Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2014. Том 55, № 6

УДК 517.986

ЗАМЕЧАНИЕ О КОНСТАНТЕ АМЕНАБЕЛЬНОСТИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

М. Сороушмехр

Аннотация. Для банаховой алгебры A с аменабельным идеалом I и аменабельным фактором A/I исследована связь между константами аменабельности алгебр A, A/I и I. Даны примеры и приложения. В частности, изложен удобный подход к константе аменабельности алгебры $A^{\#}$. Найдена верхняя грань для константы аменабельности идеала аугментации $L_0^1(G)$ аменабельной σ-компактной группы G.

Ключевые слова: константа аменабельности, банахова алгебра, локально компактная группа.

1. Введение

Пусть A — банахова алгебра. Согласно [1] алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда она имеет аппроксимативную диагональ, т. е. ограниченную сеть $(d_\alpha)_\alpha$ в $A\widehat{\otimes}A$ такую, что $a \cdot d_\alpha - d_\alpha \cdot a \to 0$ и $a\pi d_\alpha \to a$ $(a \in A)$.

Преимущество использования аппроксимативных диагоналей для определения банаховых алгебр состоит в том, что они позволяют внести вычислительный аспект в понятие аменабельности. Банахова алгебра A называется C-*аменабельной*, где $C \geq 1$, если существует аппроксимативная диагональ для A, ограниченная C. Константа аменабельности алгебры A определяется как $AM(A) := \inf\{C : A \ \ C\text{-аменабельна}\}$. Понятие C-аменабельности происходит из [2] (см. также [3]), константа аменабельности $AM(A)$ введена в [4] и с тех пор изучена на различных банаховых алгебрах. Константа аменабельности алгебр Фурье исследована в [5]. Аппроксимативные диагонали и константы аменабельности полугрупповых алгебр также изучались во многих работах (см., например, [1, 6–8]); в частности, в [8] установлено, что если G — аменабельная локально компактная группа, то $AM(L^1(G)) = 1$.

С другой стороны, были получены некоторые общие результаты для константы аменабельности, справедливые для произвольной банаховой алгебры. Например, если алгебра A аменабельна с единицей e_A, то $AM(A) \geq \|e_A\|$. Если I — замкнутый идеал алгебры A с единицей e_I, то $AM(I) \leq \|e_I\| AM(A)$ (см. [7]). В настоящей работе доказан следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть A — банахова алгебра, и пусть I — замкнутый идеал алгебры A такой, что I и A/I аменабельны. Тогда алгебра A аменабельна и тем самым имеет ограниченную аппроксимативную единицу. Более того,*

$$AM(A) \leq c^2 + (1 + c)(AM(I) + AM(A/I)),$$

где $c = \inf\{\sup_\alpha \|e_\alpha\| : (e_\alpha)_\alpha$ — ограниченная аппроксимативная единица$A\}$.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть A — аменабельная банахова алгебра, и пусть $A^{\#} = \{a + \lambda e : a \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ — алгебра, полученная из A присоединением единицы e. ℓ^1-Норма на алгебре $A^{\#}$ определяется как $\|a + \lambda e\|_1 = \|a\| + \|\lambda|$, где $a \in A$ и $\delta \in \mathbb{C}$.

Известно [9], что алгебра $A^{\#}$ аменабельна. Далее, A — идеал в $A^{\#}$, и $A^{\#}/A \simeq \mathbb{C}$. В самом деле, отображение $\Psi : A^{\#} \to \mathbb{C}$, определяемое формулой $\Psi((a, \lambda)) = \lambda$ для всех $(a, \lambda) \in A^{\#}$, является эпиморфизмом, причем $\ker(\Psi) = \{(a, 0) : a \in A\}$. Так как $\ker(\Psi)$ очевидным образом отождествляется с A, имеем $A^{\#}/A \simeq \mathbb{C}$ и в силу теоремы 1.1 получаем

$$AM(A^{\#}) \leq 1 + 2AM(A) + 2AM(\mathbb{C}) \leq 3 + 2AM(A).$$

Отметим, что согласно [10] константа аменабельности C*-алгебры $\mathbb{C}$ равна 1.

В лемме 5.1 из [11] получена другая оценка константы аменабельности для $A^{\#}$, а именно $AM(A^{\#}) \leq 2 + 3AM(A)$.

Пример 2. Пусть A — банахова алгебра с единицей, и пусть I — замкнутый идеал в A. Предположим, что I и A/I аменабельны. Тогда

$$AM(A) \leq 1 + 2AM(I) + 2AM(A/I).$$

Пример 3. Пусть A — аменабельная банахова алгебра, и пусть I — аменабельный идеал алгебры A. Тогда

$$AM(A) \leq 7 + 2AM(I) + 4AM(A/I).$$

Предположим сначала, что алгебра A имеет единицу. Тогда результат следует из примера 2. В общем случае заметим, что I также является идеалом в $A^{\#}$ и $A^{\#}/I \simeq (A/I)^{\#}$. Следовательно,

$$AM(A^{\#}) \leq 1 + 2AM(I) + 2AM((A/I)^{\#}).$$

В силу примера 1 получаем $AM((A/I)^{\#}) \leq 3 + 2AM(A/I)$, что дает требуемый результат.

2. Доказательство теоремы 1.1

Так как алгебра A аменабельна, она имеет ограниченную аппроксимативную единицу, скажем, (e_α) (см. [9]). Пусть $E_1 \in A$ — w^*-предельная точка $(e_\alpha)_\alpha$, и, следовательно, $E = E_1 \otimes E_1 \in (A \widehat{\otimes} A)''$ есть w^*-предельная точка $(e_\alpha \otimes e_\alpha)_\alpha$. Для $a \in A$ имеем

$$\pi''(a \cdot E - E \cdot a) = w^*\text{-}\lim_\alpha \pi(ae_\alpha \otimes e_\alpha - e_\alpha \otimes e_\alpha a) = \lim_\alpha ae_\alpha^2 - e_\alpha^2 a = 0,$$

где $\pi : A \widehat{\otimes} A \to A$ — непрерывное линейное отображение такое, что $\pi(a \otimes b) = ab$, $a, b \in A$. Отсюда следует, что $D : A \to \ker \pi''$, где $D = ad_E$ корректно определено. Поскольку π — гомоморфизм бимодулей, π'' тоже гомоморфизм бимодулей, а значит, $\ker \pi''$ — банахов A-бимодуль. Далее, так как A имеет ограниченную аппроксимативную единицу, по теореме Коэна о факторизации [12, теорема 11.10] гомоморфизм π сюръективен и, стало быть, $\ker \pi'' \simeq (\ker \pi)''$.

Ясно, что $D_{|I} \in \mathscr{Z}^1(I, \ker \pi'')$. Так как алгебра I аменабельна, I имеет ограниченную аппроксимативную диагональ. Пусть

$$m_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \otimes b_n^\alpha,$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|a_n^\alpha\|\|b_n^\alpha\| < \infty$, — аппроксимативная диагональ для I. Тогда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha\right)_\alpha$ — ограниченная сеть в $\ker\pi''$, имеющая w^*-предельную точку, скажем, $\varphi_1 \in \ker\pi''$; без ограничения общности можно предполагать, что φ_1 есть w^*-предел $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha\right)_\alpha$. Тогда для $a \in A$ и $F \in (\ker\pi)'$

$$
\begin{aligned}
\langle F, a.\varphi_1\rangle &= \lim_\alpha \left\langle F, \sum_{n=1}^{\infty} aa_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha \right\rangle = \lim_\alpha \left\langle F, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha a \right\rangle \\
&= \lim_\alpha \left\langle F, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha b_n^\alpha \cdot Da + a_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha \cdot a \right\rangle = \lim_\alpha \left\langle F, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha b_n^\alpha, Da \right\rangle + \langle F, \varphi_1.a\rangle \\
&= \lim_\alpha \langle F, \pi(m_\alpha)\cdot Da\rangle + \langle F, \varphi\cdot a\rangle = \langle F, Da\rangle + \langle F, \varphi\cdot a\rangle.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
Da = ad_{\varphi_1} a \quad (a \in I).
$$

С другой стороны, E_1 — двусторонняя единица для A и правая единица для A''. Имеем

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= w^*\text{-}\lim_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \cdot Db_n^\alpha = w^*\text{-}\lim_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \cdot \left(b_n^\alpha \otimes E_1 - E_1 \otimes b_n^\alpha\right) \\
&= w^*\text{-}\lim_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^\alpha b_n^\alpha \otimes E_1 - a_n^\alpha \cdot E_1 \otimes b_n^\alpha\right) = w^*\text{-}\lim_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^\alpha b_n^\alpha \otimes E_1 - a_n^\alpha \otimes b_n^\alpha\right).
\end{aligned}
$$

Значит, $\varphi_1 = \pi'' M_1 \otimes E_1 - M_1$, где M_1 — w^*-предельная точка для ограниченной сети $(m_\alpha)_\alpha$, т. е. является виртуальной диагональю для I.

Положим $\widetilde{D} = D - D_{|I}$. Тогда $\widetilde{D}_{|I} = 0$ и тем самым $\widetilde{D}$ индуцирует отображение из A/I в $\ker\pi''$, которое обозначим тем же символом $\widetilde{D}$. Пусть

$$
F := \{\psi \in \ker\pi'';\ a\cdot\psi = \psi\cdot a = 0 \text{ для всех } a \in I\}
$$

и

$$
E_0 = \overline{\operatorname{lin}\{a\cdot x + y\cdot b : a, b \in I,\ x, y \in \ker\pi''\}}.
$$

Тогда $F \simeq (\ker\pi''/E_0)'$ — двойственный банахов A/I-бимодуль. Пусть $a \in I$ и $b \in A$. Имеем $a\cdot\widetilde{D}b = \widetilde{D}ab - \widetilde{D}a\cdot b = 0$, потому что $\widetilde{D}$ обращается в нуль на I; аналогично $\widetilde{D}b\cdot a = 0$. Следовательно, $\widetilde{D}(A/I) \subseteq F$. Так как алгебра A/I аменабельна, у нее имеется аппроксимативная диагональ. Пусть

$$
n_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\alpha \otimes d_n^\alpha,
$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|c_n^\alpha\|\|d_n^\alpha\| < \infty$ — аппроксимативная диагональ для A/I. Обозначим символом $q : A \to A/I$ отображение факторизации и возьмем $\epsilon > 0$. Тогда для любых n и α существуют $\tilde{c}_n^\alpha$ и $\tilde{d}_n^\alpha$ такие, что $q(\tilde{c}_n^\alpha) = c_n^\alpha$, $q(\tilde{d}_n^\alpha) = d_n^\alpha$, $\|\tilde{c}_n^\alpha\| < \sqrt{(1+\epsilon)}\|c_n^\alpha\|$ и $\|\tilde{d}_n^\alpha\| < \sqrt{(1+\epsilon)}\|d_n^\alpha\|$.

Для любых $f \in F$ и $a \in A$ можно записать $(a+I)\cdot f := a \cdot f$. Поскольку $a \cdot f = 0$ для $a \in I$, умножение задано корректно. Кроме того, поскольку $\widetilde{D}_{|I} = 0$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^{\alpha} \cdot D\tilde{d}_n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\alpha} \cdot Dd_n^{\alpha}.$$

Далее, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^{\alpha} \cdot Dd_n^{\alpha}$ — ограниченная сеть в $\ker \pi''$, имеющая w^*-предельную точку, скажем, φ_2. Без ограничения общности можно предполагать, что φ_2 есть w^*-предел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^{\alpha} \cdot D\tilde{d}_n^{\alpha}$. Аналогичного рассуждения достаточно, чтобы показать, что $\widetilde{D} = ad_{\varphi_2}$. So, $D = ad_{\varphi_1+\varphi_2}$. Положим $M = E - \varphi_1 - \varphi_2$. Легко убедиться, что

$$a \cdot M - M \cdot a = 0, \quad a.\pi'' M = 0 \quad (a \in A).$$

Поэтому M — виртуальная диагональ для A. Положим $\tilde{n}_{\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^{\alpha} \otimes \tilde{d}_n^{\alpha}$. Тогда $\tilde{n}_{\alpha}$ — ограниченная сеть в $A \widehat{\otimes} A$, имеющая w^*-предельную точку в $(A \otimes A)''$, скажем, $\tilde{n}$. Значит, $(q \otimes q)''(\tilde{n})$ — w^*-предельная точка для сети $(q \otimes q)''(\tilde{n}_{\alpha})$. С другой стороны, $(q \otimes q)''(\tilde{n}_{\alpha}) = n_{\alpha}$. Поэтому $n = (q \otimes q)''(\tilde{n})$ — w^*-предельная точка для сети $(n_{\alpha})_{\alpha}$, которая в действительности является виртуальной диагональю для A/I. Замечая, что π'' и $(q \otimes q)''$ w^*-непрерывны, получаем, что

$$\varphi_2 = w^*\text{-}\lim \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^{\alpha} \tilde{d}_n^{\alpha} \otimes E_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n^{\alpha} \otimes \tilde{d}_n^{\alpha} = \pi'' \tilde{n} \otimes E_1 - \tilde{n}.$$

Следовательно,

$$M = E - \tilde{\pi}'' M_1 \otimes E_1 + M_1 - \tilde{\pi}'' \tilde{n} \otimes E_1 + \tilde{n}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|M\| &\le \|E\| + (1 + \|E_1\|)(\|M_1\| + \|\tilde{n}\|) \\ &\le \sup_{\alpha} \|e_{\alpha}\|^2 + (1 + \sup_{\alpha} \|e_{\alpha}\|^2)(\|M_1\| + (1+\epsilon)\|n\|). \end{aligned}$$

Это верно для каждого ϵ. Поэтому имеем требуемый результат.

Найдем оценку сверху для констант аменабельности $L_0^1(G)$, где G — некоторая аменабельная группа.

Рассуждая, как в [7, предложение 2.4], для банаховой алгебры A имеем

$$AM(A) \ge \inf\{\sup_{\alpha} \|e_{\alpha}\| : (e_{\alpha})_{\alpha} \text{ — ограниченная аппроксимативная единица для } A\}.$$

Далее, если I — замкнутый идеал в A, то

$$AM(I) \le \inf\{\sup_{\alpha} \|e_{\alpha}\| : (e_{\alpha})_{\alpha} \text{ — ограниченная аппроксимативная единица для } I\} AM(A).$$

В частности, в случае, когда G — аменабельная локально компактная группа, $AM(L^1(G)) = 1$ и, следовательно,

$$AM\big(L_0^1(G)\big) = \inf\big\{\sup_{\alpha} \|e_{\alpha}\| : (e_{\alpha})_{\alpha} \text{ — ограниченная аппроксимативная единица для } L_0^1(G)\big\}.$$

В частном случае конечной группы G элемент $\delta_e - m_G$ является единицей идеала $L^1_0(G)$, где m_G — мера Хаара на G. Таким образом, $AM\big(L^1_0(G)\big) \le \|\delta_e - m_G\| \le 2$. Когда группа G компактна, но не конечна, этот идеал имеет ограниченную аппроксимативную единицу вида $\{u_\alpha \star (\delta_e - m_G)\}$, где $(u_\alpha)_\alpha$ — ограниченная аппроксимативная единица для $L^1(G)$, откуда следует, что $AM\big(L^1_0(G)\big) \le 2$ (заметим, что $\sup_\alpha \|u_\alpha\| \le 1$). Если группа G σ-компактна, то существует вероятностная мера μ на G такая, что

$$L^1_0(G) = \overline{\{f - \mu * f : f \in L^1(G)\}},$$

и $L^1_0(G)$ есть ограниченная аппроксимативная единица, имеющая вид $\left\{u_\alpha \star \left(\delta_e - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mu^i\right)\right\}_{\alpha,n}$, откуда следует, что $AM\big(L^1_0(G)\big) \le 2$; детали можно найти в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johnson B. E.* Cohomology in Banach algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 127).
2. *Johnson B. E.* Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras // Amer. J. Math. 1972. V. 94. P. 685–698.
3. *Runde V.* Lectures on amenability. Berlin: Springer-Verl., 2002. (Lect. Notes Math.; V. 1774).
4. *Johnson B. E.* Non-amenability of the Fourier algebra of a compact group // J. London Math. Soc. (2). 1994. V. 50, N 2. P. 361–374.
5. *Runde V.* The amenability constant of the Fourier algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 2006. V. 134, N 5. P. 1473–1481.
6. *Dales H. G., Lau A. T.-M., Strauss D.* Banach algebras on semigroups and their compactifications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 205, N 966).
7. *Duncan J., Paterson A. L. T.* Amenability for discrete convolution semigroup algebras // Math. Scand. 1990. V. 66. P. 141–146.
8. *Stokke R.* Approximate diagonals and Folner conditions for amenable groups and semigroups // Stud. Math. 2004. V. 164. P. 139–159.
9. *Dales H. G.* Banach algebras and automatic continuity. Oxford: Clarendon Press, 2000.
10. *Heagerup U.* All nuclear C*-algebras are amenable // Invent. Math. 1983. V. 74, N 2. P. 305–319.
11. *Ghahramani F., Loy R. J.* Generalized notions of amenability // J. Funct. Anal. 2004. V. 208. P. 229–260.
12. *Bonsall F. F., Duncan J.* Complete normed algebras. Berlin: Springer-Verl., 1973.
13. *Willis G. A.* Probability measures on groups and some related ideals in group algebras // J. Funct. Anal. 1990. V. 92. P. 202–263.

Статья поступила 9 апреля 2013 г.

Maedeh Soroushmehr (Сороушмехр Маедех)
Faculty of Mathematical Science and Computer,
Kharazmi University,
50 Taleghani av., Tehran 64518, Iran
std_soroushmehr@khu.ac.ir