*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1*

*УДК 517.97*

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

**Н. Мамадалиев**

**Аннотация.** Одной из интересных задач теории дифференциальных игр является задача преследования при интегральных ограничениях на управляющие параметры игроков. Получены достаточные условия для разрешимости линейной задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

**Ключевые слова:** преследование, убегание, терминальное множество, управление, запаздывание, дифференциальная игра.

## 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $n \geq 1$, $h$ — фиксированное действительное число, $A$, $B$, $C$, $D$ — постоянные прямоугольные матрицы, порядки которых $n \times n$, $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно. Функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, определенные на $[0, \infty)$, называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно. Они выбираются из класса измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям

$$\int\limits_0^\infty |u(t)|^2 \, dt \leq \rho^2, \quad \int\limits_0^\infty |v(t)|^2 \, dt \leq \sigma^2, \tag{2}$$

где $\rho$ и $\sigma$ — неотрицательные константы.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество $M$ в виде $M = M_0 + M_1$, где $M_0$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $M_1$ — выпуклое компактное подмножество подпространства $L$, ортогонального дополнения к подпространству $M_0$ в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Игра считается законченной, если $z(t) \in M$ в некоторый конечный момент времени $t$. Начальным положением для системы (1) является $n$-мерная вектор-функция $z_0(\cdot) \in X$, где

$$X = \{z_0(\cdot) : z_0(t) \text{ — абсолютно непрерывная функция, определенная на отрезке } [-h, 0],\ z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M\}. \tag{3}$$

Пусть $u = u(t)$, $0 \le t < \infty$, и $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$, — произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и начальному положению $z_0(\cdot) \in X$ ставится в соответствие решение $z(z_0(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ уравнения (1), выходящее при $t = 0$ из начального положения $z_0(\cdot) \in X$.

Определение. Будем говорить, что в игре (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ *возможно завершение преследования* за конечное время $T = T(z_0(\cdot))$, если для любого допустимого управления убегающего $v(t)$, $0 \le t \le T$, существует допустимое управление преследователя $u(t)$, $0 \le t \le T$, такое, что решение $z(t)$, $0 \le t \le T$, уравнения $\dot z(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t)$ с учетом начального условия (3) при некотором $t = t' \in [0, T]$ удовлетворяет включению $z(t') \in M$. При этом для построения управления $u(t)$ в каждый момент времени $t$ разрешается использовать значения $v(t)$, $0 \le t \le T$, и $z(s)$, $t - h \le s \le t$. Требуется найти начальное положение $z_0(\cdot) \in X$, из которого в игре (1) возможно завершение преследования за время $T = T(z_0(\cdot))$.

Пусть $\tau$ — положительное число и $t \in [0, \tau]$. Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, \tau]$, тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t)$, $-h \le t \le 0$, справедлива формула [1]

$$z(\tau) = K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(\tau - h - t)Bz_0(t)\,dt - \int_{0}^{\tau} K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt, \quad (4)$$

где $K(t)$, $-\infty < t \le \tau$, — матричная функция, обладающая следующими свойствами:

(а) $K(t) = \tilde 0$, $t < 0$, $\tilde 0$ — нулевая матрица порядка $n$;

(б) $K(0) = E$, $E$ — единичная матрица порядка $n$;

(в) элементы матричной функции $K(t)$, $0 \le t \le \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$;

(г) $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot K(t) = AK(t) + BK(t-h), \quad 0 < t \le \tau. \quad (5)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, удовлетворяющей условиям (а)–(г), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (5).

## 2. Формулировки и доказательства основных результатов

Сформулируем предположения, при выполнении которых гарантируется завершение преследования из начальной точки $z_0(\cdot) \in X$ (теоремы 1–4).

(А) Через $\pi$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L$. Рассмотрим линейные отображения $\pi K(t)C : \mathbb{R}^p \to L$, $\pi K(t)D : \mathbb{R}^q \to L$, где $t \ge 0$.

**Предположение 1.** *Существует матричная функция $F(t)$, $t \in [0, \tau]$, с суммируемыми с квадратом элементами, удовлетворяющая равенству $\pi K(t)CF(t) = \pi K(t)D$.*

В силу предположения 1 получаем $\pi K(t)CF(t)w = \pi K(t)Dw$ для всех $t \in [0, \tau]$ и $w \in \mathbb{R}^q$.

Пусть

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - m_1.$$

Положим

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где $\eta^0$ — произвольный единичный вектор из $L$. С помощью матричной функции $F(t)$, $t \geq 0$, построим функцию

$$\chi^2(\tau) = \sup \left\{ \int\limits_0^{\tau} |F(t) w(t)|^2\, dt : \|w(\cdot)\|_{L_2[0,\tau]} \leq 1 \right\}.$$

С учетом функции $\chi^2(\tau)$ определим величину $\chi^2 = \sup\{\chi^2(\tau) : \tau > 0\}$.

**Предположение 2.** *Имеет место неравенство* $\rho^2 > \chi^2 \sigma^2$.

Обозначим через $\gamma$ константу $\rho^2 - \chi^2\sigma^2$, через $R(t, w, \lambda)$ — функцию $[|F(\tau - t)w|^2 + \lambda |\xi[\tau, z_0(\cdot)]|^{-1} \gamma]^{1/2}$, $0 \leq t \leq \tau$, $w \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \geq 0$, и через $U(t, w, \lambda)$ — множество вида $R(t, w, \lambda) \pi K(\tau - t) CS - \pi K(\tau - t) Dw$, где $S$ — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в нуле.

Пусть $\lambda(t, \tau, w) = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, z_0(\cdot)] \in U(t, w, \lambda)\}$, при этом если $\xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, то считается $\eta[\tau, z_0(\cdot)] = 0$, $\lambda(t, \tau, w) \equiv 0$.

**Предположение 3.** *Существует положительное число* $\tau = \tau_0$ *такое, что*

(а) *суперпозиция* $\lambda(t, \tau_0, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_0$, *функции* $\lambda(t, \tau_0, v)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, $v \in \mathbb{R}^q$, *и произвольной суммируемой с квадратом функции* $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, *для которой* $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma$, *суммируема* [2, 3];

(б) *выполнено неравенство*

$$|\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \inf \left\{ \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma \right\} \leq 0. \qquad (6)$$

**Теорема 1.** *Если выполнены сформулированные выше предположения* 1–3, *то в игре* (1) *при ограничениях* (2) *возможно завершение преследования из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_0$.

Доказательство. Для произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \leq \sigma$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_0$, определенную следующим образом [4]:

$$\rho(t) = \rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[t, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t} \lambda(r, \tau_0, v(r))\, dr.$$

В силу п. (б) предположения 3 существует момент времени $t = t_0 \in [0, \tau_0]$ такой, что $\rho(t_0) = 0$. Если $\xi[t_0, z_0(\cdot)] = 0$, то можно считать $t_0 = 0$. Пусть

$\xi[t_0, z_0(\cdot)] \neq 0$ и $\rho(t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_0]$. В этом случае имеем

$$0 < \rho(\tau_0; v(t), 0 \le t \le \tau_0) = |\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt$$
$$\le |\xi[\tau_0, z_0(\cdot)]| - \inf \left\{ \int\limits_0^{\tau_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \le \sigma \right\},$$

что противоречит неравенству (6). Таким образом, $\rho(t_0; v(r), 0 \le r \le t_0) = 0$. Учитывая установленный факт, значение $u(t)$ параметра $u$ для каждого $t$, $0 \le t \le \tau_0$, рекомендуется выбрать как наименьшее в лексикографическом смысле решение системы уравнений

$$\pi K(\tau_0 - t)Cu = \pi K(\tau_0 - t)Dv(t) + \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)], \tag{7}$$
$$|u| = R(t, v(t), \lambda(t, \tau_0, v(t))), \quad 0 \le t \le t_0;$$

$$\begin{gathered} \pi K(\tau_0 - t)Cu = \pi K(\tau_0 - t)Dv(t), \\ |u| = R(t, v(t), 0), \quad t_0 < t \le \tau_0. \end{gathered} \tag{8}$$

Для решения $z(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, уравнения (1) при начальном условии (3) имеем ((7), (8))

$$\pi z(\tau_0) = H(\tau_0)z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_0} \pi K(\tau_0 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt$$
$$= m_1 + \xi[t_0, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)]\, dt = m_1,$$

где

$$H(\tau_0)z_0(\cdot) = \pi K(\tau_0)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_0 - h - t)Bz_0(t)\, dt,$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[t_0, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\eta[t_0, z_0(\cdot)]\, dt$$
$$= \left[ |\xi[t_0, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\, dt \right] \eta[t_0, z_0(\cdot)] = \rho(t_0) = 0.$$

Следовательно, $\pi z(\tau_0) = m_1 \in M_1$, что эквивалентно включению $z(\tau_0) \in M$. Теперь покажем, что выбранная в соответствии с системой уравнений (7), (8) функция $u(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_0]} \le \rho$. Имеем

$$\int\limits_0^{\tau_0} |u(t)|^2\, dt = \int\limits_0^{t_0} R^2(t, v(t), \lambda(t, \tau_0, v(t)))\, dt + \int\limits_{t_0}^{\tau_0} R^2(t, v(t), 0)\, dt$$

$$= \int\limits_0^{t_0} [|F(t)v(t)|^2 + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}\lambda(t, \tau_0, v(t))\gamma]\,dt + \int\limits_{t_0}^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\,dt$$

$$\le \int\limits_0^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\,dt + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}\gamma \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\,dt$$

$$\le \chi^2\sigma^2 + |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|^{-1}|\xi[t_0, z_0(\cdot)]|\gamma = \chi^2\sigma^2 + \gamma = \rho^2,$$

ибо, очевидно, что

$$\int\limits_0^{\tau_0} |F(t)v(t)|^2\,dt \le \chi^2\sigma^2, \quad \int\limits_0^{t_0} \lambda(t, \tau_0, v(t))\,dt = |\xi[t_0, z_0(\cdot)]|.$$

Теорема 1 доказана.

(Б) Пусть $M(t)$, $0 \le t \le \tau$, — произвольное компактнозначное многозначное отображение такое, что $\int\limits_0^{\tau} M(t)\,dt \subset M_1$.

Введем множество

$$U(M(t), v, \lambda, t) = [M(\tau - t) + R(t, v, \lambda)\pi K(\tau - t)CS] - \pi K(\tau - t)Dv,$$

$0 \le t \le \tau$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \ge 0$. Положим

$$\xi[\tau, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)\,dt - \int\limits_0^{\tau} \widetilde{w}(\tau - t)\,dt,$$

$$\eta[\tau, z_0(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, z_0(\cdot)]}{|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|}, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] \ne 0, \\ \eta^0, & \text{если } \xi[\tau, z_0(\cdot)] = 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{w}(t)$, $0 \le t \le \tau$ — произвольная суммируемая функция, $\widetilde{w}(t) \in U(M(t), v, \lambda, t)$ для всех $t \in [0, \tau]$, $\eta^0$ — произвольный единичный вектор из $L$.

Определим функцию $\lambda(t, \tau, v)$ следующим образом:

$$\lambda(t, \tau, v) = \sup\{\lambda \ge 0 : \lambda\eta[\tau, z_0(\cdot)] \in U(M(t), v, \lambda, t) - \widetilde{w}(\tau - t)\}.$$

**Предположение 4.** *Существуют положительное число $\tau = \tau_1$, многозначное отображение $M(t)$, $t \in [0, \tau_1]$, и суммируемая функция $\widetilde{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, такие, что*

(а) *суперпозиция $\lambda(t, \tau_1, v(t))$, $0 \le t \le \tau_1$, функции $\lambda(t, \tau_1, v)$, $0 \le t \le \tau_1$, $v \in \mathbb{R}^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma$, суммируема* [2, 3];

(б) *выполнено неравенство*

$$|\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \inf\left\{ \int\limits_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\,dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma \right\} \le 0. \tag{9}$$

**Теорема 2.** *Если выполнены сформулированные выше предположения* 1, 2, 4, *то в игре* (1) *при ограничениях* (2) *возможно завершение преследования из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_1$.

Доказательство. Аналогично (A) введем в рассмотрение функцию

$$\rho(t) = |\xi[t, z_0(\cdot)]| - \int_0^t \lambda(r, \tau_1, v(r))\, dr, \quad 0 \le r \le t,\ 0 \le t \le \tau_1,$$

где $v(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, — произвольная суммируемая с квадратом функция, $\|v(\cdot)\| \le \sigma$. Ясно, что существует момент времени $t = t_1 \in [0, \tau_1]$ такой, что $\rho(t_1) = 0$ (9). Действительно, в этом случае

$$0 < \rho(\tau_1) = |\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \int_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\, dt$$
$$\le |\xi[\tau_1, z_0(\cdot)]| - \inf\left\{ \int_0^{\tau_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\, dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_1]} \le \sigma \right\},$$

что противоречит неравенству (9). Таким образом, пусть $\rho(t_1) = 0$. С учетом этого факта значение $u(t)$ параметра $u$ для каждого $t$, $0 \le t \le \tau_1$, рекомендуется выбрать как решения уравнений

$$m + \pi K(\tau_1 - t)[Cu - Dv(t)] = w(\tau_1 - t) + \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)], \tag{10}$$
$$|u| = R(t, v(t), \lambda(t, \tau_1, v(t))), \quad 0 \le t \le t_1,$$

$$\begin{gathered} \pi K(\tau_1 - t)[Cu - Dv(t)] = w(\tau_1 - t), \\ |u| = R(t, v(t), 0), \quad t_1 < t \le \tau_1, \end{gathered} \tag{11}$$

относительно $u$ и $m \in M$. Как обычно, за решение $(u(t), m(t))$ системы (10), (11) принимается наименьшее в лексикографическом смысле среди всех решений системы (10), (11). Ясно, что $u(t)$, $m(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, — суммируемые функции [2, 3]. Убедимся, что траектория $z(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, уравнения (1) при начальном условии (3) попадает на множество $M$ до момента времени $\tau_1$. Действительно, в силу (10), (11) имеем

$$\xi[t_1, z_0(\cdot)] = H(\tau_1)z_0(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \widetilde{w}(\tau_1 - t)\, dt,$$

$$H(\tau_1)z_0(\cdot) = \xi[t_1, z_0(\cdot)] + \int_0^{\tau_1} \widetilde{w}(\tau_1 - t)\, dt$$
$$= \xi[t_1, z_0(\cdot)] + \int_0^{t_1} \{m(t) + \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt - \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\}\, dt$$
$$+ \int_{t_1}^{\tau_1} \{m(t) + \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\}\, dt$$

$$= \xi[t_1, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\,dt + \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt, \quad (12)$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[t_1, z_0(\cdot)] - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\eta[t_1, z_0(\cdot)]\,dt$$

$$= \left[|\xi[t_1, z_0(\cdot)]| - \int\limits_0^{t_1} \lambda(t, \tau_1, v(t))\,dt\right]\xi[t_1, z_0(\cdot)]|\xi[t_1, z_0(\cdot)]|^{-1} = 0.$$

Следовательно, в силу (12) имеем

$$\pi z(\tau_1) = H(\tau_1)z_0(\cdot) - \int\limits_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)[Cu(t) - Dv(t)]\,dt = \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt,$$

и так как $m(t) \in M(t)$ на отрезке $[0, \tau_1]$, то $\pi z(\tau_1) = \int\limits_0^{\tau_1} m(t)\,dt \in \int\limits_0^{\tau_1} M(t)\,dt \subset M_1$.

Таким образом, получаем включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, что эквивалентно попаданию $z(\tau_1)$ на $M$: $z(\tau_1) \in M$. Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы. Допустимость управления $u(t)$, $0 \le t \le \tau_1$, можно показать так же, как при доказательстве теоремы 1. Теорема 2 доказана.

**Лемма.** *Имеет место включение* $0 \in U(t, v, \lambda)$ *при всех* $t, v, \lambda$, $0 \le t \le \tau$, $v \in \mathbb{R}^q$ *и* $\lambda \ge 0$.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$U(t, v, \lambda) = R(t, v, \lambda)\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv, \quad (13)$$

где $R(t, v, \lambda) = [|F(\tau - t)v|^2 + \lambda|\xi[\tau, z_0(\cdot)]|^{-1}\gamma]^{1/2}$, $0 \le t \le \tau$, $\gamma = \rho^2 - \chi^2\sigma^2$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\lambda \ge 0$, $S$ — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в начале координат.

При $\lambda = 0$ имеем

$$U(t, v, 0) = R(t, v, 0)\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv,$$

так как $R(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|$. Тогда

$$U(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)Dv.$$

В силу предположения 1 следует $\pi K(\tau - t)CF(\tau - t)v = \pi K(\tau - t)Dv$.

Отсюда находим, что

$$U(t, v, 0) = |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)CS - \pi K(\tau - t)CF(\tau - t)v$$

$$= \begin{cases} |F(\tau - t)v|\pi K(\tau - t)C(S - \frac{F(\tau-t)v}{|F(\tau-t)v|}), & \text{если } F(\tau - t)v \ne 0, \\ 0, & \text{если } F(\tau - t)v = 0. \end{cases}$$

Из того, что $F(\tau-t)v\in\mathbb{R}^q$ и $\frac{F(\tau-t)v}{|F(\tau-t)v|}\in S$, видно, что $0\in U(t,v,0)$ при всех $0\le t\le\tau$, $v\in\mathbb{R}^q$.

Нетрудно проверить, что при $\gamma>0$ многозначное отображение (13) является монотонно возрастающим по параметру $\lambda\ge 0$, т. е. из $\lambda_1>\lambda_2$ следует включение $U(t,v,\lambda_2)\subset U(t,v,\lambda_1)$

Следовательно, $0\in U(t,v,0)\subset U(t,v,\lambda)$, которые верны для всех $\lambda\ge 0$, $0\le t\le\tau$ и $v\in\mathbb{R}^q$. Лемма доказана.

(B) Пусть $\alpha\in[0,\rho/\sigma)$ — произвольная константа, $\mu(t)$, $0\le t\le\tau$ — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\tau \mu^2(t)\,dt\le(\rho-\alpha\sigma)^2. \tag{14}$$

**Предположение 5.** *Для начального положения $z_0(\cdot)\in X$ существуют число $\tau=\tau_2>0$, матричная функция $F_1(t):L\to L$, $t\in[0,\tau_2]$ полунепрерывно сверху зависящая от $t$, функция $\mu(t)$, $0\le t\le\tau_2$, выпуклое компактное множество $M_2\subset L$, $M_1\underline{*}M_2\neq\varnothing$, $G(\tau_2)\overset{*}{\subset}M_2$, где множество $G(\tau_2)$ имеет вид*

$$G(\tau_2)=\left\{\int_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt:\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]}\le\sigma\right\},$$

*(для $X,Y\subset\mathbb{R}^n$ считается $X\overset{*}{\subset}Y$, если $Y\underline{*}X\neq\varnothing$) и произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение $M^*(t)\subset L$, $0\le t\le\tau_2$, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_2}M^*(t)\,dt\subset M_2\underline{*}G(\tau_2)$ такие, что для всех $t\in[0,\tau_2]$ непусто множество*

$$\widehat{w}(t)=\bigcap\{[M^*(\tau_2-t)+\pi K(\tau_2-t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}]-F_1(\tau_2-t)\pi K(\tau_2-t)Dv\},$$

*где пересечение берется по всем векторам $v\in\mathbb{R}^q$, $S_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}$ — $p$-мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)$ с центром в начале координат, $\underline{*}$ — означает геометрическую разность* [5].

Введем множество

$$\widehat{W}(t)=\int_0^t\widehat{w}(r)\,dr,\quad 0\le t\le\tau_2.$$

Из предположения 5 следует, что множество $\widehat{w}(t)$ измеримо по Борелю. Значит, существует измеримая по Борелю ветвь $w(t)\in\widehat{w}(t)$, $0\le t\le\tau_2$.

Используя результаты из [2,4,6], легко показать, что если $\xi[\tau,z_0(\cdot)]=0$ для некоторого положительного $\tau\le\tau_2$, то разрешима задача преследования к моменту $\tau$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau,z_0(\cdot)]\neq 0$ для всех $\tau\le\tau_2$.

Пусть $M_3(\subset M_1\underline{*}\,M_2)$ — выпуклое замкнутое множество и $m\in M_3$. Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v)=\begin{cases}\sup\{\lambda\ge 0:\lambda[\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]-m]\in M^*(\tau_2-t)\\ +\pi K(\tau_2-t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_2-t)}\\ -F_1(\tau_2-t)\pi K(\tau_2-t)Dv+w(\tau_2-t)\} & \text{при } \xi[\tau_2,z_0(\cdot)]\neq m,\\ (\tau_2-t)^{-1} & \text{при } \xi[\tau_2,z_0(\cdot)]=m.\end{cases}$$

**Предположение 6.** *Для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *и числа* $\tau_2 > 0$ *выполнено неравенство*

$$1 - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]} \le \sigma} \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt < 0. \qquad (15)$$

**Теорема 3.** *Если для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *выполнены предположения* 5, 6, *то в игре* (1), (2) *из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *возможно завершение преследования за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_2$.

Доказательство. Для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \le t < \infty$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t)$, $0 \le t \le \tau_2$, определенную следующим образом:

$$\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) = 1 - \int_0^t \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, r, v(r))\, dr.$$

В силу предположения 6 существует момент времени $t = t_2 \in [0, \tau_2]$ такой, что $\rho(t_2; v(t), 0 \le t \le t_2) = 0$. Ясно, что если $\xi[t, z_0(\cdot)] = 0$, то можно считать $t_2 = 0$. Пусть $\xi[t, z_0(\cdot)] \ne 0$ и $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t) > 0$ на отрезке $[0, \tau_2]$. Действительно, в этом случае

$$0 < \rho(\tau_2; v(t), 0 \le t \le \tau_2) = 1 - \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt$$
$$\le 1 - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_2]} \le \sigma} \int_0^{\tau_2} \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))\, dt,$$

что противоречит неравенству (15). Таким образом, пусть $\rho(t_2; v(t), 0 \le t \le t_2) = 0$. С учетом этого факта выберем функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_2 - t)}$, $m^*(t) \in M^*(t)$, в момент времени $t \in [0, t_2]$ как решения уравнения

$$m^*(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t) C u(t) - F_1(\tau_2 - t) \pi K(\tau_2 - t) D v(t)$$
$$= w(\tau_2 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))(\xi[\tau_2, z_0(\cdot)] - m), \qquad (16)$$

а в момент времени $t \in (t_2, \tau_2]$ как решения уравнения

$$m^*(\tau_2 - t) + \pi K(\tau_2 - t) C u(t) - F_1(\tau_2 - t) \pi K(\tau_2 - t) D v(t) = w(\tau_2 - t),\ u(t) = 0,\ t \ge \tau_2. \qquad (17)$$

В силу предположения 5 существует одно или много решений уравнений (16), (17). Согласно утверждению п. 2 из [2] функция $\lambda(z_0(\cdot), \tau_2, t, v(t))$ является измеримой функцией по $t$. Следовательно, в силу теоремы Филиппова (см. п. 7 из [2]) уравнения (16), (17) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что при таком способе управления параметром $u$ преследователь может гарантировать окончание преследования к моменту $\tau_2$.

Используя формулу Коши (см.(4)) (после его проектирования на $L$), приходим к следующему соотношению:

$$\pi z(\tau) = \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - \int_0^{\tau} \pi K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt. \qquad (18)$$

Прибавляя и вычитая величину $\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt$ и учитывая закон выбора управлений (16), (17) из формулы (18) при $\tau=\tau_2$ получаем

$$\pi z(\tau_2)=\pi K(\tau_2)z_0(0)+\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt-\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt+\int\limits_{-h}^{0}\pi K(\tau_2-h-t)Bz_0(t)\,dt$$

$$-\int\limits_0^{\tau_2}[\pi K(\tau_2-t)Cu(t)-F_1(\tau_2-t)\pi K(\tau_2-t)Dv(t)]\,dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt=\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]+\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt$$

$$-\int\limits_0^{t_2}[w(\tau_2-t)-m^*(\tau_2-t)+\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))(\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]-m)]\,dt$$

$$-\int\limits_{t_2}^{\tau_2}[w(\tau_2-t)-m^*(\tau_2-t)]\,dt+\int\limits_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt$$

$$=\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]+\int\limits_0^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt-\int\limits_0^{t_2} w(\tau_2-t)\,dt-\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]\,dt$$

$$+\int\limits_0^{t_2} m^*(\tau_2-t)\,dt+\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))m\,dt-\int\limits_{t_2}^{\tau_2} w(\tau_2-t)\,dt+\int\limits_{t_2}^{\tau_2} m^*(\tau_2-t)\,dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt=\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))m\,dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2} m^*(\tau_2-t)\,dt+\int\limits_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt, \qquad (19)$$

ибо, как установлено выше,

$$\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]-\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]\,dt$$

$$=\left[1-\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))\,dt\right]\xi[\tau_2,z_0(\cdot)]=0.$$

Следовательно, из (19) имеем

$$\pi z(\tau_2)=\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))m\,dt+\int\limits_0^{\tau_2} m^*(\tau_2-t)\,dt$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2}[E-F_1(\tau_2-t)]\pi K(\tau_2-t)Dv(t)\,dt\in\int\limits_0^{t_2}\lambda(z_0(\cdot),\tau_2,t,v(t))M_3\,dt+\int\limits_0^{\tau_2} M^*(\tau_2-t)\,dt$$

$$+\, G(\tau_2) \subset M_3 + [M_2 \underline{*} G(\tau_2)] + G(\tau_2) \subset [M_1 \underline{*} M_2] + M_2 \subset M_1.$$

Таким образом, для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(\tau_2) \in M_1$, это эквивалентно тому, что $z(\tau_2) \in M$, т. е. преследование заканчивается за время $\tau_2$. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что управление $u(t)$, $0 \le t \le \tau_2$, является допустимым. Действительно, в силу (14) и неравенства Коши — Буняковского справедлива следующая оценка:

$$\int_0^{\tau_2} |u(t)|^2\,dt \le \alpha^2 \int_0^{\tau_2} |v(t)|^2\,dt + 2\alpha \int_0^{\tau_2} \mu(\tau_2 - t)|v(t)|\,dt$$

$$+ \int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t)\,dt \le \left(\alpha\sigma + \sqrt{\int_0^{\tau_2} \mu^2(\tau_2 - t)\,dt}\right)^2 \le \rho^2,$$

что и означает допустимость управления $u(t)$, $0 \le t \le \tau_2$. Теорема 3 доказана.

**Предположение 7.** *Существуют число $\tau_3 > 0$, константа $\delta \in [0, 1)$ и измеримое замкнутозначное многозначное отображение $M(t) \subset L$, $0 \le t \le \tau_3$, удовлетворяющее условию $\int_0^{\tau_3} M(t)\,dt \subset \delta M_1$, такие, что для всех $t \in [0, \tau_3]$ непусто множество*

$$\widehat{w}(t) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \{[M(\tau_3 - t) + \pi K(\tau_3 - t) C S_{\alpha|v| + \mu(\tau_3 - t)}] - F_1(\tau_3 - t)\pi K(\tau_3 - t) D v\},$$

*где $S_{\alpha|v|+\mu(\tau_3-t)}$ — $p$-мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v|+\mu(\tau_3-t)$ пространства $\mathbb{R}^p$ с центром в начале координат.*

Введем множество

$$\widehat{W}(t) = \int_0^t \widehat{w}(r)\,dr, \quad 0 \le t \le \tau_3.$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $z_0(\cdot) \in X$. Для произвольных векторов $\eta \in L$, $v \in \mathbb{R}^q$ при $0 \le t \le \tau_3$ положим

$$\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\,dt + \eta - f,$$

где $f \in \widehat{W}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$. Далее, в соответствии с определением интеграла $\int_0^{\tau_3} \widehat{w}(t)\,dt$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $w(t) \in \widehat{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$, такой, что выполнено равенство $f = \int_0^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\,dt$, зафиксируем его. Тогда $\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)]$ имеет вид

$$\zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)] = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\,dt + \eta - \int_0^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\,dt.$$

Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v)$ следующим образом:

$$\lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda\zeta[\tau_3,\eta,z_0(\cdot)] \in [M(\tau_3-t)\pi K(\tau_3-t)CS_{\alpha|v|+\mu(\tau_3-t)}] \\ -F_1(\tau_3-t)\pi K(\tau_3-t)Dv - w(\tau_3-t)\} \quad \text{при } \zeta[\tau_3,\eta,z_0(\cdot)] \neq 0, \\ (\tau_3-t)^{-1} \quad \text{при } \zeta[\tau_3,\eta,z_0(\cdot)] = 0. \end{cases} \tag{20}$$

**Предположение 8.** (а) *Для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *и числа* $\tau_3 > 0$ *справедливо неравенство*

$$\inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau_3]}\leq\sigma} \int\limits_0^{\tau_3} \lambda(z_0(\cdot),\tau_3,\eta,t,v(t))\,dt > 1;$$

(б) *для допустимого управления* $v = v(t)$, $0 \leq t < \infty$, *убегающего игрока существует вектор* $\eta \in L$ *такой, что выполнено включение*

$$\int\limits_0^{\tau_3} [E - F(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt \in \eta + (1-\delta)M_1.$$

**Теорема 4.** *Если для начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *выполнены предположения* 7, 8, *то в игре* (1), (2) *возможно завершение преследования из заданного начального положения* $z_0(\cdot) \in X$ *за время* $T(z_0(\cdot)) = \tau_3$.

Доказательство. Пусть для игры (1) с начальным положением $z_0(\cdot) \in X$ выполнены предположения 7, 8. Можно показать, что функция $\lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v)$, определенная соотношением (20), является полунепрерывной сверху по $v$ при фиксированном $t$ и измеримой по Борелю по $t$ при фиксированном $v$ (см. [2]). Теперь для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t < \infty$, определим функцию $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, следующим образом:

$$\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = 1 - \int\limits_0^t \lambda(z_0(\cdot),\tau_3,\eta,r,v(r))\,dr.$$

Пусть $t_3(\leq \tau_3)$ — первый момент времени, когда выполняется равенство $\rho(t_3; v(r), 0 \leq r \leq t_3) = 0$. (В силу п. (а) предположения 8 такой момент существует для начального положения $z_0(\cdot) \in X$).

Функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_3-t)}$, $m(t) \in M(t)$ определяются в момент времени $t \in [0,t_3]$ как решения уравнения

$$m(\tau_3-t) + \pi K(\tau_3-t)Cu(t) - F_1(\tau_3-t)\pi K(\tau_3-t)Dv(t) = w(\tau_3-t) + \lambda(z_0(\cdot),\tau_3,\eta,t,v(t))\zeta[\tau_3,\eta,z_0(\cdot)], \tag{21}$$

а в момент времени $t \in (t_3,\tau_3]$ функции $u(t) \in S_{\alpha|v(t)|+\mu(\tau_3-t)}$, $m(t) \in M(t)$ определяются как решения уравнения

$$m(\tau_3-t) + \pi K(\tau_3-t)Cu(t) - F_1(\tau_3-t)\pi K(\tau_3-t)Dv(t) = w(\tau_3-t). \tag{22}$$

Далее, в силу предположения 7 существует одно или много решений уравнений (21), (22). Через $\Omega_1(t,v)$, $\Omega_2(t,v)$ обозначим множества решений уравнений

(21), (22) соответственно. В силу (20) и из $w(t) \in \widehat{w}(t)$, $0 \le t \le \tau_3$, следует, что множества $\Omega_1(t, v(t))$, $\Omega_2(t, v(t))$ непусты и являются компактами. Через

$$q^1(t, v(t)) = \mathrm{col}[m(t, v(t)), U_1(t, v(t))], q^2(t, v(t)) = \mathrm{col}[m(t, v(t)), U_2(t, v(t))]$$

обозначим решения уравнений (21), (22) с наименьшими в лексикографическом смысле компонентами $U_1(t, v(t)), U_2(t, v(t)), m(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$. По свойству числовой функции $\lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t))$ и C-свойству многозначных отображений [3], можно показать, что функции $q^1(t, v(t)), q^2(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$, являются $B$-измеримыми. Следовательно, для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \le t < \infty$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \le \sigma$, функции $q^1(t, v), q^2(t, v)$, $m(t, v)$, $t \in [0, \tau_3]$, измеримы [3]. По выбору $q^1(t, v(t)), q^2(t, v(t))$, $t \in [0, \tau_3]$, они единственны.

Таким образом, управление преследователя на отрезке $[0, \tau_3]$ определяется следующим образом. Если $\rho(t; v(r), 0 \le r \le t)$ положительно в момент времени $t \in [0, \tau_3]$, то $u(t) = U_1(t, v(t))$. При $t \in (t_3, \tau_3]$ положим $u(t) = U_2(t, v(t))$. Далее, при $t > \tau_3$ положим $u(t) = 0$. Теперь покажем, что при таком способе управления параметром $u(t)$ преследователь гарантирует завершение преследования за время $T(z_0(\cdot)) = \tau_3$. Тогда для решения $z(t)$, $0 \le t < \infty$, уравнения (1) при начальном условии $z(t) = z_0(t)$, $-h \le t \le 0$, из формулы Коши (после его проектирования на $L$ ) получаем (см. (4))

$$\pi z(\tau) = \pi K(\tau) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau - h - t) B z_0(t)\, dt - \int\limits_{0}^{t} \pi K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]\, dt. \tag{23}$$

Учитывая уравнения (21), (22) и считая $\tau = \tau_3$, преобразуем (23) следующим образом:

$$\pi z(\tau_3) = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt + \int\limits_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt$$

$$- \int\limits_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt - \int\limits_{0}^{\tau_3} [\pi K(\tau_3 - t) C u(t) - F_1(\tau_3 - t) \pi K(\tau_3 - t) D v(t)]\, dt$$

$$+ \int\limits_{0}^{\tau_3} [E - F_1(\tau_3 - t)] \pi K(\tau_3 - t) D v(t)\, dt = \pi K(\tau_3) z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt$$

$$- \int\limits_{0}^{t_3} [w(\tau_3 - t) - m(\tau_3 - t) + \lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t)) \zeta[\tau_3, \eta, z_0(\cdot)]]\, dt$$

$$- \int\limits_{t_3}^{\tau_3} [w(\tau_3 - t) - m(\tau_3 - t)]\, dt + \int\limits_{0}^{\tau_3} [E - F_1(\tau_3 - t)] \pi K(\tau_3 - t) D v(t)\, dt$$

$$+ \int\limits_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt - \int\limits_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt = \Bigg( \pi K(\tau_3) z_0(0)$$

$$+ \int\limits_{-h}^{0} \pi K(\tau_3 - h - t) B z_0(t)\, dt - \int\limits_{0}^{\tau_3} w(\tau_3 - t)\, dt \Bigg) \Bigg( 1 - \int\limits_{0}^{t_3} \lambda(z_0(\cdot), \eta, \tau_3, t, v(t))\, dt \Bigg)$$

$$
-\int_0^{t_3} \lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v(t))\eta\,dt+\int_0^{\tau_3} m(\tau_3-t)\,dt+\int_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt
$$

$$
=-\eta\int_0^{t_3} \lambda(z_0(\cdot),\eta,\tau_3,t,v(t))\,dt+\int_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt
$$

$$
+\int_0^{\tau_3} m(\tau_3-t)\,dt=-\eta+\int_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt+\int_0^{\tau_3} m(\tau_3-t)\,dt.
$$

В силу п. (б) предположения 8 выполнено включение

$$
-\eta+\int_0^{\tau_3}[E-F_1(\tau_3-t)]\pi K(\tau_3-t)Dv(t)\,dt\in(1-\delta)M_1. \tag{24}
$$

Кроме того, имеет место включение

$$
\int_0^{\tau_3} m(\tau_3-t)\,dt\in\int_0^{\tau_3} M(\tau_3-t)\,dt\subset\delta M_1. \tag{25}
$$

Отсюда и из (24), (25) получаем, что $\pi z(\tau_3)\in M_1$. Последнее включение эквивалентно включению $z(\tau_3)\in M$. Следовательно, преследование заканчивается за время $\tau_3$. Теорема 4 доказана.

Для иллюстрации условия теорем 1–4 рассмотрим примеры простого преследования.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую системой уравнений [4]

$$
\begin{cases} \dot z_1(t)=z_1(t)-u(t),\\ \dot z_2(t)=z_2(t-1)+v(t), \end{cases} \tag{26}
$$

где $z_1(t),z_2(t)\in\mathbb{R}^n, t\ge 0$, $n\ge 1$, $u(t),v(t)$ — $n$-мерные измеримые векторные функции, управления преследующего и убегающего игрока, определенные на отрезке $[0,\infty)$ и удовлетворяющие ограничениям

$$
\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)}\le\rho,\quad \|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)}\le\sigma,
$$

где $\rho,\sigma>0$ — неотрицательные константы.

В качестве терминального множества $M$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ берется линейное подпространство, состоящее из векторов $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющих условию $z_1=z_2$. Нетрудно видеть, что ортогональное дополнение $L$ к множеству $M_0$ состоит из векторов $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^{2n}$, удовлетворяющих условию $z_1=-z_2$.

Начальным положением для системы (26) является $g(t)=(g_1(t),g_2(t))$, где $g_1(t)$, $g_2(t)$ — $n$-мерные абсолютно непрерывные векторные функции, определенные на отрезке $[-1,0]$.

В качестве ортогонального базиса подпространства $L$ выберем такие векторы $e_i$ из $\mathbb{R}^{2n}$, у которых $i$-й координатой является 1, $n+i$-й координатой является $-1$, а остальные координаты нули, т. е.

$$
e_1=(1,0,\dots,0,-1,0,\dots,0),\quad e_2=(0,1,0,\dots,0,0,-1,\dots,0),
$$

$$\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, -1).$$

Тогда легко видеть, что векторы $e_i$ составляют ортогональный базис подпространства $L$ и что координаты вектора $\pi z$ в этом базисе составляют $n$-мерный вектор $\frac{1}{2}(z_1 - z_2)$. Условимся в дальнейшем все векторы $\pi z$ рассматривать только в этом базисе.

Если заданы допустимые управления $u(t), v(t)$, то решением уравнения (26) при начальном условии $z_1(s) = g_1(s)$, $z_2(s) = g_2(s)$, $-1 \le s \le 0$, являются функции

$$z_1(t) = K_1(t-1)g_1(0) - \int_0^t K_1(t-1-s)u(s)\,ds,$$

$$z_2(t) = K_2(t-1)g_2(0) - \int_{-1}^0 K_2(t-2-s)g_2(s)\,ds - \int_0^t K_2(t-1-s)v(s)\,ds,$$

где $K_1(t) = \varphi(t)E$, $K_2(t) = \psi(t)E$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -1, \\ e^{(t+1)} & \text{при } t > -1, \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -1, \\ \sum\limits_{i=0}^{N} \frac{(t+1-i)^i}{i!} & \text{при } N-1 \le t \le N,\ N = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$E$ — единичная матрица порядка $n$. В данном примере векторы $\pi K(t-1)Cu$, $\pi K(t-1)Dv$ в базисе $e_i$ запишутся в виде

$$\pi K(t-1)Cu = -\frac{1}{2}\varphi(t-1)u, \quad \pi K(t-1)Dv = \frac{1}{2}\psi(t-1)v. \tag{27}$$

Тогда вектор $\pi z$ имеет вид

$$\pi z(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t-1)g_1(0) - \psi(t-1)g_2(0)]$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \psi(t-2-s)g_2(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t [\varphi(t-1-s)u(s) - \psi(t-1-s)v(s)]\,ds.$$

С учетом (27) матричная функция $F(t)$, $t \ge 0$, имеет вид

$$F(t) = \frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}E, t \ge 0.$$

Ясно, что $F(t)$, $0 \le t \le \tau$, — сколь угодно гладкая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\pi K(t-1)CF(t) = \pi K(t-1)D$$

при всех $t \ge 0$. Отсюда находим, что

$$\chi^2(\tau) = \sup_{\int_0^\tau |w(t)|^2\,dt \le 1} \int_0^\tau f^2(t)|w(t)|^2\,dt,$$

где $f(t)=\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}$, $0\le t\le\tau$. Теперь вычислим функцию $\chi^2(\tau)$. Имеем

$$\int_0^\tau |F^2(t)w(t)|^2\,dt=\int_0^\tau \left[\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}\right]^2|w(t)|^2\,dt\le\max\left\{1,\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Ясно, что $\chi^2\le\frac{\rho^2}{\sigma^2}$. Поэтому предположение 2 выполнено, если $\rho>\sigma$. Далее, положим $m_1=0$. Кроме того, будем считать

$$\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]=\frac{1}{2}[\varphi(t-1)g_1(0)-\psi(t-1)g_2(0)]-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\psi(t-2-r)g_2(r)\,dr\ne0.$$

Вычислим функцию $\lambda(t,\tau,v)$. Для рассматриваемого примера

$$R(t,v,\lambda)=\left[\frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)}\right]^2|v|^2+[|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12},$$

$$U(t,v,\lambda)=[\psi^2(t-1-r)|v|^2+\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12}S-\psi(t-1-r)v,$$

где $0\le r\le\tau$, $\gamma=\rho^2-\max\left\{1,\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right\}$, $v\in\mathbb{R}^n$. Функция $R(t,v,\lambda)$ по переменной $\lambda$ монотонно возрастающая. Из уравнения

$$\lambda^2|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2+[2\psi(t-1-r)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\\ -\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma]\lambda=0$$

путем несложных вычислений нетрудно показать, что при выполнении неравенств

$$0\le\lambda\le\frac{1}{|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2}\max\{0,\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\\ -2\psi(t-1-r)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\}$$

справедливо включение

$$\lambda\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]+\psi(t-1-r)v\in[\psi^2(t-1-r)|v|^2\\ +\varphi^2(t-1-r)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\lambda]^{\frac12}S.$$

Следовательно,

$$\lambda(t,\tau,v)=\frac{1}{|\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t]|^2}\max\{0,\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma\\ -2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),t],v)\}.$$

Пусть $v=v(t)$ — произвольная суммируемая с квадратом функция, $0\le t\le\tau$, $\|v(\cdot)\|\le\sigma$. В дальнейшем рассматривается уравнение

$$|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|-\inf_{\int_0^\tau|v(t)|^2\,dt\le\sigma^2}\int_0^\tau\lambda(t,\tau,v(t))\,dt=0$$

относительно $\tau\ge0$. Имеем

$$\int_0^\tau\lambda(t,\tau,v(t))\,dt\\ \ge\max\left\{0,\int_0^\tau[\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau]|^{-1}\gamma-2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot),g_2(\cdot),\tau],v)]\,dt\right\},$$

ибо, очевидно, для произвольной суммируемой функции $g(t)$, $0 \le t \le \tau$, справедливо неравенство

$$\max \int\limits_0^\tau \{0, g(t)\}\, dt \ge \max \left\{ 0, \int\limits_0^\tau g(t)\, dt \right\}.$$

Из этого неравенства получаем

$$\max \int\limits_0^\tau \{0, \varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)\}\, dt$$

$$\ge \max \left\{ 0, \int\limits_0^\tau [\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)]\, dt \right\},$$

$$\int\limits_0^\tau [\varphi^2(\tau-1-t)|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma - 2\psi(\tau-1-t)(\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau], v)]\, dt$$

$$\ge |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma \int\limits_0^\tau \varphi^2(\tau-1-t)\, dt - 2\int\limits_0^\tau \psi(\tau-1-t)(v(t), \eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau])\, dt.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского из определения функция $\chi^2(\tau)$ имеем

$$\int\limits_0^\tau \left( \frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)} v(t), \varphi(t-1)\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau] \right) dt \le \left( \int\limits_0^\tau \left[ \frac{\psi(t-1)}{\varphi(t-1)} \right]^2 |v(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left( \int\limits_0^\tau \varphi^2(t-1)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} |\eta[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]| \le \sigma\chi \left( \int\limits_0^\tau \varphi^2(t-1)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\tau \lambda(t, \tau, v(t))\, dt$$

$$\ge \max \left\{ 0, |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]|^{-1}\gamma \int\limits_0^\tau \varphi^2(\tau-1-t)\, dt - 2\sigma\chi \left( \int\limits_0^\tau \varphi^2(t-1)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Ввиду того, что $\gamma = \rho^2 - \chi^2\sigma^2 > 0$, функция $\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau]$ ограничена на $0 \le t \le \tau$ и $\int\limits_0^\tau \varphi^2(t-1)\, dt$ монотонно возрастает по $t$ при $t \ge 0$, получим существование такого момента $\tau = \tau^*$, для которого выполнено равенство

$$\gamma \int\limits_0^{\tau^*} \varphi^2(\tau^*-1-t)\, dt - 2\sigma\chi \left( \int\limits_0^{\tau^*} \varphi^2(t-1)\, dt \right)^{\frac{1}{2}} |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]| = |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]|^2.$$

Отсюда вытекает равенство

$$|\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]| = (\rho - \chi\sigma)\left(\int\limits_0^{\tau^*} \varphi^2(t-1)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\tau^*} \lambda(t, \tau, v(t))\,dt \geq |\xi[g_1(\cdot), g_2(\cdot), \tau^*]|.$$

Так как функция $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, $\|v(\cdot)\| \leq \sigma$, произвольна, выполнено и предположение 3 теоремы 1.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальную игру [5]

$$\dot z(t) = z(t-h) - u(t) + v(t), \tag{28}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $n \geq 1$, $h = \mathrm{const} \geq 0$ — величина запаздывания, $u(t), v(t)$ — управления преследующего и убегающего игроков соответственно, $\|u(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \rho$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\infty)} \leq \sigma$. Множеством начальных положений для системы (28) является $X = \{z_0(t) : z(t) = z_0(t),\ t \in [-h, 0]\}$. Для игры (28) $A = \tilde 0, B = C = D = E$, терминальное множество $M$ имеет вид $M = M_0 + M_1$, где $M_0 = \{z : z = 0\}$, $M_1 = \{z : \|z\| \leq l\}$, $\tilde 0$, $E$ — нулевая и единичная матрицы порядка $n$ соответственно. Преследование считается завершенным, если $\|z\| \leq l$ в некоторый конечный момент времени $t$, где $\rho, \sigma, l$ — положительные константы, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Пусть $T$ — произвольное положительное число, $\alpha \in [0, \rho \setminus \sigma)$ — некоторая константа. Далее, решением уравнения (28) при начальном условии $z_0(\cdot) \in X$ и данном управлении $u(t), v(t)$, $0 \leq t \leq T$, является функция

$$z(T) = K(T-h)z_0(0) + \int\limits_{-h}^{0} K(T-2h-t)z_0(t)\,dt - \int\limits_0^T K(T-h-t)(u(t) - v(t))\,dt.$$

Матричная функция $K(T)$ имеет вид $K(T) = \eta(T)E$, где

$$\eta(T) = \begin{cases} 0 & \text{при } T < -h, \\ \sum\limits_{j=0}^{\nu} \frac{(T+h-j)^j}{j!} & \text{при } \nu - h \leq T \leq \nu,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Матрицу $F_1(t)$ и множества $M_2$, $M_3$, $M^*(t)$, $t \in [0, T]$, $G(T)$ определим следующим образом: $F_1(t) = \alpha^2 E$, $M_2 = l_1 S$, $M_3 = \{0\}$, $M^*(t) = a(t)M_2$, $t \in [0, T]$, где $a(t)$ — суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^T a(t)\,dt = 1$ (например, $a(t) = \frac{1}{T}$), $G(T) = (1 - \alpha^2)\sqrt{\int\limits_0^T K^2(T-t)\,dt}\sigma S$, где $E$ — единичная матрица порядка $n$, $S$ — $n$-мерный замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Будем предполагать, что выполнены неравенства

$$l_1 < l, \quad (1-\alpha^2)\sqrt{\int\limits_0^T \eta^2(T-t)\,dt}\sigma < l_1. \tag{29}$$

Положим
$$\mu(t) = (\rho - \alpha\sigma)\eta(t)\left(\sqrt{\int_0^T \eta^2(T-t)\,dt}\right)^{-1}.$$
Далее, положим $m = 0$, $w(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Тогда справедливо равенство
$$\xi[T, z_0(\cdot)] = \pi K(T-h)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(T-2h-t)z_0(t)\,dt.$$
Несложные вычисления показывают, что
$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] \in a(T-t)l_1 S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S - \eta(T-t)v,$$
или
$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\xi[T, z_0(\cdot)] + \eta(T-t)v \in a(T-t)l_1 S + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))S.$$
После элементарных вычислений приходим к следующему уравнению относительно $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$:
$$\lambda^2(z_0(\cdot), T, t, v)|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2 + 2\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)\eta(T-t)(\xi[T, z_0(\cdot)], v) + \eta^2(T-t)|v|^2 \\ = [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2.$$
Следовательно, если $\xi[T, z_0(\cdot)] \neq 0$, то для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ функция $\lambda(z_0(\cdot), T, t, v)$ имеет следующий вид:
$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) = \frac{1}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}\left[-\eta(T-t)\left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v\right) \right. \\ \left. + \sqrt{A^2 + B^2|\xi[T, z_0(\cdot)]|^2}\right],$$
где
$$A^2 = \eta^2(T-t)\left(\frac{\xi[T, z_0(\cdot)]}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}, v\right)^2,$$
$$B^2 = [a(T-t)l_1 + \eta(T-t)(\alpha|v| + \mu(T-t))]^2 - \eta^2(T-t)|v|^2.$$
Стало быть, для любых $v \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство
$$\lambda(z_0(\cdot), T, t, v) \geq \frac{\eta(T-t)\mu(T-t)}{|\xi[T, z_0(\cdot)]|}.$$
Следовательно, если $\rho > \alpha\sigma$, то предположение 5 выполнено. Если для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существует число $T > 0$, для которого выполняется равенство
$$\left|\pi K(T-h)z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(T-2h-t)z_0(t)\,dt\right| = (\rho - \alpha\sigma)\sqrt{\int_0^T K^2(T-t)\,dt},$$
то предположение 6 выполнено. Таким образом, если выполнены неравенства $\rho > \alpha\sigma$ и (29), то выполнены условия теорем.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1967.
2. *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
4. *Сатимов Н. Ю.* О задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх многих лиц // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: ФАН, 1985. С. 154–174.
5. *Никольский М. С.* Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 260–267.
6. *Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц.* Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 802–810.


*Статья поступила 18 ноября 2010 г., окончательный вариант — 15 марта 2014 г.*

Мамадалиев Нуманжон
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
механико-математический факультет,
Вузгородок, ул. Университетская, 1, Ташкент 100174, Узбекистан
M_numana59@mail.ru