Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1

УДК 517.544

ЯВНЫЕ ФОРМЫ ИНТЕГРАЛОВ ШВАРЦА В КОЛЬЦЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Р. Абубакиров, Л. А. Аксентьев

Аннотация. Приведены новые явные формы интеграла Шварца в кольце. Получено соответствие между рядами Фурье для краевых значений задачи Шварца и рядами Лорана для регулярной функции $f(z)$, являющейся ее решением. Подробно изучен случай дробно-линейной функции как решение задачи Шварца в круге, кольце и произвольной многосвязной области с приложением к обратным краевым задачам.

Ключевые слова: интеграл Шварца, ряд Фурье, ряд Лорана, обратные краевые задачи.

1. Введение

Г. Н. Пыхтеев [1] исследовал задачу Шварца

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = u(\theta) \Rightarrow f(z) =?$$

в круге $|z| < 1$ с целью выявить явные формы решения этой задачи. Им были определены классы граничных условий $\{u(\theta)\}$, которые приводят к явным формам интеграла Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\theta,$$

решающего задачу Шварца. Как правило, эти явные формы возникают при обосновании односторонних импликаций $\{u(\theta)\} \Rightarrow \{f(z)\}$ или $\{f(z)\} \Rightarrow \{u(\theta)\}$. Возможные критерии в форме двусторонних импликаций $\{u(\theta)\} \Leftrightarrow \{f(z)\}$ приведены в работе авторов [2].

Некоторые критерии, полученные для задачи Шварца в круге, можно перенести на круговые многосвязные области, в частности на кольцо. Утверждения по задаче Шварца в кольце составят основную часть данной статьи. Возможные обобщения для круговых многосвязных областей с порядком связности ≥ 3 будут приведены в разд. 6.

2. Формула Вилля и ее видоизменение

Известную формулу Вилля [3, с. 238] можно представить в виде [4, с. 18]

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{|t|=1} u(t) \frac{t + zq^{2k}}{t - zq^{2k}} \frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q} u(t) \frac{t + zq^{2k}}{t - zq^{2k}} \frac{dt}{t} \right], \\ \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \, d\theta = \int_0^{2\pi} u(qe^{i\theta}) \, d\theta. \end{gathered} \tag{1}$$

В представлении проявляется группа симметрии $\{q^{2k}z\}_{k=-\infty}^{\infty}$ кольца $\{z : q < |z| < 1\}$, в расширенной форме состоящая из преобразований $\{q^{2k}z, q^{2k}\bar{z}^{-1}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

С помощью вычетов и теоремы Коши покажем, что правая часть формулы (1) равна левой. Запишем следующую систему равенств:

$$J = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(1/\bar{t})})\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=q}\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(q^2/\bar{t})})\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right] = J_1+J_2+J_3,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2}f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=q}\frac{1}{2}f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{res}_z\left(f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{\zeta}\right) = f(z),$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{\infty}\left[\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2}f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q}\frac{1}{2}f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right] = 0$$

по теореме Коши,

$$J_3 = \frac{1}{4\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{|t|=1}\overline{f(1/\bar{t})}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q}\overline{f(q^2/\bar{t})}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right]$$

(во втором интеграле делаем замену $t = q^2\tau$)

$$= \frac{1}{4\pi i}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=-N}^{N}\int\limits_{|t|=1}\overline{f(1/\bar{t})}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \sum_{k'=-N+1}^{N+1}\int\limits_{|\tau|=1/q}\overline{f(1/\bar{\tau})}\frac{\tau+zq^{2k'-2}}{\tau-zq^{2k'-2}}\frac{d\tau}{\tau}\right]$$

$(k'-1=k)$

$$= \frac{1}{4\pi i}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\left[\int\limits_{|t|=1}\overline{f(1/\bar{t})}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=1/q}\overline{f(1/\bar{t})}\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right] = 0,$$

так как выражение в последней квадратной скобке равно нулю по теореме Коши.

Запишем решения двух задач Шварца в кольце $q < |z| < 1$ с краевыми условиями для вещественной и мнимой частей регулярной функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{|t|=1}\operatorname{Re} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q}\operatorname{Re} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right],$$

$$-if(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{|t|=1}\operatorname{Im} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q}\operatorname{Im} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\right].$$

Сложим эти формулы, предварительно умножив вторую формулу на i. Совершив несложные преобразования, получим

$$2f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[\int\limits_{|t|=1} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Bigg[\int\limits_{|t|=1} f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\Bigg]$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty}\Bigg[\int\limits_{|t|=1} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t} - \int\limits_{|t|=q} f(t)\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}\Bigg]$$

(второе слагаемое равно нулю по теореме Коши)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f(t)\frac{t+z-t+t}{t-z}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)\,dt}{t} + \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

где $L = (|t|=1)\cup(|t|=q)^{-}$. Отсюда следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)\,dt}{t-z}$$

при выполнении условия

$$\int\limits_{L}\frac{f(t)\,dt}{t} = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2\pi} u(e^{i\theta})\,d\theta - \int\limits_{0}^{2\pi} u(qe^{i\theta})\,d\theta = 0.$$

Тем самым получен интеграл Коши из интеграла Шварца для кольца. Аналогичный переход можно провести для любой круговой многосвязной области.

3. Ряды Лорана и Фурье в задаче Шварца

Проверим действие формулы (1) при получении степеней z^m, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, в ряде Лорана для функции $f(z)$. Для этого нужно вычислить с помощью вычетов несколько интегралов при различных предположениях относительно m и k. Нетрудно проверяется следующая сводка результатов (для $q < |z| < 1$):

$$J_1(m,k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} t^m\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}$$

$$= \{2(zq^{2k})^m,\ m\geq 1,\ k\geq 0;\ 0,\ m\geq 1,\ k\leq -1;\ 1,\ m=0,\ k\geq 0;$$
$$-1,\ m=0,\ k\leq -1;\ 0,\ m\leq -1,\ k\geq 0;\ -2(zq^{2k})^m,\ m\leq -1,\ k\leq -1\},$$

$$J_q(m,k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=q} t^m\frac{t+zq^{2k}}{t-zq^{2k}}\frac{dt}{t}$$

$$= \{2(zq^{2k})^m,\ m\geq 1,\ k\geq 1;\ 0,\ m\geq 1,\ k\leq 0;\ 1,\ m=0,\ k\geq 1;$$
$$-1,\ m=0,\ k\leq 0;\ 0,\ m\leq -1,\ k\geq 1;\ -2(zq^{2k})^m,\ m\leq -1,\ k\leq 0\}.$$

С использованием этих формул можно получить ряд Лорана для $f(z)$, когда граничные условия задаются в виде рядов Фурье по $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$. На граничных окружностях получим представления

$$\cos m\theta = (t^m + 1/t^m)/2, \quad \sin m\theta = -i(t^m - 1/t^m)/2 \quad \text{при } t = e^{i\theta},$$

$$q^m \cos m\theta = (t^m + q^{2m}/t^m)/2, \quad q^m \sin m\theta = -i(t^m - q^{2m}/t^m)/2 \quad \text{при } t = qe^{i\theta},$$

где $0 \le \theta \le 2\pi$. Однако ряд Лорана для $f(z)$ довольно просто возникает, если вывести соотношения, которые связывают коэффициенты ряда Лорана с коэффициентами равномерно сходящихся рядов Фурье на граничных окружностях.

Теорема 1. *Пусть граничные условия для задачи Шварца в кольце $q < |z| < 1$ имеют вид*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \\ \operatorname{Re} f(qe^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m \cos m\theta + d_m \sin m\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

и являются равномерно сходящимися рядами Фурье при выполнении условий

$$\max(|a_k|, |b_k|, |c_k|, |d_k|) \le \frac{A}{k^\alpha}, \quad \alpha > 1,\ k = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Тогда регулярная функция $f(z)$ в кольце $q < |z| < 1$ непрерывна в замкнутом кольце и представима рядом Лорана

$$f(z) = a_0 + ic + \sum_{m=1}^{\infty}(C_{-m} z^{-m} + C_m z^m), \tag{4}$$

который сходится в замкнутом кольце и коэффициенты которого удовлетворяют соотношениям

$$C_{-m} = \alpha_{-m} + i\beta_{-m} = \frac{1}{1 - q^{-2m}}[a_m + ib_m - q^{-m}(c_m + id_m)], \tag{5}$$

$$C_m = \alpha_m + i\beta_m = \frac{1}{1 - q^{2m}}[a_m - ib_m - q^m(c_m - id_m)], \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Условия (3) можно заменить условиями Гёльдера с показателем $\alpha > 1/2$ для $\operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ и $\operatorname{Re} f(qe^{i\theta})$, чтобы по теореме С. Н. Бернштейна в [5, гл. 20] обеспечить сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{c_k^2 + d_k^2}$.

Доказательство. Для граничных значений вещественной части функции $f(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(\alpha_{-m} + i\beta_{-m})e^{-im\theta} + (\alpha_m + i\beta_m)e^{im\theta}] \\ &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[(\alpha_{-m} + \alpha_m)\cos m\theta + (\beta_{-m} - \beta_m)\sin m\theta], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} f(qe^{i\theta}) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re}[(\alpha_{-m} + i\beta_{-m})q^{-m}e^{-im\theta} + (\alpha_m + i\beta_m)q^m e^{im\theta}]$$
$$= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(\alpha_{-m}/q^m + \alpha_m q^m)\cos m\theta + (\beta_{-m}/q^m - \beta_m q^m)\sin m\theta].$$

При сравнении с предписанными граничными условиями (2) получим систему уравнений

$$\alpha_{-m} + \alpha_m = a_m, \quad \beta_{-m} - \beta_m = b_m,$$
$$\alpha_{-m}/q^m + \alpha_m q^m = c_m, \quad \beta_{-m}/q^m - \beta_m q^m = d_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

из которой найдем

$$\alpha_m = \frac{a_m - c_m q^m}{1 - q^{2m}}, \quad \alpha_{-m} = \frac{a_m - c_m q^{-m}}{1 - q^{-2m}},$$

$$\beta_m = \frac{d_m q^m - b_m}{1 - q^{2m}}, \quad \beta_{-m} = \frac{b_m - d_m q^{-m}}{1 - q^{-2m}}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому будут верны формулы (5). Равномерная и абсолютная сходимость рядов (2) обеспечивается сходимостью мажорирующих рядов. В частности,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{c_k^2 + d_k^2} < \infty,$$

если выполняются условия (3). Они приводят к таким оценкам:

$$\frac{|C_{-m}|}{|z|^m} \le \frac{1}{q^{-2m} - 1} \frac{1}{|z|^m} \left(\sqrt{a_m^2 + b_m^2} + q^{-m}\sqrt{c_m^2 + d_m^2}\right)$$
$$\le \left(\frac{q}{|z|}\right)^m \frac{1}{1 - q^{2m}} \left(q^m \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} + \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha}\right)$$
$$= \left(\frac{q}{|z|}\right)^m \frac{1}{1 - q^m} \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} \le \frac{1}{1 - q} \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} \quad \text{при } |z| \ge q,$$

$$|C_m||z|^m \le \frac{|z|^m}{1 - q^{2m}} \left(\sqrt{a_m^2 + b_m^2} + q^m \sqrt{c_m^2 + d_m^2}\right) \le \frac{|z|^m}{1 - q^{2m}} \left(\frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} + q^m \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha}\right)$$
$$= \frac{|z|^m}{1 - q^m} \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} \le \frac{1}{1 - q} \frac{A\sqrt{2}}{m^\alpha} \quad \text{при } |z| \le 1.$$

Полученные оценки обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость ряда Лорана (4) в замкнутом кольце $q \le |z| \le 1$, так как

$$\sum_{m=1}^{N} \left(\frac{|C_{-m}|}{|z|^m} + |C_m||z|^m\right) \le \frac{2A\sqrt{2}}{1 - q} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^\alpha} \le B(N) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} B(\infty) < \infty \quad \text{при } \alpha > 1.$$

Частными случаями доказанной теоремы являются следующие эквивалентности.

1. Конечные части рядов Фурье для $\operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ и $\operatorname{Re} f(qe^{i\theta})$ на двух граничных окружностях кольца $q < |z| < 1$ эквивалентны конечной части ряда Лорана, решающей соответствующую задачу Шварца для $f(z)$.

2. Полином по степеням z или $1/z$ для $f(z)$ (либо целая функция $f(z)$ или $f(1/z)$) эквивалентны конечным частям рядов Фурье для $\operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ и для $\operatorname{Re} f(qe^{i\theta})$ (либо два полных ряда Фурье), но с дополнительными условиями на коэффициенты этих частей. Например, можно задать один отрезок ряда Фурье на $|z| = 1$, что полностью определит отрезок ряда Фурье на окружности $|z| = q$, если $f(z)$ — полином.

При более сложных, чем конечные отрезки рядов Фурье, выражениях для $\operatorname{Re} f(e^{i\theta})$ и $\operatorname{Re} f(qe^{i\theta})$ будут получаться более сложные структуры для $f(z)$. Не всегда удобно пользоваться рядами Фурье, если коэффициенты этих рядов определяются конечным числом параметров. Например, в случае

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) &= \frac{a_{n1}\cos n\theta + a_{n2}\sin n\theta + \cdots + a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta + a_{01}}{b_{n1}\cos n\theta + b_{n2}\sin n\theta + \cdots + b_{11}\cos\theta + b_{12}\sin\theta + b_{01}}, \\ \operatorname{Re} f(qe^{i\theta}) &= \frac{c_{n1}\cos n\theta + c_{n2}\sin n\theta + \cdots + c_{11}\cos\theta + c_{12}\sin\theta + c_{01}}{d_{n1}\cos n\theta + d_{n2}\sin n\theta + \cdots + d_{11}\cos\theta + d_{12}\sin\theta + d_{01}} \end{aligned} \tag{6}$$

с $8n+4$ вещественными параметрами получим ряд Лорана для $f(z)$ с таким же количеством вещественных параметров. Форма

$$f(z) = \frac{C_n z^n + \cdots + C_1 z + C_0}{z^n + D_{n-1}z^{n-1}\cdots + D_1 z + D_0} \tag{7}$$

с $4n+2$ вещественными параметрами ($C_k = \alpha_k + i\beta_k$, $D_k = \gamma_k + i\delta_k$, $k = 0,1,\ldots,n$; $D_n = 1$) получится, если коэффициенты $\{c_{k1}, c_{k2}; d_{k1}, d_{k2}\}_{k=0}^n$ будут выражаться через $\{a_{k1}, a_{k2}; b_{k1}, b_{k2}\}_{k=0}^n$. Форма (7) была получена в [2] как критерий представления $f(z)$ в круге $|z| < 1$ через граничные условия (6).

4. Случай дробно-линейной функции в круге

Подробно изучим частный случай дробно-рациональных функций (7), когда эта функция становится дробно-линейной.

Замечание. Далее в работе исследуется, в частности, вопрос, когда функция $u(\theta)$ является вещественной частью некоторого дробно-линейного преобразования

$$u(\theta) = \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left.\frac{A_1 z + A_0}{z + A_2}\right|_{z=e^{i\theta}}.$$

Здесь имеется очевидный произвол: это равенство не нарушится, если к функции $f(z)$ добавить произвольную чисто мнимую константу iC (при этом, конечно, параметры A_j, $j = 0,1,2$, претерпят соответствующие изменения). Имея это в виду, всюду в дальнейшем будем опускать слагаемое iC с учетом дополнительного условия на f, например $\operatorname{Im} f(0) = 0$, как в интеграле Шварца.

Лемма. *Шесть вещественных параметров* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ ($\alpha_k + i\beta_k = A_k$, $k = 0,1,2$), *входящих в функцию*

$$f(e^{i\theta}) = \left.\frac{A_1 z + A_0}{z + A_2}\right|_{z=e^{i\theta}}, \tag{8}$$

при $|A_2| > 1$ *или при* $0 < |A_2| < 1$ *взаимно однозначно соответствуют шести параметрам* $a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2$ (*с точностью до общего множителя* $c \neq 0$), *определяющим функцию*

$$u(\theta) = \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \frac{a_0 + a_1\cos\theta + a_2\sin\theta}{b_0 + b_1\cos\theta + b_2\sin\theta} \tag{9}$$

при условии

$$b_0 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Проделаем вычисления для перехода от функции $f(z)$ к функции $u(\theta)$. Имеем

$$\left.\frac{A_1 z + A_0}{z + A_2}\right|_{z=e^{i\theta}} = \frac{A_1 e^{i\theta} + A_0}{e^{i\theta} + A_2} \cdot \frac{e^{-i\theta} + \overline{A_2}}{e^{-i\theta} + \overline{A_2}} = \frac{f_1(\theta)}{f_2(\theta)} + i\frac{f_3(\theta)}{f_2(\theta)},$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= A_1 + A_1\overline{A_2}e^{i\theta} + A_0 e^{-i\theta} + A_0\overline{A_2} - if_3(\theta) \\ &= \alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2 + (\alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\cos\theta + (\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\sin\theta, \end{aligned}$$

$$f_2(\theta) = 1 + \overline{A_2}e^{i\theta} + A_2 e^{-i\theta} + |A_2|^2 = 1 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2\alpha_2\cos\theta + 2\beta_2\sin\theta.$$

В результате сравнения функции $f_1(\theta)/f_2(\theta)$ с (9) получим систему из шести соотношений

$$\begin{gathered} b_0 = 1 + \alpha_2^2 + \beta_2^2, \quad b_1 = 2\alpha_2, \quad b_2 = 2\beta_2, \quad a_0 = \alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2, \\ a_1 = \alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2, \quad a_2 = \beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{gathered} \tag{11}$$

Эта система определяет шесть параметров $\{a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2\}$ по шести параметрам $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2\}$. При этом выполняются неравенства (10), так как (с учетом неравенства $\bigl(\sqrt{b_1^2 + b_2^2}/2 - 1\bigr)^2 \geq 0$ при знаке равенства для $b_1^2 + b_2^2 = 4$)

$$b_0 = 1 + \frac{b_1^2 + b_2^2}{4} > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = 2\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = 2|A_2| > 0, \quad \text{если } b_1^2 + b_2^2 = 4|A_2|^2 \neq 4.$$

Полученный набор $\{a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2\}$ можно заменить набором $\{ca_0, ca_1, ca_2; cb_0, cb_1, cb_2\}$ без изменения функции $u(\theta)$ после сокращения на c.

Достаточность. Для обратного перехода введем дополнительный положительный параметр c, на который умножим числитель и знаменатель дроби (9), не меняя ее значения

$$u(\theta) = \frac{ca_0 + ca_1\cos\theta + ca_2\sin\theta}{cb_0 + cb_1\cos\theta + cb_2\sin\theta}.$$

Тогда измененная система соотношений (11) будет выглядеть так:

$$1 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = cb_0, \quad 2\alpha_2 = cb_1, \quad 2\beta_2 = cb_2, \tag{12}$$

$$\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2 = ca_0, \quad \alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = ca_1, \quad \beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = ca_2. \tag{13}$$

К системе уравнений (12), (13) добавим еще одно уравнение, распорядившись мнимой частью функции $f(z)$ следующим образом:

$$\operatorname{Im}\left.\frac{A_1 z + A_0}{z + A_2}\right|_{z=0} = \operatorname{Im}\frac{A_0}{A_2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(A_0\overline{A_2}) = 0,$$

что дает седьмое уравнение

$$\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 = 0. \tag{14}$$

Система из семи уравнений (12)–(14) служит для определения семи величин $\{c, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2\}$ через шесть параметров $\{a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2\}$. Из уравнений (12) получим

$$\alpha_2 = \frac{cb_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{cb_2}{2}, \quad 1 + \frac{c^2\bigl(b_1^2 + b_2^2\bigr)}{4} = cb_0.$$

Квадратное уравнение для нахождения c приводится к виду

$$c^2 - \frac{4b_0}{b_1^2+b_2^2}c + \frac{4}{b_1^2+b_2^2} = 0$$

и имеет два корня $c_{1,2} = 2\frac{b_0 \pm \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}}{b_1^2+b_2^2}$, которые являются вещественными положительными при условии (10). Величины c_1 и c_2 определяют два значения A_{21} и A_{22} для $A_2 = \alpha_2 + i\beta_2$. Именно,

$$A_{21} = \frac{c_1b_1 + ic_1b_2}{2} = \frac{b_1+ib_2}{b_1^2+b_2^2}\big(b_0 + \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}\big)$$

$$\Rightarrow |A_{21}| = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} > \frac{b_0}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} > 1$$

и

$$A_{22} = \frac{b_1+ib_2}{b_1^2+b_2^2}\big(b_0 - \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}\big) = \frac{b_1+ib_2}{b_0+\sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}} = \frac{\big(b_1+ib_2\big)^2}{\big(b_1^2+b_2^2\big)A_{21}}$$

$$\Rightarrow |A_{22}| = \frac{1}{|A_{21}|} < 1.$$

Так как $A_{21}\overline{A_{22}} = 1$, полюсы $-A_{21}$ и $-A_{22}$ являются взаимно симметричными точками относительно окружности $|z| = 1$. Уравнение (14) разрешаем относительно β_0 (если $\alpha_2 \neq 0$) или относительно α_0 (если $\beta_2 \neq 0$). Проанализируем дальнейшие действия в случае

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0\beta_2}{\alpha_2} \tag{15}$$

(второй вариант анализируется аналогично). Подставим (15) в уравнения системы (13) и получим из (13) систему трех уравнений с тремя неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$:

$$\begin{cases} \alpha_0\big(\alpha_2 + \beta_2^2/\alpha_2\big) + \alpha_1 + \beta_1 \cdot 0 = ca_0, \\ \alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = ca_1, \\ \alpha_0\beta_2/\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = ca_2. \end{cases}$$

Ее определитель равен

$$-\big(\alpha_2^2+\beta_2^2\big)^2/\alpha_2 - \big(-\alpha_2 - \beta_2^2/\alpha_2\big) = \frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{\alpha_2}\big(1-\alpha_2^2-\beta_2^2\big) \neq 0$$

при $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = |A_2|^2 \neq 1$ и $\neq 0$. Поэтому последняя система имеет по одному единственному решению при каждом c_1 и c_2. Обозначим эти решения следующим образом:

$$\alpha_{01}, \alpha_{11}, \beta_{11} \quad \text{при } c_1 = 2\frac{b_0 + \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}}{b_1^2+b_2^2},$$

$$\alpha_{02}, \alpha_{12}, \beta_{12} \quad \text{при } c_2 = 2\frac{b_0 - \sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}}{b_1^2+b_2^2}.$$

При найденных параметрах получим два вида дробно-линейных функций:

$$f_1(z) = \frac{(\alpha_{11}+i\beta_{11})z + \alpha_{01}(1+ib_1/b_2)}{z + (b_1+ib_2)\big(b_0+\sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}\big)/\big(b_1^2+b_2^2\big)} = \frac{A_{11}z + A_{01}}{z + A_{21}}, \quad |A_{21}| > 1,$$

$$f_2(z)=\frac{(\alpha_{12}+i\beta_{12})z+\alpha_{02}(1+ib_1/b_2)}{z+(b_1+ib_2)\big(b_0-\sqrt{b_0^2-b_1^2-b_2^2}\big)/\big(b_1^2+b_2^2\big)}=\frac{A_{12}z+A_{02}}{z+A_{22}},\quad |A_{22}|<1.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Непрерывность функции $u(\theta)=(a_0+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)/(b_0+b_1\cos\theta+b_2\sin\theta)$ на отрезке $[0,2\pi]$ при условии $b_0\neq 0$ равносильна условию $b_0+b_1\cos\theta+b_2\sin\theta\neq 0$, $\theta\in[0,2\pi]$. Считая $b_0>0$ (при $b_0<0$ умножим числитель и знаменатель дроби для $u(\theta)$ на (-1)), преобразуем знаменатель с введением вспомогательного угла φ:

$$b_0+b_1\cos\theta+b_2\sin\theta=b_0+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\cos\theta+\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\sin\theta\right)$$
$$=b_0+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sin(\varphi+\theta).$$

Тогда

$$b_0+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\sin(\varphi+\theta)\neq 0\Leftrightarrow\left|-\frac{b_0}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\right|=\frac{b_0}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}>1\Leftrightarrow b_0>\sqrt{b_1^2+b_2^2}.$$

Если $b_0=0$, то $u(\theta)$ теряет непрерывность, так как на отрезке $[0,2\pi]$ существуют два значения $\theta_1,\theta_2=\theta_1+\pi$, при которых $b_1\cos\theta+b_2\sin\theta=0$. Таким образом, $u(\theta)$ непрерывна в двух случаях:

1) $b_0>\sqrt{b_1^2+b_2^2}>0$;

2) $b_1=b_2=0$, $b_0\neq 0$.

Проанализируем подробно случай 2, считая без ограничения общности $b_0=1$. Тогда

$$u(\theta)=\operatorname{Re}f(e^{i\theta})=a_0+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta\Leftrightarrow f(e^{i\theta})=(A_1z+A_0)|_{z=e^{i\theta}},$$

где $\operatorname{Re}A_0=a_0$, $\operatorname{Re}A_1=a_1$, $\operatorname{Im}A_1=-a_2$. Эта эквивалентность связана с частным случаем дробно-линейных функций $(C_1z+C_0)/(C_3z+C_2)$ при $C_3=0$. (Отметим, что в основном варианте леммы $C_3\neq 0$, поэтому предполагали без потери общности, что $C_3=1$.) Если в (8) $A_2=0$, то получится эквивалентность функций с тремя вещественными параметрами, а четвертый параметр можно оставить произвольным. Получим

$$u(\theta)=\operatorname{Re}f(e^{i\theta})=a_0+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta\Leftrightarrow f(e^{i\theta})=\left.\left(A_1+\frac{A_0}{z}\right)\right|_{z=e^{i\theta}}$$
$$=\alpha_1+i\beta_1+(\alpha_0+i\beta_0)e^{-i\theta},$$

где $\alpha_1=a_0$, $\alpha_0=a_1$, $\beta_0=a_2$.

Замечание 2. Лемма позволяет записать две формулы в виде частных случаев для интегралов Шварца в круге $|z|<1$ и в области $|z|>1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a_0+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta}{b_0+b_1\cos\theta+b_2\sin\theta}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta=\frac{A_1z+A_0}{z+A_2}-i\operatorname{Im}(A_0\overline{A_2}),$$
$$|A_2|>1,\ |z|<1,$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a_0+a_1\cos\theta+a_2\sin\theta}{b_0+b_1\cos\theta+b_2\sin\theta}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta=\frac{A_1z+A_0}{z+A_2}-i\operatorname{Im}(A_1),$$
$$0<|A_2|<1,\ |z|>1.$$

Также две формулы для интегралов Шварца получаются при $b_1 = b_2 = 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(a_0 + a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta = a_0 + A_1 z, \quad |z| < 1,$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(a_0 + a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta = \frac{A_1}{z} + a_0, \quad |z| > 1.$$

Следствие. *Шесть вещественных параметров, входящих в функцию*

$$f(a+\rho e^{i\theta}) = \frac{B_1 z + B_0}{z + B_2}\bigg|_{z=a+\rho e^{i\theta}}$$

с предположением $|B_2 + a| > \rho$ *или* $|B_2 + a| < \rho$*, взаимно однозначно соответствуют шести параметрам, входящим в функцию*

$$u(\theta) = \operatorname{Re} f(a+\rho e^{i\theta}) = \frac{c_0 + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta}{d_0 + d_1\cos\theta + d_2\sin\theta}, \quad d_0 > \sqrt{d_1^2 + d_2^2} > 0.$$

Доказательство. Применим преобразование $(z-a)/\rho = \zeta$ и получим равенство двух дробно-линейных функций, зависящих от z и от ζ:

$$\frac{B_1 z + B_0}{z + B_2} = \frac{B_1\rho\zeta + B_1 a + B_0}{\rho\zeta + a + B_2} = \frac{B_1\zeta + (B_1 a + B_0)/\rho}{\zeta + (a + B_2)/\rho} = \frac{A_1\zeta + A_0}{\zeta + A_2}$$

с обозначениями

$$A_1 = B_1, \quad A_0 = \frac{B_1 a + B_0}{\rho}, \quad A_2 = \frac{a + B_2}{\rho}. \tag{16}$$

Применив лемму, установим эквивалентность

$$\frac{c_0 + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta}{d_0 + d_1\cos\theta + d_2\sin\theta} \Leftrightarrow \frac{A_1\zeta + A_0}{\zeta + A_2} = \frac{B_1 z + B_0}{z + B_2}.$$

При этом коэффициенты B_k, $k = 0, 1, 2$, определяются из системы (16)

$$B_1 = A_1, \quad B_0 = \rho A_0 - aA_1, \quad B_2 = \rho A_2 - a, \quad |B_2 + a| = \rho|A_2| \neq \rho. \tag{17}$$

Два значения B_{21} и B_{22} получаются из двух значений A_{21} и A_{22}, обладающих свойством $(-A_{21})(-\overline{A_{22}}) = 1$. Поэтому $(-B_{21} - a)(-\overline{B_{22}} - \overline{a}) = (-\rho A_{21})(-\rho\overline{A_{22}}) = \rho^2$, т. е. точки $-B_{21}$ и $-B_{22}$ являются взаимно симметричными относительно окружности $|z - a| = \rho$. Одну из этих точек назовем *истинным полюсом*, вторую — *возможным полюсом.*

5. Случай кольца и произвольной круговой многосвязной области

Теорема 2. *Пусть граничными условиями для* $\operatorname{Re} f(z)$ *в кольце* $q < |z| < 1$ *являются две дроби*

$$\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = \frac{a_0 + a_1\cos\theta + a_2\sin\theta}{b_0 + b_1\cos\theta + b_2\sin\theta} \quad \left(b_0 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} > 0\right),$$

$$\operatorname{Re} f(qe^{i\theta}) = \frac{g_0 + g_1\cos\theta + g_2\sin\theta}{d_0 + d_1\cos\theta + d_2\sin\theta} \quad \left(d_0 > \sqrt{d_1^2 + d_2^2} > 0\right).$$

Чтобы при этом функция $f(z)$ была дробно-линейной:

$$f(z) = \frac{A_1 z + A_0}{z + A_2}, \quad A_k = \alpha_k + i\beta_k,\ k = 0, 1, 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\{a_k, b_k\}$ и $\{g_k, d_k\}$, $k = 0, 1, 2$, (определяемые с точностью до умножения на произвольный вещественный параметр $c \neq 0$) были связаны тринадцатью формулами вида (17) (шесть вещественных равенств) и (12)–(14) (еще семь вещественных равенств), из которых нужно исключить шесть параметров $\{\alpha_k + i\beta_k\}$, $k = 0, 1, 2$.

Доказательство. Разрешимость системы (12)–(14) доказана в лемме. Получили функцию $f_1(z) = (A_{11}z + A_{01})/(z + A_{21})$ с истинным полюсом $-A_{21}$. Возможный полюс $-A_{22}$ можно сделать истинным, если $|A_{22}| < q$. В этом случае допустимой функцией будет $f_2(z) = (A_{12}z + A_{02})/(z + A_{22})$. Система вида (12), (13) для условия с граничной окружностью $|z| = q$ запишется в таком виде:

$$q^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = hd_0, \quad 2q\alpha_2 = hd_1, \quad 2q\beta_2 = hd_2, \tag{18}$$

$$\alpha_1 q^2 + \alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2 = hg_0, \quad q(\alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = hg_1, \quad q(\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = hg_2.$$

Квадратное уравнение для определения h приводит к двум корням

$$h_{1,2} = \frac{2q^2\left(d_0 \pm \sqrt{d_0^2 - d_1^2 - d_2^2}\right)}{d_1^2 + d_2^2},$$

которые порождают два полюса $-B_{21}$ и $-B_{22}$, причем $B_{2k} = h_k(d_1 + id_2)/2q$, $k = 1, 2$.

В случае $f_1(z) = (A_{11}z + A_{01})/(z + A_{21})$ условия разрешимости (18) должны привести к истинному полюсу $-B_{21} = -A_{21}$ и к возможному полюсу $-B_{22}$. В случае $f_2(z) = (A_{12}z + A_{02})/(z + A_{22})$ при $|A_{22}| < q$ истинным полюсом, связанным со второй системой, должен быть полюс $-B_{22} = -A_{22}$.

Если истинные полюсы порождаются системой (18), то возможны еще два решения задачи Шварца. Именно, $f_3(z) = (B_{12}z + B_{02})/(z + B_{22})$ с условиями разрешимости в виде системы (12), (13) и с истинным полюсом $-A_{22} = -B_{22}$; $f_4(z) = (B_{11}z + B_{01})/(z + B_{21})$, если $|B_{21}| > 1$, с условиями разрешимости (12), (13) и с истинным полюсом $-A_{21} = -B_{21}$. Выбор единственного решения задачи Шварца производится из набора дробно-линейных функций $\{f_k(z)\}$, $k = 1, 2, 3, 4$, в количестве $N_2 \leq 4$. Теорема доказана.

План пересчета количества дробно-линейных функций для выбора решения задачи Шварца из теоремы 2 можно применить к случаю многосвязной круговой области D_{n+1} с порядком связности $n + 1 > 2$. Этим количеством будет $N_{n+1} \leq 2(n + 1)$, для чего достаточно вспомнить, как будут вести себя истинные и возможные полюсы для каждого граничного условия.

Внешний граничный контур для области D_{n+1} будет окружностью $|z| = 1$, а внутренними граничными контурами предполагаются окружности $|z - \tilde{a}_m| = q_m$. В это обозначение введем и внешний контур, для которого $\tilde{a}_0 = 0$, $q_0 = 1$. Условие

$$\operatorname{Re} f(\tilde{a}_m + q_m e^{i\theta}) = \frac{a_{0m} + a_{1m}\cos\theta + a_{2m}\sin\theta}{b_{0m} + b_{1m}\cos\theta + b_{2m}\sin\theta}, \quad b_{0m} > \sqrt{b_{1m}^2 + b_{2m}^2} > 0, \tag{19}$$

приведет к дробно-линейной функции $(A_{1m}z + A_{0m})/(z + A_{2m})$ с полюсами $-A_{2m}^1$ и $-A_{2m}^2$. Один из них будет истинным наверняка, а второй окажется истинным, если он не принадлежит замкнутой области $\overline{D}_{n+1}$. Поэтому каждое граничное условие (19) порождает не более двух дробно-линейных функций, остальные граничные условия будут давать $6n$ вещественных условий разрешимости. Всего имеется $n{+}1$ граничных условий, значит, число возможных дробно-линейных функций не превысит $2(n+1)$. Тем самым обоснована

Теорема 3. *Задача Шварца в круговой $(n{+}1)$-связной области будет иметь решение в виде дробно-линейной функции, если выполняются условия* (19), $m = 0, 1, \ldots, n$, *причем по одному из этих условий определяются коэффициенты дробно-линейной функции, а остальные условия должны удовлетворять этой дробно-линейной функции, что дает $6n$ вещественных условий разрешимости. Всего таких дробно-линейных функций будет не больше $2(n+1)$.*

Если условия разрешимости не выполняются для каждой возможной дробно-линейной функции
$$f_m(z) = \frac{A_{1m}z + A_{0m}}{z + A_{2m}},$$
то решение задачи Шварца с граничными данными (19) будет иметь вид $(A_{1m}z + A_{0m})/(z + A_{2m}) + F_m(z)$, причем $F_m(z)$ в случае кольца $q < |z| < 1$ будет рядом Лорана вида
$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{|t|=q}\left(\operatorname{Re} f(qe^{i\theta}) - \operatorname{Re}\frac{A_{11}qe^{i\theta} + A_{01}}{qe^{i\theta} + A_{21}}\right)\frac{t + zq^{2k}}{t - zq^{2k}}\frac{dt}{t},$$
а в случае области D_{n+1} — решением дополнительной задачи Шварца с нулевым граничным условием на одной граничной окружности, с которой связана функция $f_m(z)$.

6. Приложения к обратным краевым задачам

Обратные краевые задачи в многосвязных областях изложены в [6, гл. 5; 7, гл. 2]. Аналогичная задача для эллиптической системы уравнений поставлена и исследована В. Н. Монаховым [8, гл. VII]. На основе теоремы 3 можно записать условия на плотности интегралов, при которых искомые области круговые. В качестве примера рассмотрим внутреннюю обратную краевую задачу по параметру $x = \operatorname{Re} z$.

Требуется найти замкнутый контур L_z, ограничивающий конечную односвязную область D_z, на котором заданы граничные значения функции $w(z)$ в виде
$$w = w_1(x) = \varphi_1(x) + i\psi_1(x), \quad w = w_2(x) = \varphi_2(x) + i\psi_2(x), \quad 0 \le x = \operatorname{Re} z \le a, \tag{20}$$
причем $w_1(0) = w_2(0)$, $w_1(a) = w_2(a)$; φ_j, ψ_j $(j = 1, 2)$ — однозначные функции, относящиеся к различным сторонам отрезка $0 \le x \le a$. Будем также считать, что эти функции имеют первые производные, которые не обращаются одновременно в нуль и удовлетворяют условию Гёльдера. Соотношения (20) определяют в плоскости w замкнутый контур L_w, ограничивающий конечную односвязную область D_w.

Пусть $w = \omega(\zeta)$ — конформное отображение единичного круга D_ζ на область D_w, удовлетворяющее условиям нормировки
$$w_1(0) = \omega(1), \quad w_1(a/2) = \omega(i), \quad w_1(a) = \omega(-1).$$

Пользуясь равенством $w(x) = \omega(e^{i\theta})$, выражающим соответствие точек контуров L_z и $L_\zeta = \{|\zeta| = 1\}$, найдем зависимость $x = x(\theta)$. Таким образом, пришли к задаче Шварца о нахождении аналитической в круге D_ζ функции $z(\zeta)$ по известным краевым значениям $\operatorname{Re} z(e^{i\theta}) = x(\theta)$. Следовательно,

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\theta + iC. \tag{21}$$

Аналогичная формула получена В. Н. Монаховым при решении задачи с условиями (20) для эллиптической системы уравнений [8, с. 357].

Критерий того, что формула (21) приводит к кругу в качестве области D_z, содержится в [2]. Для обобщения этого критерия приведем кратко исследование аналогичной задачи в $(n+1)$-связном случае.

Требуется найти $(n+1)$-связную конечную область D_z с границей $\partial D_z = \bigcup\limits_{k=0}^{n} L_z^k$ и аналитическую в D_z функцию $w = f(z)$, если

$$f(z)|_{z \in L_z^k} = \varphi_k(x) + i\psi_k(x), \quad a_k \le x \le b_k,\ k = \overline{0,n}.$$

Функции $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ двузначны на отрезке $[a_k, b_k]$ (как и в односвязном случае) и определяют в плоскости w границу $(n+1)$-связной области D_w. Отобразим D_w с помощью функции $\zeta = \zeta(w)$ (согласно теореме Кебе [9, с. 235]) на $(n+1)$-связную круговую область D_ζ с границей $\partial D_\zeta = \bigcup\limits_{k=0}^{n} L_\zeta^k$, где $L_\zeta^0 = \{|\zeta| = 1\}$, $L_\zeta^k = \{|\zeta - \widetilde{a_k}| = q_k\}$, $k = \overline{1,n}$. Из сопоставления граничных значений на L_z^k и L_ζ^k определим функции $x_k(\theta) = \operatorname{Re} z(\zeta)|_{\zeta \in L_\zeta^k}$ и согласно теореме 3 получим такое утверждение.

Теорема 4. *D_z будет $(n+1)$-связной круговой областью тогда и только тогда, когда*

$$x_m(\theta) = \frac{a_{0m} + a_{1m}\cos\theta + a_{2m}\sin\theta}{b_{0m} + b_{1m}\cos\theta + b_{2m}\sin\theta}, \quad b_{0m} > \sqrt{b_{1m}^2 + b_{2m}^2} > 0,\ m = \overline{0,n},$$

с выполнением $6n$ условий разрешимости, аналогичных (18).

Авторы благодарны рецензенту за замечания по улучшению качества статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пыхтеев Г. Н.* Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980.
2. *Абубакиров Н. Р., Аксентьев Л. А.* Явные формы интеграла Шварца и их применение в обратных краевых задачах // Изв. вузов. Математика. 2013. № 10. С. 55–62.
3. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
4. *Аксентьев Л. А.* Применение метода симметрии в конформных отображениях и краевых задачах. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1993.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2001. Т. 3.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
8. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.

9. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 11 февраля 2014 г.

Абубакиров Наиль Ренатович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Лобачевского,
кафедра общей математики,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
abunail@mail.ru

Аксентьев Леонид Александрович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Лобачевского,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
Leonid.Aksentev@kpfu.ru