscr{Q}$.

Для доказательства 17° достаточно понять, что $t_{ij}(r) \cdot A \in \mathscr{Q}$ для любой трансвекции $t_{ij}(r) \in E(m, R)$. Следуя рассуждениям, использованным при обосновании свойства 11°, имеем

$$\begin{pmatrix} t_{ij}(r) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} t_{ij}(r) & 0 \\ -I & A \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$$

$$\overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} t_{ij}(r) & t_{ij}(r) \cdot A \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \overset{3^\circ,14^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} t_{ij}(r) \cdot A & t_{ij}(r) \\ 0 & -I \end{pmatrix} \in \mathscr{Q}$$

$$\overset{6^\circ}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} t_{ij}(r) \cdot A & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \in \mathscr{Q} \underset{7^\circ}{\overset{4,6^\circ}{\Leftrightarrow}} t_{ij}(r) \cdot A \in \mathscr{Q}.$$

Остановимся более подробно на обосновании первой и предпоследней эквивалентностей в этой цепочке. В силу 6° и 14° достаточно убедиться, что для любого столбца x матриц $-I$ или $t_{ij}(r)$ выполнены включения $(\,A \quad x\,) \in \mathscr{Q}$ или $(\,t_{ij}(r) \cdot A \quad x\,) \in \mathscr{Q}$ соответственно. В первом случае это непосредственно следует из 15° и сделанного выше замечания о подматрицах матрицы A.

Во втором случае любая $((m-1)\times n)$-подматрица матрицы $t_{ij}(r)\cdot A$ принадлежит $\mathscr{Q}$ в силу сделанного выше замечания о подматрицах матрицы A и индукционного предположения для 17°. Если x не является j-м столбцом матрицы $t_{ij}(r)$, то он содержит единственный ненулевой элемент и $(\, t_{ij}(r)\cdot A \quad x\,)\in\mathscr{Q}$ по свойству 15°. Если x будет j-м столбцом матрицы $t_{ij}(r)$, то, выделяя i-ю и j-ю строки в A, получим

$$A=\begin{pmatrix}\dots\\ a_i\\ \dots\\ a_j\\ \dots\end{pmatrix},\,(\, t_{ij}(r)\cdot A \quad x\,)=\begin{pmatrix}\dots & 0\\ a_i+r\cdot a_j & r\\ \dots & 0\\ a_j & 1\\ \dots & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}\overset{1^\circ}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}\dots & 0\\ a_i & r\\ \dots & 0\\ 0 & 1\\ \dots & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{Q},$$

и последняя матрица принадлежит $\mathscr{Q}$ ввиду того, что любая $((m-1)\times n)$-подматрица матрицы A тоже принадлежит $\mathscr{Q}$ с учетом свойств (Q8), (Q7). Таким образом, завершено обоснование индукционного перехода для свойства 17°.

При обосновании индукционного перехода для свойства 18° проведем индукцию по числу n столбцов матрицы A. В случае $n=1$ матрица A нулевая (поскольку $\wp\cap R=\{0\}$) и принадлежит $\mathscr{Q}$. Выделим в матрице $A=(\,B \quad b\,)$ последний столбец b. Если $B\in\mathscr{Q}_\wp$, то $B\in\mathscr{Q}$ (по предположению индукции для n) и $A\in\mathscr{Q}$ по свойству (Q7). Таким образом, в матрице B можно выбрать минор порядка $n-1$, не принадлежащий $\wp$, а значит (по предположению индукции для n), не принадлежащий $\mathscr{Q}$. Переставляя в A строки (используя доказанное для A свойство 17°), можно считать, что $A=\begin{pmatrix}b & x\\ B & y\\ c & z\end{pmatrix}$, где b и c — строки, $x,z\in R$, y — столбец, а $B\in M(m-2,n-1,R)\setminus\mathscr{Q}$. Имеем

$$\begin{pmatrix}b & x\\ B & y\end{pmatrix}\in\mathscr{Q},\ \begin{pmatrix}B & y\\ c & z\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}\underset{17^\circ}{\overset{3,14^\circ}{\Leftrightarrow}}\begin{pmatrix}z & c\\ y & B\end{pmatrix}\in\mathscr{Q},$$

причем $\begin{pmatrix}b & x & 0\\ B & y & 0\\ 0 & z & c\\ 0 & y & B\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}$ и $\begin{pmatrix}b & x & 0\\ B & y & 0\\ c & z & c\\ B & y & B\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}$ по 1°.

Далее имеем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{pmatrix}b & x & 0\\ B & y & 0\\ c & z & c\\ B & y & B\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}\underset{14^\circ}{\overset{5^\circ,6^\circ}{\Leftrightarrow}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I & 0 & I & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & b & x & 0\\ 0 & -I & 0 & 0 & B & y & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & c & z & c\\ 0 & 0 & 0 & -I & B & y & B\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}$$

$$\underset{14^\circ}{\overset{1^\circ,3^\circ}{\Leftrightarrow}}\begin{pmatrix}b & x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ B & y & 0 & 0 & I & 0 & 0\\ c & z & c & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & B & 0 & -I & 0 & I\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}\underset{14^\circ}{\overset{6^\circ,4^\circ}{\Leftrightarrow}}\begin{pmatrix}b & x\\ B & y\\ c & z\end{pmatrix}\in\mathscr{Q}.$$

Таким образом, свойства 17°, 18° обоснованы. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Кольцо R с единицей вложимо в тело тогда и только тогда, когда существует множество $\mathscr{Q}$ прямоугольных матриц над R, удовлетворяющее условиям* (Q1), (Q2), (Q4)–(Q8).

Доказательство. Необходимость сформулированного условия очевидна. Если же над кольцом R существует множество $\mathscr{Q}$ прямоугольных матриц со свойствами (Q1), (Q2), (Q4)–(Q8), то по утверждению (3) теоремы 1 множество матриц $\wp = M(R) \cap \mathscr{Q}$ будет первичным матричным идеалом, не содержащим ненулевых скалярных матриц. Значит, для кольца R выполняется критерий Кона, обеспечивающий вложение в тело. Следствие доказано.

§ 3. Вложение в тела G-фильтрованных колец с единицей, удовлетворяющих условию Кона

Целью настоящего параграфа является доказательство сформулированной во введении теоремы для случая G-фильтрованных колец с единицей. Напомним, что для матрицы $A = (a_{ij}) \in M(m,n,R)$ определено значение $v(A) = \min\{v(a_{ij}) \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$, а функция $f_A : \mathrm{Mat}(R) \to G_\infty$ задана так: $f_A(X) = v(A \cdot X) * v(X)^{-1}$, если $X \ne 0$, $A \cdot X$ определено, и $f_A(X) = e \in G$ в противном случае.

Теорема 2. *Любое кольцо R с единицей и G-оценкой, удовлетворяющей условию Кона, вложимо в тело. При этом множество матриц*

$$\wp = \{A \in M(R) \mid \forall g \in G\ \exists X \in {}^{\infty}R\ f_A(X) > g\} \tag{3}$$

является первичным матричным идеалом над R, не содержащим ненулевых скалярных матриц.

Доказательство. Ввиду теоремы 1 и ее следствия достаточно доказать, что множество

$$\mathscr{Q} = \{A \in \mathrm{Mat}(R) \mid \forall g \in G\ \exists X \in {}^{\infty}R\ f_A(X) > g\} \tag{4}$$

удовлетворяет условиям (Q1), (Q2), (Q4)–(Q8).

Если $A \in \mathrm{Mat}(R) \setminus \mathscr{Q}$, то $\exists g \in G\ \forall X \in {}^{\infty}R\ f_A(X) \le g$. Зафиксируем для матрицы A любое такое значение $g > \max\{e, v(A)\}$, где e — единица группы G, и обозначим его символом $\gamma(A)$. Таким образом, получаем функцию $\gamma : \mathrm{Mat}(R) \setminus \mathscr{Q} \to G$ со следующим свойством $\forall A \in \mathrm{Mat}(R) \setminus \mathscr{Q}\ (\gamma(A) > e) \wedge (\gamma(A) > v(A)) \wedge (\forall X \in {}^{\infty}R\ f_A(X) \le \gamma(A))$.

Лемма 1 (о функции f_A). *Пусть R — произвольное кольцо с G-оценкой v. Тогда функция $f_A : R \to G_\infty$ обладает следующими свойствами:*

(F2) *если $A \cdot X = 0$ и $X \ne 0$, то $f_A(X) = \infty$;*

(F4) *если $C = A \oplus B$, то для любых столбцов X, Y над R выполнено неравенство $f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \le \max\{f_A(X), f_B(Y)\}$;*

(F5) *$f_A(X) \ge v(A)$, для любой скалярной матрицы A это неравенство превращается в равенство;*

(F6) *если оценка v удовлетворяет условию Кона, то для любых $a, b \in R$ и произвольного $g \in G$ найдется такой столбец $X \in {}^{2}R$, что $f_{(ab)}(X) > g$;*

(F7) *если $C = (A \quad B)$, то для любых столбцов X, Y над R выполнено неравенство $f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ge \min\{f_A(X), f_B(Y)\}$;*

(F8) *если* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ A_2 \end{pmatrix}$, *то для любого столбца* X *верно* $f_A(X) = f_B(X)$;

(F9) *если* U — *обратимая матрица над* R *и определено произведение* $B = A \cdot U$, *то* $f_B(U^{-1} \cdot X) \leq f_A(X) * v(U^{-1})^{-1}$ *и* $f_A(X) \leq f_B(U^{-1} \cdot X) * v(U)^{-1}$;

(F10) *если* $B = (\,A \quad a\,) \in \mathscr{Q}$ *и* $A \notin \mathscr{Q}$, *то при достаточно большом* $g \in G$ $(g > \gamma(A) * \max\{e, v(A)^{-1} * v(a)\})$ *неравенство* $f_B \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} > g$ *справедливо только в случае* $v(A \cdot X) = v(a \cdot x)$, *причем* $L * v(x) \leq v \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \leq M * v(x)$, $\gamma(A)^{-1} * v(a) * v(x) \leq v(X) \leq v(A)^{-1} * v(a) * v(x)$, *где* $L = \min\{e, \gamma(A)^{-1} * v(a)\}$, $M = \max\{e, v(A)^{-1} * v(a)\}$;

(F11) *если* $B = (\,A \quad a\,) \in \mathscr{Q}$ *и* $A \notin \mathscr{Q}$, *то из одновременного выполнения следующих трех условий:*

$$f_B \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} > g, \quad f_B \begin{pmatrix} Y \\ y \end{pmatrix} > g, \quad v(x \cdot p - y \cdot q) > g * v(x \cdot p)$$

при достаточно большом $g \in G$ *следует неравенство*

$$v(X \cdot p - Y \cdot q) > K * g * L * v(x \cdot p),$$

где $K = \gamma(A)^{-1} * \min\{e, v(a)\}$, $L = \min\{e, \gamma(A)^{-1} * v(a)\}$, $g > \max\{\gamma(A), \gamma(A) * v(A)^{-1} * v(a)\}$.

Замечание. Нумерация свойств (F2)–(F8) в лемме соответствует нумерации свойств (Q2)–(Q8), при доказательстве которых будут использованы эти свойства функции f_A.

Доказательство. Свойства (F2), (F6), (F8) очевидны.

(F4) Если $C = A \oplus B$, а X, Y — любые столбцы над R, для которых определены произведения $A \cdot X$ и $B \cdot Y$, то по определению

$$f_C \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} A \cdot X \\ B \cdot Y \end{pmatrix} * v \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^{-1} = \min\{v(A \cdot X), v(B \cdot Y)\} * \min\{v(X), v(Y)\}^{-1}.$$

Если это выражение равно $v(A{\cdot}X){*}v(X)^{-1}$ или $v(B{\cdot}Y){*}v(Y)^{-1}$, то доказываемое неравенство $f_C \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \leq \max\{f_A(X), f_B(Y)\}$ выполнено. В случае $v(X) > v(Y)$ и $v(A \cdot X) < v(B \cdot Y)$ исследуемое выражение равно $v(A \cdot X) * v(Y)^{-1}$ и меньше $v(B \cdot Y) * v(Y)^{-1} \leq \max\{f_A(X), f_B(Y)\}$. Если же $v(X) < v(Y)$ и $v(A \cdot X) > v(B{\cdot}Y)$, то выражение равно $v(B{\cdot}Y){*}v(X)^{-1}$ и меньше, чем $v(A{\cdot}X){*}v(X)^{-1} \leq \max\{f_A(X), f_B(Y)\}$, что и требовалось доказать.

(F5) Неравенство $f_A(X) = v(A \cdot X) * v(X)^{-1} \geq v(A)$ выполнено ввиду (V3): $v(A \cdot X) \geq v(A) * v(X)$. Если A $= \underbrace{a \oplus \dots \oplus a}_{n}$ — скалярная матрица, то по (V4) имеем $v(a \cdot x) = v(a) * v(x)$, т. е. $v(A \cdot X) = v(A) * v(X)$, и $f_A(X) = v(A \cdot X) * v(X)^{-1} = v(A)$.

(F7) Для $C = (\,A \quad B\,)$ имеем $f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = v(A\cdot X + B\cdot Y) * v\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^{-1}$. Если это выражение равно $v(A\cdot X) * v(X)^{-1}$ или $v(B\cdot Y) * v(Y)^{-1}$, то требуемое неравенство $f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geq \min\{f_A(X), f_B(Y)\}$ выполнено.

В случае $v(X) > v(Y)$ и $v(A\cdot X) < v(B\cdot Y)$ получаем

$$f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = v(A\cdot X) * v(Y)^{-1} > f_A(X) \geq \min\{f_A(X), f_B(Y)\}.$$

Если $v(X) < v(Y)$ и $v(A\cdot X) > v(B\cdot Y)$, то аналогично

$$f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} > v(B\cdot Y) * v(Y)^{-1} \geq \min\{f_A(X), f_B(Y)\}.$$

Наконец, если $v(A\cdot X + B\cdot Y) > v(A\cdot X) = v(B\cdot Y)$, то исследуемое выражение $f_C\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ больше, чем $v(A\cdot X)*v(X)^{-1} = f_A(X)$, в случае $v(X) \leq v(Y)$ и больше, чем $v(B\cdot Y) * v(Y)^{-1} = f_B(Y)$, в случае $v(X) > v(Y)$, что и требовалось.

(F9) Так как $f_B(U^{-1}\cdot X) = v(B\cdot U^{-1}\cdot X)^{-1} * v(U^{-1}\cdot X)^{-1} = v(A\cdot X) * v(U^{-1}\cdot X)^{-1}$ и $v(U^{-1}\cdot X) \geq v(U^{-1}) * v(X)$, имеем

$$f_B(U^{-1}\cdot X) \leq v(A\cdot X) * v(X)^{-1} * v(U^{-1})^{-1} = f_A(X) * v(U^{-1})^{-1}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f_A(X) &= v(A\cdot X) * v(X)^{-1} = v(B\cdot U^{-1}\cdot X) * v(U\cdot U^{-1}\cdot X)^{-1} \\ &\leq v(B\cdot U^{-1}\cdot X) * v(U^{-1}\cdot X)^{-1} * v(U)^{-1} = f_B(U^{-1}\cdot X) * v(U)^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

(F10) Пусть $v(A\cdot X + a\cdot x) > g * \min\{v(X), v(x)\}$, где $g \in G$ достаточно велико, а $A \notin \mathscr{Q}$, и поэтому $v(A\cdot X) \leq \gamma(A) * v(X)$. Рассмотрим несколько случаев.

(а) $v(A\cdot X) > v(a\cdot x)$. Тогда $v(A\cdot X) > v(a) * v(x) = v(a\cdot x) = v(A\cdot X + a\cdot x) > g * \min\{v(X), v(x)\}$. Если последний минимум равен $v(x)$, то $v(a)*v(x) > g*v(x)$, что противоречит выбору $g \in G$. Если же этот минимум равен $v(X)$, то снова приходим к противоречию $v(A\cdot X) > g * v(X)$. Итак, случай (а) невозможен.

(б) $v(A\cdot X) < v(a\cdot x)$. Имеем $v(A\cdot X) \geq v(A) * v(X)$, значит, $v(X) \leq v(A)^{-1} * v(A\cdot X) < v(A)^{-1} * v(a\cdot x) = v(A)^{-1} * v(a) * v(x)$. С другой стороны, $v(X) \geq \gamma(A)^{-1} * v(A\cdot X) = \gamma(A)^{-1} * v(A\cdot X + a\cdot x) > \gamma(A)^{-1} * g * \min\{v(X), v(x)\}$. Если последний минимум равен $v(x)$, то $\gamma(A)^{-1} * g * v(x) < v(A)^{-1} * v(a) * v(x)$ вопреки выбору $g \in G$. Если же этот минимум равен $v(X)$, то снова получим противоречие $v(X) > \gamma(A)^{-1} * g * v(X)$. Таким образом, невозможен и случай (б).

(в) $v(A\cdot X) = v(a\cdot x)$. В этом случае $v(a) * v(x) = v(a\cdot x) = v(A\cdot X) \geq v(A) * v(X)$ и $v(X) \geq \gamma(A)^{-1} * v(A\cdot X) = \gamma(A)^{-1} * v(a\cdot x) = \gamma(A)^{-1} * v(a) * v(x)$, что и требовалось доказать. Теперь $v\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$ равно $v(x)$, если $v(X) \geq v(x)$, и равно $v(X) \geq \gamma(A)^{-1} * v(a) * v(x)$, если $v(X) < v(x)$, т. е. в любом случае рассматриваемая величина не меньше $L * v(x)$. Аналогично доказывается и второе неравенство $v\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \leq M * v(x)$. Свойство (F10) доказано.

(F11) Пусть одновременно выполнены три условия:

$$v(A\cdot X+a\cdot x)>g*\min\{v(X),v(x)\},\quad v(A\cdot Y+a\cdot y)>g*\min\{v(Y),v(y)\},$$
$$v(x\cdot p-y\cdot q)>g*v(x\cdot p).$$

Тогда по свойству (F10) при $g>\gamma(A)*\max\{e,v(A)^{-1}*v(a)\}$ будут выполняться неравенства

$$v(X)\geq\gamma(A)^{-1}*v(a)*v(x),\quad v(Y)\geq\gamma(A)^{-1}*v(a)*v(y).$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}v\left(\begin{pmatrix}A & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X\cdot p-Y\cdot q\\ x\cdot p-y\cdot q\end{pmatrix}\right)&=v((A\cdot X+a\cdot x)\cdot p-(A\cdot Y+a\cdot y)\cdot q)\\ &\geq\min\{v(A\cdot X+a\cdot x)*v(p),v(A\cdot Y+a\cdot y)*v(q)\}\\ &\quad>g*\min\left\{v\begin{pmatrix}X\\ x\end{pmatrix}*v(p),v\begin{pmatrix}Y\\ y\end{pmatrix}*v(q)\right\}\geq g*L*v(x\cdot p),\end{aligned}$$

где $L=\min\{e,\gamma(A)^{-1}*v(a)\}$.

Последнее неравенство выполнено, так как по (F10) $v\begin{pmatrix}X\\ x\end{pmatrix}\geq L*v(x)$, $v\begin{pmatrix}Y\\ y\end{pmatrix}\geq L*v(y)$ и $v(y\cdot q)=v(x\cdot p)$ ввиду $v(x\cdot p-y\cdot q)>g*v(x\cdot p)$ при $g>e$.

Рассмотрим теперь два возможных случая для неравенства $v(X\cdot p-Y\cdot q)\geq\gamma(A)^{-1}*v(A\cdot(X\cdot p-Y\cdot q))$.

(а) $v(A\cdot(X\cdot p-Y\cdot q))\geq v(a\cdot(x\cdot p-y\cdot q))$. Тогда

$$\begin{aligned}v(X\cdot p-Y\cdot q)&\geq\gamma(A)^{-1}*v(a\cdot(x\cdot p-y\cdot q))\\ &=\gamma(A)^{-1}*v(a)*v(x\cdot p-y\cdot q)>\gamma(A)^{-1}*v(a)*g*v(x\cdot p)\\ &\geq K*g*L*v(x\cdot p).\end{aligned}$$

(б) $v(A\cdot(X\cdot p-Y\cdot q))<v(a\cdot(x\cdot p-y\cdot q))$. Тогда

$$\begin{aligned}v(X\cdot p-Y\cdot q)&\geq\gamma(A)^{-1}*v(A\cdot(X\cdot p-Y\cdot q))\\ =\gamma(A)^{-1}*v(A\cdot(X\cdot p-Y\cdot q)+a\cdot(x\cdot p-y\cdot q))&\geq\gamma(A)^{-1}*g*L*v(x\cdot p)\\ &\geq K*g*L*v(x\cdot p).\end{aligned}$$

Таким образом, свойство (F11) доказано. Лемма доказана.

Выполнение условий (Qi) обеспечивается соответствующими свойствами (Fi) ($i\neq 1$). Докажем, например, свойство (Q4). От противного, если $C=A\oplus B\in\mathscr{Q}$, но $A\notin\mathscr{Q}$ и $B\notin\mathscr{Q}$, то, с одной стороны, $\forall g\in G\ \exists\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\in^{\infty}R$ $f_C\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}>g$, а с другой — $\forall X\in^{\infty}R\quad(f_A(X)\leq\gamma(A))\wedge(f_B(X)\leq\gamma(B))$, что вместе со свойством (F4) приводит к противоречию.

Итак, для доказательства теоремы 2 осталось проверить замкнутость множества $\mathscr{Q}$ относительно детерминантных сумм по столбцам (условие (Q1)). Ввиду (F9) множество $\mathscr{Q}$ замкнуто относительно умножения справа на обратимые матрицы, в частности, результат перестановки столбцов в любой матрице, принадлежащей $\mathscr{Q}$, снова принадлежит $\mathscr{Q}$. Поэтому достаточно доказать лишь замкнутость множества $\mathscr{Q}$ относительно детерминантных сумм по последнему столбцу.

Пусть $A = (\,D \quad a\,)$, $B = (\,D \quad b\,) \in \mathscr{Q}$ и $C = A \bigtriangledown^c B = (\,D \quad a+b\,)$. Если $D \in \mathscr{Q}$, то $C \in \mathscr{Q}$ по свойству (Q7). Поэтому будем предполагать, что $D \notin \mathscr{Q}$, т. е. $\exists g_0 \in G\ \forall X \in^\infty R\ f_D(X) \leq g_0$, причем в силу (F5) $g_0 \geq v(D)$. Кроме того, можно считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in G$ и выберем столбцы $X = \begin{pmatrix} U \\ u \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}$ так, чтобы выполнялись неравенства $f_A(X) > g$, $f_B(Y) > g$, где $g > g_0$ — достаточно большой элемент группы G, зависящий от матрицы C и ε, точное значение которого будет указано позднее. Ясно, что $u \neq 0$, $w \neq 0$: если, например, $u = 0$, то $g_0 < g < f_A(X) = v(D \cdot U) * v(U)^{-1} = f_D(U) \leq g_0$; противоречие. Значит, по условию Кона можно найти такие $p, q \in R$, что $v(u \cdot p - w \cdot q) > g * v(u \cdot p)$. Докажем, что столбец $Z = \begin{pmatrix} U \cdot p + W \cdot q \\ u \cdot p \end{pmatrix}$ при достаточно большом $g \in G$ удовлетворяет условию $f_C(Z) > \varepsilon$, т. е. $C \in \mathscr{Q}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
f_C(Z) &= v(D \cdot (U \cdot p + W \cdot q) + (a+b) \cdot u \cdot p) * v(Z)^{-1} \\
&= v((D \cdot U + a \cdot u) \cdot p + (D \cdot W + b \cdot w) \cdot q + b \cdot (u \cdot p - w \cdot q)) \\
&\geq \min\{v((D \cdot U + a \cdot u) \cdot p), v((D \cdot W + b \cdot w) \cdot q), v(b \cdot (u \cdot p - w \cdot q))\} * v(Z)^{-1} \\
&> \min\{g * v\begin{pmatrix} U \cdot p \\ u \cdot p \end{pmatrix}, g * v\begin{pmatrix} W \cdot q \\ w \cdot q \end{pmatrix}, v(b) * g * v(u \cdot p)\} * v(Z)^{-1} \\
&\overset{F10}{\geq} \min\{g * L_1, g * L_2, v(b) * g\} * v(u \cdot p) * v(Z)^{-1},
\end{aligned}
$$

где $L_1 = \min\{e, \gamma(D)^{-1} * v(a)\}$, $L_2 = \min\{e, \gamma(D)^{-1} * v(b)\}$.

Кроме того, $v(Z) = \min\{v(U \cdot p + W \cdot q), v(u \cdot p)\} \leq v(u \cdot p)$, так что $v(u \cdot p) * v(Z)^{-1} \geq e$, и при достаточно большом $g \in G$ окончательно получаем $f_C(Z) \geq \min\{g * L_1, g * L_2, v(b) * g\} > \varepsilon$: можно взять $g > \max\{\varepsilon * L_1^{-1}, \varepsilon * L_2^{-1}, v(b)^{-1} * \varepsilon\}$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Присоединение единицы

Результаты этого параграфа о продолжении G-оценок, безусловно, известны специалистам и приводятся лишь для удобства читателя. Из теоремы 3 немедленно будет следовать основная теорема.

Теорема 3. *Любое кольцо R с G-оценкой $v : R \to G_\infty$ вкладывается в кольцо с единицей $R^\#$ и G-оценкой $v^\# : R^\# \to G_\infty$, продолжающей v. При этом если v удовлетворяла условию Кона, то и $v^\#$ также удовлетворяет условию Кона.*

Доказательство. Случай $R = \{0\}$ очевиден, поэтому будем считать, что в кольце R есть элемент $c \neq 0$. Как и всякая область целостности, R обладает характеристикой p, где p либо простое число, либо нуль.

Вначале присоединим к R единицу внешним образом, т. е. рассмотрим прямую сумму абелевых групп $R^\# = \mathbb{Z}_p \dot{+} R$ ($\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$), превратив ее в кольцо со стандартными операциями сложения $(k + r) + (m + s) = (k + m) + (r + s)$ и умножения $(k + r) \cdot (m + s) = (k \cdot m) + (r \cdot m + k \cdot s + r \cdot s)$.

Разберем последовательно два возможных случая:

(а) $\forall k \in \mathbb{Z}_p,\ r \in R \quad (k+r)\cdot c = 0 \leftrightarrow k = 0 \wedge r = 0$. Зададим функцию $v_{\#} : R \to G_\infty$, полагая $v^{\#}(k+r) = v((k+r)\cdot c) * v(c)^{-1}$, где c — выбранный ранее ненулевой элемент кольца R. Очевидно, что в рассматриваемом случае для $v^{\#}$ выполняется условие (V1): $\forall x \in R^{\#}\ v^{\#}(x) = \infty \leftrightarrow x = 0$. Проверим условия (V2) и (V4). Если $x = k+r$, $y = m+s \in R^{\#}$, то $v((x-y)\cdot c) \geq \min\{v(x\cdot c),\ v(y\cdot c)\}$,

$$v^{\#}(x-y) = v((x-y)\cdot c) * v(c)^{-1} \geq \min\{v(x\cdot c),\ v(y\cdot c)\} * v(c)^{-1}$$
$$= \min\{v(x\cdot c) * v(c)^{-1}, v(y\cdot c) * v(c)^{-1}\} = \min\{v^{\#}(x), v^{\#}(y)\}.$$

Кроме того, равенство $v^{\#}(x\cdot y) = v^{\#}(x) * v^{\#}(y)$ для $x = k+r$, $y = m+s$ равносильно условию

$$v((k+r)\cdot(m+s)\cdot c) = v((k+r)\cdot c) * v(c)^{-1} * v((m+s)\cdot c),$$

которое превращается в верное после умножения слева на $v(c)$: $v(c\cdot(k+r)\cdot(m+s)\cdot c) = v(c\cdot(k+r)) * v((m+s)\cdot c)$. Таким образом, в случае (а) функция $v^{\#}$ является G-оценкой на $R^{\#}$. При этом $\forall x \in R\ v^{\#}(x) = v(x\cdot c) * v(c)^{-1} = v(x) * v(c) * v(c)^{-1} = v(x)$, т. е. $v^{\#}$ продолжает v.

Наконец, если оценка v удовлетворяла условию Кона, то этому условию будет удовлетворять и $v^{\#}$. Действительно, по условию Кона для v по любым $a, b \in (R^{\#})^*$ и произвольному $g \in G$ можно найти такие $x, y \in R$, что $v((a\cdot c)\cdot x - (b\cdot c)\cdot y) > g * v((a\cdot c)\cdot x)$, т. е. $v^{\#}(a\cdot(c\cdot x) - b\cdot(c\cdot y)) = v(a\cdot c\cdot x\cdot c - b\cdot c\cdot y\cdot c) * v(c)^{-1} = v(a\cdot c\cdot x - b\cdot c\cdot y) > g * v((a\cdot c)\cdot x) = g * v((a\cdot c)\cdot x\cdot c) * v(c)^{-1} = g * v^{\#}(a\cdot(c\cdot x))$, что и требовалось доказать.

(б) $\exists k \in \mathbb{Z}_p,\ r \in R \quad (k+r)\cdot c = 0 \wedge k+r \neq 0$. Ясно, что $k \neq 0$, $r \neq 0$. Докажем, что r лежит в центре $C(R)$ кольца R. Действительно, для любого $x \in R \setminus \{0\}$ верно $(x\cdot(k+r))\cdot c = 0$, т. е. $x\cdot(k+r) = 0$. Далее, $x\cdot((k+r)\cdot x) = 0$, $(k+r)\cdot x = 0$ и $x\cdot r = -k\cdot x = r\cdot x$.

Легко понять, что элементы $v(r)^{\pm 1}$ группы G коммутируют со всеми элементами вида $v(x)$, где $x \in R : v(r) * v(x) = v(r\cdot x) = v(x\cdot r) = v(x) * v(r)$.

Пусть $R^{\#} = R\cdot r^{-1} = \{x\cdot r^{-i} \mid x \in R \wedge i \in \mathbb{N}\}$ — центральная локализация кольца R относительно мультипликативной системы $\{r^i \in C(R) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $x\cdot r^{-i} = y\cdot r^{-j} \Leftrightarrow x\cdot r^j = y\cdot r^i$, $x\cdot r^{-i} + y\cdot r^{-j} = (x\cdot r^j + y\cdot r^i)\cdot r^{-(i+j)}$, $(x\cdot r^{-i})\cdot(y\cdot r^{-j}) = (x\cdot y)\cdot r^{-(i+j)}$. Определим теперь $v^{\#} : R^{\#} \to G_\infty$, полагая $v^{\#}(x\cdot r^{-i}) = v(x) * v(r)^{-i}$. Это определение корректно: если $x\cdot r^{-i} = y\cdot r^{-j}$, то $x\cdot r^j = y\cdot r^i$ и $v^{\#}(x\cdot r^{-i}) = v(x) * v(r)^{-i} = v(x\cdot r^j) * v(r)^{-(i+j)} = v(y\cdot r^i) * v(r)^{-(i+j)} = v(y) * v(r)^{-j} = v^{\#}(y\cdot r^{-j})$.

Ясно, что $v^{\#}(x\cdot r^{-i}) = \infty \Leftrightarrow v(x) = \infty \Leftrightarrow x\cdot r^{-i} = 0$ и (V1) выполнено. Далее, $v^{\#}(x\cdot r^{-i} - y\cdot r^{-j}) = v(x\cdot r^j - y\cdot r^i) * v(r)^{-(i+j)} \geq \min\{v(x\cdot r^j), v(y\cdot r^i)\} * v(r)^{-(i+j)} = \min\{v^{\#}(x\cdot r^{-i}),\ v^{\#}(y\cdot r^{-j})\}$, т. е. выполнено (V2). Наконец, $v^{\#}((x\cdot r^{-i})\cdot(y\cdot r^{-j})) = v(x\cdot y) * v(r)^{-(i+j)} = v(x) * v(r)^{-i} * v(y) * v(r)^{-j} = v^{\#}(x\cdot r^{-i}) * v^{\#}(y\cdot r^{-j})$, и условие (V4) также выполняется. Таким образом, в случае (б) $v^{\#}$ является G-оценкой на $R^{\#}$. При этом $v^{\#}$ продолжает v: для любого $x \in R$ верно $v^{\#}(x) = v^{\#}((x\cdot r)\cdot r^{-1}) = v(x\cdot r) * v(r)^{-1} = v(x)$.

Если оценка v удовлетворяла условию Кона, то это условие будет выполнено и для $v^{\#}$. Действительно, по условию Кона для v по $a, b \in R^*$ и произвольному $g \in G$ можно найти такие $x, y \in R$, что $v(a\cdot x - b\cdot y) > g * v(a\cdot x)$, т. е. $v^{\#}(a\cdot r^{-i}\cdot(x\cdot r^i) - b\cdot r^{-j}\cdot(y\cdot r^j)) = v(a\cdot x - b\cdot y) > g * v(a\cdot x) = g * v^{\#}((a\cdot r^{-i})\cdot(x\cdot r^i))$.

Итак, в любом случае кольцо R вкладывается в кольцо с единицей $R^{\#}$, на которое продолжается G-оценка с сохранением условия Кона. Теорема 3 доказана.

Тем самым завершено доказательство основной теоремы, сформулированной во введении.

Теорема. *Любое кольцо R с G-оценкой, удовлетворяющей условию Кона, вложимо в тело. При этом если R — кольцо с единицей, то множество матриц*

$$\wp = \{A \in M(R) \mid \forall g \in G\ \exists X \in \mathrm{Mat}(R)\ f_A(X) > g\}$$

является первичным матричным идеалом над R, не содержащим ненулевых скалярных матриц.

§ 5. *G*-оценка и топология на теле частных

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть R — кольцо с единицей, на котором определена G-оценка $v : R \to G_\infty$, удовлетворяющая условию Кона,*

$$\wp = \{A \in M(R) \mid \forall g \in G\ \exists X \in^\infty R\ f_A(X) > g\}$$

— первичный матричный идеал из теоремы 1 и $R_\wp$ — соответствующее ему тело частных кольца R. Тогда G-оценка v единственным образом продолжается до G-оценки $v_\wp : R_\wp \to G_\infty$, превращающей $R_\wp$ в топологическое тело, в котором всюду плотно множество дробей

$$R \cdot R^{-1} = \{r \cdot s^{-1} \in R_\wp \mid r \in R,\ s \in R \setminus \{0\}\}.$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько этапов.

1. Конструкция тела частных. Для изучения тела частных $R_\wp$ воспользуемся конструкцией некоммутативной локализации Герасимова — Малкольмсона [6–8]. Пусть

$$M_\wp = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right) \in M(R) \mid a, d \in \mathrm{Mat}(R),\ b \in R,\ C \in M(R) \setminus \wp \right\}.$$

Здесь и далее вертикальные и горизонтальные черточки в записи матриц являются только разделителями для удобства восприятия формул. Определим на $M_\wp$ следующие операции сложения и умножения:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline Z & t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} a & x & b+y \\ \hline C & 0 & d \\ 0 & Z & t \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline Z & t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & 0 \\ \hline C & d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ 0 & 0 & Z & -t \end{array} \right),$$

результаты которых, очевидно, снова принадлежат $M_\wp$. Оказывается, что отношение $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline Z & t \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & x & b-y \\ \hline C & 0 & d \\ 0 & Z & -t \end{array} \right) \in \wp$ является отношением эквивалентности на $M_\wp$, причем введенные операции индуцируют соответствующие операции на фактор-множестве $R_\wp$. Обозначим класс эквивалентности с представителем $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right)$ через $\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array} \right]$.

Теорема (П. М. Кон [3, гл. 7]; Малкольмсон [7, 8]). *Алгебра* $\langle R_\wp, \oplus, \otimes\rangle$ *является телом, а отображение* $i : R \to R_\wp$, *заданное правилом* $i(r) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & r \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, *— вложением колец, при котором множество всех квадратных матриц над* R, *отображающихся в вырожденные над* $R_\wp$, *совпадает с* $\wp$.

Не вдаваясь в детали, отметим, что тело $R_\wp$ порождается кольцом R и компонентами всех матриц, обратных к матрицам из множества $\Sigma = M(R) \setminus \wp$. При этом элемент $\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right] \in R_\wp$ можно неформально интерпретировать как выражение $b - a \cdot C^{-1} \cdot d$. Тогда сумма $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \oplus \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline Z & t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a & x & b+y \\ \hline C & 0 & d \\ 0 & Z & t \end{array}\right)$ будет интерпретирована как

$$(b+y) - (\,a \quad x\,) \cdot \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ t \end{pmatrix} = (b - a \cdot C^{-1} \cdot d) + (y - x \cdot Z^{-1} \cdot t)$$

— сумма исходных интерпретаций, а $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline Z & t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & 0 \\ \hline C & d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ 0 & 0 & Z & -t \end{array}\right)$ — как произведение исходных интерпретаций:

$$\begin{aligned} 0 - (\,a \quad b \quad 0\,) \cdot \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1} \cdot d & C^{-1} \cdot d \cdot x \cdot Z^{-1} \\ 0 & 1 & -x \cdot Z^{-1} \\ 0 & 0 & Z^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ -t \end{pmatrix} \\ = b \cdot y - a \cdot C^{-1} \cdot d \cdot y + a \cdot C^{-1} \cdot d \cdot x \cdot Z^{-1} \cdot t - b \cdot x \cdot Z^{-1} \cdot t \\ = (b - a \cdot C^{-1} \cdot d) \cdot (y - x \cdot Z^{-1} \cdot t). \end{aligned}$$

Все встречающиеся ниже вычисления в теле $R_\wp$ можно проделать, пользуясь таким представлением и применяя использованные выше простейшие правила действий с обратными матрицами.

2. Определение оценки $v_\wp$. Наряду с множеством $\wp$ будем рассматривать и соответствующее ему множество

$$\mathscr{Q} = \{A \in \mathrm{Mat}(R) \mid \forall g \in G\ \exists X \in^\infty R \quad f_A(X) > g\}.$$

Для сокращения вычислений будет полезна

Лемма 2. (1) *Пусть* $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \in M_\wp$. *Тогда*

$$\forall g \in G\ \exists \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \in {}^\infty R \quad v(C \cdot X + d \cdot x) > g * v(x).$$

(2) $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \in M_\wp \cap \wp$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall g \in G\ \exists \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \in^\infty R \quad v\begin{pmatrix} a \cdot X + b \cdot x \\ C \cdot X + d \cdot x \end{pmatrix} > g * v(x).$$

Доказательство. Оба утверждения доказываются с использованием определения множества $\mathscr{Q}$ и свойства (F10) леммы о функции f_A, доказанной в § 3.

Например, для доказательства импликации ($\Rightarrow$) в утверждении (2) следует, по определению $\wp$, найти для заданного $g \in G$ столбец $\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \in^\infty R$ со свойством $v\begin{pmatrix} a \cdot X + b \cdot x \\ C \cdot X + d \cdot x \end{pmatrix} > g * L^{-1} * v\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$, где $L \leq e$ — константа, определенная в свойстве (F10), и воспользоваться неравенством $v\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \geq L * v(x)$. Лемма доказана.

Пусть оценка $v : R \to G_\infty$ продолжена до оценки $v_\wp : R_\wp \to G_\infty$ и $\left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right] \in R_\wp^*$. Ввиду $(C \quad d) \in M_-(R) \subseteq \mathscr{Q}$ для любого $g \in G$ найдется такой столбец $\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix} \in^\infty R$, что $v(C \cdot X + d \cdot x) > g * v(x)$,

$$\begin{aligned} v_\wp \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right] &= v_\wp((b - a \cdot C^{-1} \cdot d) \cdot x) * v(x)^{-1} \\ &= v_\wp((b \cdot x + a \cdot X) - a \cdot C^{-1} \cdot (d \cdot x + C \cdot X)) * v(x)^{-1}. \end{aligned}$$

Из $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \notin \wp$ следует, что $v\left(\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}\right) \leq \gamma * v\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$, где $\gamma = \gamma\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right)$, так что при достаточно большом g получаем

$$v_\wp(b \cdot x + a \cdot X) = v(b \cdot x + a \cdot X) \leq \gamma_0 * v(x),$$

где $\gamma_0 = \gamma * L^{-1}$, и

$$\begin{aligned} v_\wp(a \cdot C^{-1} \cdot (d \cdot x + C \cdot X)) &\geq v(a) * v_\wp(C^{-1}) * v(d \cdot x + C \cdot X) \\ &> v(a) * v_\wp(C^{-1}) * g * v(x) > v_\wp(b \cdot x + a \cdot X). \end{aligned}$$

Таким образом, $v_\wp \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right] = v(b \cdot x + a \cdot X) * v(x)^{-1}$. Эта формула доказывает однозначность продолжения оценки v на $R_\wp$ и будет использована для определения продолжения $v_\wp : R_\wp \to G_\infty$.

Чтобы формально задать фильтрацию $v_\wp$, вначале определим функцию $v_\wp : M_\wp \to G_\infty$, а затем докажем, что она корректно индуцирует отображение $v_\wp : R_\wp \to G_\infty$. Если $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \notin \wp$, то положим $v_\wp \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) = v(b \cdot x + a \cdot X) * v(x)^{-1}$, в противном случае считаем $v_\wp \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) = \infty$ (здесь использованы предыдущие обозначения).

Это определение, конечно, зависит как от выбора достаточно большого элемента $g \in G$, так и от столбца $\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$ со свойством $v(C \cdot X + d \cdot x) > g * v(x)$. Однако ниже будет показано, что найдется такой элемент $\varepsilon \in G$ (зависящий только от $\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \notin \wp$), что значение $v(b \cdot x + a \cdot X) * v(x)^{-1}$ постоянно при любом $g > \varepsilon$ и произвольном столбце $\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$ с указанным выше свойством.

Действительно, пусть $h \in G$, $h > g$ и $v(C \cdot Y + d \cdot y) > h * v(y) > g * v(y)$. По условию Кона найдутся такие элементы $p, q \in R$, что $v(x \cdot p - y \cdot q) > g * v(x \cdot p)$.

Тогда по свойству (F11) леммы о функции f_A, доказанному в § 3, при $g > g_0 = \gamma(A) * \max\{e, v(A)^{-1} * v(a)\}$ верно неравенство $v(X \cdot p - Y \cdot q) > K * g * L * v(x \cdot p)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &v(b \cdot (x \cdot p - y \cdot q) + a \cdot (X \cdot p - Y \cdot q)) \\ &\qquad \geq \min\{v(b) * v(x \cdot p - y \cdot q), v(a) * v(X \cdot p - Y \cdot q)\} \\ &\qquad > K_1 * g * L * v(x \cdot p) > \gamma_0 * v(x \cdot p) = \gamma_0 * v(y \cdot q) \geq v(b \cdot y \cdot q + a \cdot Y \cdot q) \end{aligned}$$

при $K_1 < \min\{v(b), v(a) * K\}$, $g > \varepsilon = \max\{g_0, K_1^{-1} * \gamma_0 * L^{-1}\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &v(b \cdot x + a \cdot X) * v(x)^{-1} = v(b \cdot x \cdot p + a \cdot X \cdot p) * v(x \cdot p)^{-1} \\ &\quad = v(b \cdot y \cdot q + a \cdot Y \cdot q + b \cdot (x \cdot p - y \cdot q) + a \cdot (X \cdot p - Y \cdot q)) * v(x \cdot p)^{-1} \\ &\qquad = v(b \cdot y \cdot q + a \cdot Y \cdot q) * v(y \cdot q)^{-1} = v(b \cdot y + a \cdot Y) * v(y)^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Итак, доказана независимость определения значения функции $v_\wp$ от выбора достаточно большого $g \in G$ и столбца $\begin{pmatrix} X \\ x \end{pmatrix}$.

Докажем теперь, что значение $v_\wp$ постоянно на классах эквивалентности. Пусть $\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline C_1 & d_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline C_2 & d_2 \end{array}\right)$, т. е. $\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_1 - b_2 \\ \hline C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & -d_2 \end{array}\right) \in \wp$. Тогда ввиду свойств множества $\mathscr{Q}$ верны следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline C_1 & d_1 \end{array}\right) \in \wp \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_1 \\ \hline C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & 0 \end{array}\right) \in \wp \\ &\qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_1 \\ \hline C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & 0 \end{array}\right) \bigtriangledown^c \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_2 - b_1 \\ \hline C_1 & 0 & -d_1 \\ 0 & C_2 & d_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_2 \\ \hline C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & d_2 \end{array}\right) \in \wp. \end{aligned}$$

Значит, $\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline C_1 & d_1 \end{array}\right) \in \wp \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline C_2 & d_2 \end{array}\right) \in \wp$, т. е. верно равенство $v_\wp \left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline C_1 & d_1 \end{array}\right) = \infty = v_\wp \left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline C_2 & d_2 \end{array}\right)$.

Поэтому можно предполагать, что $\left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline C_i & d_i \end{array}\right) \notin \wp$, $i = 1, 2$. Тогда для любого $g \in G$ найдется столбец $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ z \end{pmatrix}$ со свойством

$$v\left(\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_1 - b_2 \\ \hline C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & -d_2 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ z \end{pmatrix}\right) > g * v(z).$$

Отсюда получаем $v(C_i \cdot X_i + d_i \cdot z) > g * v(z)$, $i = 1, 2$. Значит, при достаточно большом $g \in G$ будут выполнены условия

$$v_\wp \left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline C_i & d_i \end{array}\right) = v(a_i \cdot X_i + b_i \cdot z) * v(z)^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$v(a_1\cdot X_1-a_2\cdot X_2+(b_1-b_2)\cdot z)>g*v(z).$$

Если здесь $v(a_1\cdot X_1+b_1\cdot z)\neq v(a_2\cdot X_2+b_2\cdot z)$, то

$$\min_{i=1,2}\{v(a_i\cdot X_i+b_i\cdot z)\}=v(a_1\cdot X_1-a_2\cdot X_2+(b_1-b_2)\cdot z)>g*v(z)$$

вопреки сделанному предположению $\left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline C_i & d_i\end{array}\right)\notin\wp$, $i=1,2$.

Итак, отображение $v_\wp : M_\wp\to G_\infty$ индуцирует корректно определенное отображение $v_\wp : R_\wp\to G_\infty$, обозначаемое в дальнейшем той же буквой.

3. Проверка свойств оценки. Свойство (V1) $\forall r\in R_\wp v_\wp(r)=\infty\leftrightarrow r=0$, очевидно, выполнено.

(V2) $\forall r_1,r_2\in R_\wp\ v_\wp(r_1-r_2)\geq\min\{v_\wp(r_1),v_\wp(r_2)\}$. Переходя к матрицам, достаточно доказать, что

$$\alpha=v_\wp\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & b_1-b_2 \\ \hline C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & -d_2\end{array}\right)\geq\min_{i=1,2}\left\{v_\wp\left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline C_i & d_i\end{array}\right)\right\}=\beta.$$

Рассуждения, использованные для продолжения $v_\wp$ с $M_\wp$ на $R_\wp$, позволяют считать, что все три матрицы не лежат в $\wp$. Пусть

$$v\left(\begin{pmatrix} C_1 & 0 & d_1 \\ 0 & C_2 & -d_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ z\end{pmatrix}\right)>g*v(z)$$

для большого $g\in G$, $\alpha=v(a_1\cdot X_1-a_2\cdot X_2+(b_1-b_2)\cdot z)*v(z)^{-1}$. Тогда можно считать, что $v_\wp\left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline C_i & d_i\end{array}\right)=v(a_i\cdot X_i+b_i\cdot z)*v(z)^{-1}$, так как одновременно $v(C_i\cdot X_i+d_i\cdot z)>g*v(z)$, $i=1,2$. Значит,

$$\begin{aligned}\alpha=v(a_1\cdot X_1-a_2\cdot X_2+(b_1-b_2)\cdot z)*v(z)^{-1}\\ \geq\min_{i=1,2}\{v(a_i\cdot X_i+b_i\cdot z)\}*v(z)^{-1}=\beta,\end{aligned}$$

что и требовалось.

(V3) $\forall r_1,r_2\in R_\wp\ v_\wp(r_1\cdot r_2)=v_\wp(r_1)*v_\wp(r_2)$. Переходя к матрицам, достаточно доказать, что

$$v_\wp\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ \hline C_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & C_2 & -d_2\end{array}\right)=v_\wp\left(\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ \hline C_1 & d_1\end{array}\right)*v_\wp\left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline C_2 & d_2\end{array}\right)$$

в случае, когда все три матрицы не лежат в $\wp$. Пусть

$$v\left(\begin{pmatrix} C_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & C_2 & -d_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ x_1 \\ -X_2 \\ x_2\end{pmatrix}\right)>g*v(x_2)$$

при достаточно большом $g\in G$. Тогда

$$v(C_i\cdot X_i+d_i\cdot x_i)>g*v(x_2),\quad v(x_1-a_2\cdot X_2-b_2\cdot x_2)>g*v(x_2).$$

Из последнего неравенства следует, что $v(x_1) = v(a_2 \cdot X_2 + b_2 \cdot x_2)$. Действительно, поскольку $\left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline C_2 & d_2 \end{array}\right) \notin \wp$, для некоторой константы $\gamma \in G$ имеет место неравенство $v(a_2 \cdot X_2 + b_2 \cdot x_2) \leq \gamma * v(x_2)$. Поэтому если $v(x_1) \neq v(a_2 \cdot X_2 + b_2 \cdot x_2)$, то при достаточно большом $g \in G$ получаем противоречие:

$$\gamma * v(x_2) \geq \min\{v(x_1), v(a_2 \cdot X_2 + b_2 \cdot x_2)\} = v(x_1 - a_2 \cdot X_2 - b_2 \cdot x_2) > g * v(x_2).$$

Итак, $v(x_1) = v(a_2 \cdot X_2 - b_2 \cdot x_2) \leq \gamma * v(x_2)$, $v(C_1 \cdot X_1 + d_1 \cdot x_1) > g * v(x_2) \geq g * \gamma^{-1} * v(x_1)$, т. е. можно считать, что

$$v_\wp(r_i) = v(a_i \cdot X_i + b_i \cdot x_i) * v(x_i)^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} v_\wp(r_1) * v_\wp(r_2) &= v(a_1 \cdot X_1 + b_1 \cdot x_1) * v(x_1)^{-1} * v(a_2 \cdot X_2 + b_2 \cdot x_2) * v(x_2)^{-1} \\ &= v(a_1 \cdot X_1 + b_1 \cdot x_1) * v(x_2)^{-1} = v_\wp(r_1 \cdot r_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. Структура топологического тела. Построенная оценка позволяет задать на $R_\wp$ хаусдорфову топологию с базой окрестностей нуля $\mathbb{O}_g = \{x \in R_\wp \mid v_\wp(x) > g\}$, $g \in G$. При этом операции сложения, умножения и взятия обратного к ненулевому элементу будут непрерывны относительно введенной топологии. Это следует из стандартных неравенств:

$$v_\wp((x+y) - (z+t)) \geq \min\{v_\wp(x-z), v_\wp(y-t)\},$$

$$\begin{aligned} v_\wp(x \cdot y - z \cdot t) &= v_\wp((x-z) \cdot y - z \cdot (t-y)) \\ &\geq \min\{v_\wp(x-z) * v_\wp(y), v_\wp(z) * v_\wp(y-t)\}, \end{aligned}$$

$$v_\wp(x^{-1} - z^{-1}) = v_\wp(x^{-1} \cdot (z-x) \cdot z^{-1}) = v_\wp(x^{-1}) * v_\wp(z-x) * v_\wp(z^{-1}).$$

Таким образом, $R_\wp$ становится топологическим телом.

5. Плотность множества дробей. Докажем, что множество дробей $R \cdot R^{-1} = \{r \cdot s^{-1} \in R_\wp \mid r \in R,\ s \in R^*\}$ всюду плотно в $R_\wp$.

Пусть $u = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline C & d \end{array}\right) \in R_\wp \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in G$ и $v(C \cdot X + d \cdot x) > g * v(x)$ при достаточно большом $g \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} v_\wp(u - (a \cdot X + b \cdot x) \cdot x^{-1})) &= v_\wp(u \cdot x - (a \cdot X + b \cdot x)) * v(x)^{-1} \\ &= v_\wp(b \cdot x - a \cdot C^{-1} \cdot (d \cdot x) - (a \cdot X + b \cdot x)) * v(x)^{-1} \\ &= v_\wp(-a \cdot C^{-1} \cdot (C \cdot X + d \cdot x)) * v(x)^{-1} \\ &\geq v(a) * v_\wp(C^{-1}) * v(C \cdot X + d \cdot x) * v(x)^{-1} > v(a) * v_\wp(C^{-1}) * g > \varepsilon \end{aligned}$$

при большом g, т. е. $u - (a \cdot X + b \cdot x) \cdot x^{-1} \in \mathbb{O}_\varepsilon$. Теорема 4 доказана.

§ 6. Некоторые примеры и приложения

6.1. Независимость условий Оре и Кона для градуированного кольца. Покажем, что ни одно из этих условий не следует из другого.

Пример 1. Тело рядов Мальцева — Неймана свободной группы G с естественной G-фильтрацией удовлетворяет (как и всякая правая область Оре) условию Кона, но соответствующее градуированное кольцо будет изоморфно групповой алгебре свободной группы и не является правым кольцом Оре.

Этот пример показывает, что из условия Кона не следует условие Оре для градуированного кольца.

Пример 2. На универсальной обертывающей $U(x,y)$ свободной неабелевой алгебры Ли $L(x,y)$ от двух порождающих x и y над полем F рассмотрим стандартную $\mathbb{Z}$-фильтрацию, полагая для элемента $f(x,y) \in U(x,y)$ значение $v(f)$ равным степени $f(x,y)$ с противоположным знаком. Для этой $\mathbb{Z}$-фильтрации условие Кона выполнено (см. [1]). Однако значения $v(f) \in \mathbb{Z}$ можно рассматривать и как элементы лексикографически упорядоченной аддитивной группы $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, где $(i;n) \leq (j;m) \Leftrightarrow (i \leq j) \vee ((i=j) \wedge (n \leq m))$ для любых $i,j,n,m \in \mathbb{Z}$. При этом $v(f)$ отождествляется с парой $(0; v(f))$. Тогда $U(x,y)$ становится $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-фильтрованным кольцом, $\mathrm{gr}(U(x,y)) \cong F[x,y]$, но для любых ненулевых элементов $z,t \in U(x,y)$ будет верно $v(x\cdot z - y\cdot t) < (1;0) + v(x\cdot z)$, т. е. условие Кона не выполняется.

Этот пример показывает, что при расширении группы G условие Кона может не сохраняться. С другой стороны, если условие Кона выполнено для кольца R с G-фильтрацией, то оно будет выполнено и для H-фильтрации, если $H \leq G$ и $\forall r \in R^*$ $v(r) \in H$.

Пример 3. Рассмотрим свободную алгебру Ли $L = L(x,y)$ от двух порождающих x и y над полем F. В ней определен убывающий ряд степеней: $L = L^1 \supset L^2 \supset L^3 \supset \dots L^n \supset \dots \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L^n = \{0\}$, где $L^{i+1} = L\cdot L^i$, $i \geq 1$. Зафиксируем базис $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ алгебры Ли L, состоящий из коммутаторов (к которым причислены $x = e_1$ и $y = e_2$), соответствующих правильным в смысле А. И. Ширшова ассоциативным словам (см., например, [9, с. 309]). Тогда для каждого e_α найдется единственное натуральное число $n = n(\alpha)$ со свойством $e_\alpha \in L^n \setminus L^{n+1}$, которое назовем *весом* элемента e_α.

Пусть $G = (g)\times(\varepsilon)$ — абелева группа с единицей e и лексикографическим порядком, при котором $g \gg \varepsilon \gg e$. Зададим G-фильтрацию $v : U(L) \to G_\infty$, определяя для базисного элемента e_α веса n ее значение формулой $v(e_\alpha) = g^{-n} * \varepsilon^{n-1}$. Эта фильтрация естественным образом однозначно распространяется на базисные мономы вида $m_i = e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_s}$, $i_1 \leq \dots \leq i_s$, алгебры $U(L)$ и их линейные комбинации (конечно, $v(0) = \infty$):

$$v(e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_s}) = v(e_{i_1}) * \dots * v(e_{i_s}), \quad v\Big(\sum_k \alpha_k\cdot m_k\Big) = \min\{v(m_k) \mid \alpha_k \neq 0\}.$$

Хотя имеет место изоморфизм $U(L) \cong F\langle x,y\rangle$ со свободной алгеброй от некоммутативных порождающих x,y, градуированное кольцо $\mathrm{gr}(U(L))$ будет коммутативно. Действительно, для базисных элементов e_α и e_β весов n и m соответственно коммутатор $[e_\alpha, e_\beta]$ является линейной комбинацией коммутаторов веса $n+m$, т. е. $v(e_\alpha\cdot e_\beta - e_\beta\cdot e_\alpha) \geq g^{-(m+n)} * \varepsilon^{(m+n)-1} > v(e_\alpha) * v(e_\beta)$. Таким образом, $\mathrm{gr}(U(L))$ коммутативно (и изоморфно кольцу многочленов $F[E]$, где $E = \{e_\alpha \mid \ \alpha \in \mathbb{N}\}$).

Нетрудно доказать, что при любых $z,t \in U(L)\setminus\{0\}$ справедлива оценка $v(x\cdot z - y\cdot t) < g * v(x\cdot z) = v(z)$. Действительно, если в произведениях $x\cdot z$ и $y\cdot t$ не сократятся мономы с наименьшими v-степенями, то $v(x\cdot z - y\cdot t)$ равно либо $v(x\cdot z) = g^{-1} * v(z) < v(z)$, либо $v(y\cdot t) \leq v(x\cdot z) < v(z)$. Значит, можно считать, что $v(z) = v(t)$ и не все мономы в произведении $y \cdot t$ будут базисными. Однако не базисными в $y \cdot t$ являются только мономы вида

$$y \cdot (x^k \cdot w) = \sum_{s=0}^{k-1} C_k^s \cdot x^{k-s} \cdot [y, x^{(s)}] \cdot w + [y, x^{(k)}] \cdot w = x \cdot m + [y, x^{(k)}] \cdot w,$$

где $k > 0$, $x^k \cdot w$ — моном, входящий в t, причем базисное слово w не содержит x, $[y, x^{(s)}] = [[[[y, x], x], \dots], x]$ — базисный коммутатор веса $s+1$ с s вхождениями x в правой части, а $v([y, x^{(s)}] \cdot w) = g^{-s-1} * \varepsilon^s * v(w) < v(x^s \cdot w)$.

Таким образом, $x \cdot z - y \cdot t = x \cdot \zeta - y \cdot \tau - \sum\limits_i \alpha_i \cdot [y, x^{(k_i)}] \cdot t_i(x, y)$, где в произведениях $x \cdot \zeta$, $y \cdot \tau$ все мономы базисные и не имеют себе подобных. Поэтому можно считать, что $\zeta = 0 = \tau$, и

$$v(x \cdot z - y \cdot t) = v\Big(\sum_i [y, x^{(k_i)}] \cdot t_i(x, y)\Big) \ge v(t).$$

При этом каждое слагаемое в рассматриваемой сумме имеет меньшую степень, чем соответствующий ему моном элемента t, ввиду отмеченного выше неравенства

$$v([y, x^{(k_i)}] \cdot w_i) = g^{-k_i-1} * \varepsilon^{k_i} * v(w_i) < g^{-k_i} * v(w_i) = v(x^{k_i} \cdot w_i).$$

Значит, $\sum\limits_i [y, x^{(k_i)}] \cdot t_i(x, y) = 0$ для некоторых ненулевых элементов $t_i(x, y) \in U(L)$, что в свободной алгебре $U(L) \cong F\langle x, y\rangle$ легко привести к противоречию.

Таким образом, кольцо $U(L)$ с введенной фильтрацией не удовлетворяет условию Кона, но его градуированное кольцо коммутативно. В отличие от предыдущего примера, в котором группа, порожденная значениями оценки $v(r)$, $r \in R$, была мала (она совпадала с прямым слагаемым группы G), здесь эта группа равна G.

В связи с этим естественно сформулировать вопрос: верно ли, что если градуированное кольцо G-фильтрованного кольца является правой (левой) областью Оре, то само кольцо вложимо в тело? Положительный ответ на него кажется автору маловероятным.

6.2. Условие Кона для групповых алгебр упорядоченных групп. Докажем, что групповая алгебра $F[G]$ упорядоченной группы $(G, *, <)$ с естественной G-фильтрацией удовлетворяет условию Кона тогда и только тогда, когда $F[G]$ — правое кольцо Оре.

Очевидно, что из условия Оре следует условие Кона, так что для доказательства обратного утверждения будем предполагать выполнение условия Кона для $F[G]$.

Известно (например, [10, гл. II, § 2, предложение 3]), что система $\mathscr{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$ всех выпуклых подгрупп группы G является линейно упорядоченной по включению, полной (т. е. замкнутой относительно пересечений и объединений) и инфраинвариантной ($\forall C \in \mathscr{C}\ \forall g \in G g^{-1} * C * g \subset C \vee g^{-1} * C * g \supset C$) с факторами скачков, изоморфными аддитивным подгруппам в $\mathbb{R}$.

Выбрав произвольный скачок $C_\alpha \triangleleft C_{\alpha+1}$ и любые ненулевые элементы $a, b \in F[C_\alpha]$, по условию Кона найдем такие $x, y \in F[G]$, что $v(a \cdot x - b \cdot y) > c * v(a \cdot x)$, где $c \in C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha$, $c > e$. Тогда $c \gg C_\alpha$: если $x^n \ge c > e$ для $x \in C_\alpha$, то получаем противоречие $c \in C_\alpha$ ввиду выпуклости подгруппы C_α. Разберем последовательно два возможных случая.

(а) $x, y \in F[C_\alpha]$. Тогда условие $v(a \cdot x - b \cdot y) > c * v(a \cdot x)$ равносильно $a \cdot x = b \cdot y$, так как $c \gg C_\alpha$.

(б) Один из элементов x или y не принадлежит в $F[C_\alpha]$. В этом случае для некоторого скачка $C_\alpha \subseteq C_\beta \lhd C_{\beta+1}$ можно записать $x = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot t_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot t_i$ для подходящих $x_i, y_i \in F[C_\alpha]$ и некоторых представителей $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ правых смежных классов $C_\alpha * t_i$ группы $C_{\beta+1}$ по подгруппе C_α. При этом можно предполагать $x_1 \neq 0$ или $y_1 \neq 0$.

Ясно, что условие Кона

$$v\Big(\sum_i (a \cdot x_i - b \cdot y_i) \cdot t_i\Big) = v\Big(\sum_i a \cdot x_i \cdot t_i - \sum_i b \cdot y_i \cdot t_i\Big) > c * v\Big(\sum_i a \cdot x_i \cdot t_i\Big)$$

означает, что $v(a \cdot x_1 - b \cdot y_1) * v(t_1) > c * v(a \cdot x_1) * v(t_1)$. Действительно, для $\lambda, \mu \in C_\alpha$ неравенство $\lambda * t_1 \geq \mu * t_i$ невозможно при $i \neq 1$, так как иначе $\mu^{-1} * \lambda \geq t_i * t_1^{-1} \geq e$, т. е. $t_i * t_1^{-1} \in C_\alpha$, что неверно. Таким образом, в случае (б) снова приходим к выполнению для элементов a, b случая (а).

Итак, доказана справедливость условия Оре для групповой алгебры $F[C]$ любой собственной выпуклой подгруппы $C < G$. Отсюда легко получить, что условие Оре выполнено и для всей алгебры $F[G]$. Поскольку эти рассуждения стандартны, наметим только общую схему доказательства.

1. Рассуждая от противного и используя локальный характер условия Оре, можно предполагать, что для любой выпуклой подгруппы $C < G$ верно $a \notin F[C]$ или $b \notin F[C]$. Поэтому в G есть наибольшая собственная выпуклая подгруппа $C \lhd G$ с коммутативным фактором G/C и системой порождающих $t_1 * C, \ldots, t_k * C$, где $t_1, \ldots, t_k \in G$.

2. Элементы $a, b \in F[G]$ можно записать в виде «косых многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_k$»: $a = \sum_m t^m \cdot a_m$, $b = \sum_m t^m \cdot b_m$, где в мультииндексной записи $a_m = a_{m_1,\ldots,m_k}$, $b_m = b_{m_1,\ldots,m_k} \in F[C]$, $t^m = t_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{m_k}$, и вести индукцию по числу k.

3. База индукции и индукционный переход обосновываются однотипно. Если есть два «многочлена» $\alpha = \sum_{i=0}^{s} u^i \cdot \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=0}^{t} u^i \cdot \beta_i$ от одного «переменного» u «степеней» $s \geq t$, причем $\alpha_s \neq 0 \neq \beta_t$ и $\alpha_s \cdot \xi = \beta'_t \cdot \eta$ для $\beta'_t = u^{t-s} \cdot \beta_t \cdot u^{s-t} \in F[C]$, то

$$\alpha \cdot \xi - \beta \cdot u^{s-t} \cdot \mu = \sum_{i=0}^{s-1} u^i \cdot \alpha'_i - \sum_{i=0}^{s-1} u^i \cdot \beta'_i = \sum_{i=0}^{s-1} u^i \cdot \gamma_i = \gamma$$

имеет меньшую «степень», так что (проводя индукцию по «степени» s) можно считать, что $\beta \cdot \varphi = \gamma \cdot \psi$ для некоторых «многочленов» φ, $\psi \in F[G]$. Поэтому

$$\alpha \cdot \xi \cdot \psi = \gamma \cdot \psi + \beta \cdot u^{s-t} \cdot \mu \cdot \psi = \beta \cdot \varphi + \beta \cdot u^{s-t} \cdot \mu \cdot \psi = \beta \cdot (\varphi + u^{s-t} \cdot \mu \cdot \psi),$$

что и требовалось.

Итак, при выполнении условия Кона групповая алгебра $F[G]$ упорядоченной группы G удовлетворяет условию Оре.

6.3. Некоторые приложения. Ограничимся лишь двумя простейшими приложениями для универсальных обертывающих алгебр Ли.

Теорема 5. *Пусть L — алгебра Ли над полем F, H — ее подалгебра, $U(L)$ и $U(H)$ — универсальные обертывающие алгебр Ли L и H соответственно, $D(L)$ и $D(H)$ — построенные выше тела частных алгебр $U(L)$ и $U(H)$. Тогда, как известно, $U(H) \subseteq U(L)$ и можно утверждать, что $D(H) \subseteq D(L)$.*

Доказательство. Для доказательства включения $D(H) \subset D(L)$ нужно проверить [3, гл. 7], что для соответствующих этим телам первичных матричных идеалов $\wp_H$ и $\wp_L$ выполняется включение $\wp_L \cap M(U(H)) \subseteq \wp_H$. Учитывая полученное в теореме 2 описание таких первичных матричных идеалов, докажем, что для любой матрицы $A \in M(U(H))$ со свойством $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists X_n \in {}^\infty U(L)$ $v(A \cdot X_n) > v(X_n) + n$ можно при любом $n \in \mathbb{Z}$ найти столбец $Y_n \in {}^\infty U(H)$, для которого $v(A \cdot Y_n) > v(Y_n) + n$.

По теореме Биркгофа — Витта алгебра $U(L)$ является свободным левым (правым) $U(H)$-модулем, так что вектор X_m можно записать в виде левой линейной комбинации $X_m = \sum\limits_{i=0}^{k} Z_i \cdot e_i$, где $Z_i \in {}^\infty U(H)$, e_i — базисные элементы $U(H)$-модуля $U(L)$, $e_0 = 1$, $0 \le i \le k$. При этом $v(X_m) = \min\{v(Z_i) + v(e_i),\ 0 \le i \le k\}$ и $v(A \cdot X_m) = v\left(\sum\limits_{i=0}^{k} A \cdot Z_i \cdot e_i\right) = \min\{v(A \cdot Z_i) + v(e_i),\ 0 \le i \le k\}$. Если предположить, что $v(A \cdot Y) \le v(Y) + r$ для любого $Y \in {}^\infty U(H)$ и некоторой константы $r \in \mathbb{Z}$, то $v(A \cdot X_m) \le \min\limits_{0 \le i \le k}\{v(Z_i) + r + v(e_i)\} = v(X_m) + r$, что противоречит неравенствам $v(A \cdot X_m) > v(X_m) + m$ при $m > r$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть $D(L)$ — построенное выше тело частных универсальной обертывающей алгебры Ли L, H — подалгебра в L с базисом $\{h_i \in H \mid i \in I\}$, который дополнен элементами множества $\{t_j \in L \mid j \in J\}$ до базиса алгебры L (множества I, J предполагаются линейно упорядоченными). Тогда все базисные слова $w_j(t) = t_{j_1} \cdot \ldots \cdot t_{j_s}$, $j_1 \le \dots \le j_s$, будут $D(H)$-независимыми слева и справа в теле $D(L)$, т. е. любое соотношение левой (правой) линейной зависимости $\sum\limits_j f_j \cdot w_j(t) = 0$ $\big(\sum\limits_j w_j(t) \cdot f_j = 0\big)$ в теле $D(L)$ с коэффициентами $f_j \in D(H)$ тривиально: $f_j = 0$, $j \in J$.*

Доказательство. Если $f_j = \left[\begin{array}{c|c} p_j & q_j \\ \hline R_j & s_j \end{array}\right]$, то соотношение левой зависимости $w_{j_1}(t) \cdot f_1 + \dots + w_{j_k}(t) \cdot f_k = 0$ означает, что матрица

$$\sum_{m=1}^{k} \oplus \left(\begin{array}{cc|c} w_{j_m}(t) & 0 & 0 \\ \hline 1 & p_m & q_m \\ 0 & R_m & s_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} w_{j_1}(t) & 0 & \dots & w_{j_k}(t) & 0 & & 0 \\ \hline 1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & & q_1 \\ 0 & R_1 & \dots & 0 & 0 & & s_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_k & & q_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_k & & s_k \end{array}\right)$$

принадлежит $\wp_L$. Теорема 6 вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Если $\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right) \in \wp_L$, где C, d — матрицы над $U(H)$, $C \notin \wp_L$ и $a(t) = \sum\limits_{s=1}^{k} w_{j_s}(t) \cdot a_s$, $b(t) = \sum\limits_{s=1}^{k} w_{j_s}(t) \cdot b_s$ — матрицы над $U(L)$, записанные в виде линейных комбинаций базисных слов с коэффициентами $a_i \in U(H)^\infty$, $b_i \in U(H)$, то $\left(\begin{array}{c|c} a_s & b_s \\ \hline C & d \end{array}\right) \in \wp_H \subseteq \wp_L$ $(0 \le s \le k)$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $(\,C \quad d\,)$ над $U(H)$, которая является левым делителем нуля над $D(H)$. Это значит, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдется вектор-столбец $\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}$ над $U(H)$ со свойством $v(C\cdot X_n + d\cdot y_n) > v\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix} + n$.

С другой стороны, условие $\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right) \in \wp_L$ означает, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует вектор $\begin{pmatrix} P_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} \in {}^{\infty}U(L)$, для которого

$$v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} P_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix}\right) > v\begin{pmatrix} P_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} + n.$$

По условию Кона найдутся такие $r_n(t), s_n(t) \in U(L)$, что $v(y_n \cdot s_n(t) - q_n(t)\cdot r_n(t)) > v(y_n \cdot s_n(t)) + n$, а ввиду (F11) $v(X_n \cdot s_n(t) - P_n(t)\cdot r_n(t)) > k + v(q_n(t)\cdot r_n(t)) + n$ для некоторой константы $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) + v(s_n(t)) &= v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} P_n(t)\cdot r_n(t) \\ q_n(t)\cdot r_n(t) \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \left. + \left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_n\cdot s_n(t) - P_n(t)\cdot r_n(t) \\ y_n\cdot s_n(t) - q_n(t)\cdot r_n(t) \end{pmatrix}\right) \\
&\ge \min\left\{v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} P_n(t)\cdot r_n(t) \\ q_n(t)\cdot r_n(t) \end{pmatrix}\right),\right. \\
&\quad \left. v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_n\cdot s_n(t) - P_n(t)\cdot r_n(t) \\ y_n\cdot s_n(t) - q_n(t)\cdot r_n(t) \end{pmatrix}\right)\right\} \\
\ge \min\left\{v\begin{pmatrix} P_n(t) \\ q_n(t) \end{pmatrix} + n + v(r_n(t)), v\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\right. &\left. + v\begin{pmatrix} X_n\cdot s_n(t) - P_n(t)\cdot r_n(t) \\ y_n\cdot s_n(t) - q_n(t)\cdot r_n(t) \end{pmatrix}\right\} \\
&\ge \min\{\min\{v(P_n(t)),\ v(q_n(t))\} + n + v(r_n(t)),\ c + v(q_n(t)\cdot r_n(t)) + n\} \\
&\overset{F10}{\ge} v(q_n(t)\cdot r_n(t)) + m + n = v(y_n) + v(s_n) + m + n
\end{aligned}$$

для некоторых констант $c, m \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \ge v(y_n) + m + n \overset{F10}{\ge} v\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix} + M + n$$

для подходящей константы $M \in \mathbb{Z}$ и любых достаточно больших n.

Если предположить, что при некотором $1 \le \alpha \le k$ выполнено условие $\left(\begin{array}{c|c} a_\alpha & b_\alpha \\ \hline C & d \end{array}\right) \notin \wp_H$, то существует такая константа $A \in \mathbb{Z}$, что при любом $n \in \mathbb{N}$ верно

$$v\left(\left(\begin{array}{c|c} a_\alpha & b_\alpha \\ \hline C & d \end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \le v\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix} + A,$$

в частности,

$$v\left((\,a_\alpha \quad b_\alpha\,)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \le v\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix} + A.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
v\left((\,a(t) \quad b(t)\,)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) &= v\left(\sum_{s=1}^{k} w_{j_s}\cdot(\,a_s \quad b_s\,)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \\
&\le v\left(w_{j_\alpha}\cdot(\,a_\alpha \quad b_\alpha\,)\cdot\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \le v\begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix} + A + v(w_{j_\alpha})
\end{aligned}$$

ввиду свободы правого $U(H)$-модуля $U(L)$. Полученное противоречие с неравенством $v\left(\left(\begin{array}{c|c} a(t) & b(t) \\ \hline C & d \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} X_n \\ y_n \end{pmatrix}\right) \geq v(y_n) + M + n$ завершает доказательство леммы. Теорема 6 доказана.

Замечание. Автор благодарен рецензенту, обратившему внимание на предложение 2.5 работы [5], в которой А. Лихтманом доказаны аналогичные теоремам 5, 6 результаты для его топологической конструкции тела частных универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. Формально сослаться на эту работу не представляется возможным, пока не доказана изоморфность изучаемых параллельно им и автором тел частных для $U(L)$.

Эти результаты предполагается использовать в дальнейшем для исследования универсальных тел частных универсальных обертывающих алгебр Ли. Особенно важен случай $H \triangleleft L$ и $L/H \cong F$, когда H — идеал коразмерности 1 в L. При выполнении этого условия универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ изоморфна алгебре косых многочленов $U(H)[t;\partial]$, где t — порождающий алгебры L по модулю H, а отображение $\partial : U(H) \to U(H)$ является дифференцированием, индуцированным внутренним дифференцированием, отвечающим элементу t. Из теоремы 6 легко вывести

Следствие. *Пусть $H \trianglelefteq L$ и $L/H \cong F$. Тогда дифференцирование ∂ естественным образом продолжается до дифференцирования $\partial : D(H) \to D(H)$ и $D(L) \cong D(H)(t;\partial)$ — тело частных области Оре $D(H)[t;\partial]$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohn P. M.* On the embedding of rings in skew fields // Proc. Lond. Math. Soc. 1961. V. 3, N 11. P. 511–530.
2. *Lichtman A. I.* Valuation methods in division rings // J. Algebra. 1995. V. 177. P. 870–878.
3. *Кон П. М.* Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
4. *Валицкас А. И.* О вложении в тела G-фильтрованных колец с условием Кона // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вят. региона. Киров: Изд-во ВятГУ, 2010. Вып. 12. С. 57–60.
5. *Lichtman A. I.* On universal fields of fractions for free algebras // J. Algebra. 2000. V. 231. P. 652–676.
6. *Герасимов В. Н.* Локализация в ассоциативных кольцах // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 36–54.
7. *Malcolmson P.* Construction of universal matrix localizations // Lect. Notes Math. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982. V. 951. P. 117–131.
8. *Malcolmson P.* Matrix localization of n-firs. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. P. 503–527.
9. *Кон П. М.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
10. *Кокорин А. И., Копытов В. М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 22 января 2014 г.

Валицкас Алексей Игоревич
Тобольская гос. социально-педагогическая академия им. Д. И. Менделеева,
ул. Знаменского, 58, Тобольск 626150
valitskas_a_i@mail.ru