*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1*

*УДК 512.54*

# НОВАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

**М. Ф. Гасемабади,**
**А. Иранманеш, Ф. Мавадатпур**

**Аннотация.** Пусть $G$ — конечная группа. Элемент группы $G$, обращающийся в нуль, — это элемент $g \in G$ такой, что $\chi(g) = 0$ для некоторого неприводимого комплексного характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ группы $G$. Пусть $\mathrm{Vo}(G)$ — множество порядков элементов группы $G$, обращающихся в нуль. Конечная группа $G$ называется VCP-*группой*, если каждый элемент в $\mathrm{Vo}(G)$ есть степень простого числа. Исследована новая характеризация всех конечных неабелевых простых VCP-групп, связанная с множеством $\mathrm{Vo}(G)$. Показано, что если $G$ — конечная группа и $M$ — конечная неабелева простая VCP-группа такая, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ и $|G| = |M|$, то $G \cong M$.

**Ключевые слова:** простая конечная группа, нули характеров.

## 1. Введение

Пусть $G$ — конечная группа. *Элемент* группы $G$, *обращающийся в нуль*, — это такой элемент $g \in G$, что $\chi(g) = 0$ для некоторого неприводимого комплексного характера $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ группы $G$. Обозначим символом $\mathrm{Van}(G)$ множество элементов группы $G$, обращающихся в нуль, а символом $\mathrm{Vo}(G)$ — множество порядков элементов в $\mathrm{Van}(G)$. Согласно [1, 2] множество $\mathrm{Vo}(G)$ может дать некоторую информацию о структуре конечной группы $G$. Например, теорема C из [3] как усиление следствия 3 из [2] утверждает, что если $p$ — простой делитель $|G|$ и в $G$ нет элементов, обращающихся в нуль, порядка, делящегося на $p$, то в $G$ имеется нормальная силовская $p$-подгруппа. Также в [4] показано, что если $G$ — конечная группа такая, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(A_5)$, то $G \cong A_5$, т. е. знакопеременная группа $A_5$ характеризуется множеством порядков своих элементов, обращающихся в нуль. В связи с этим результатом можно задать следующий

**Вопрос.** *Верно ли, что все конечные неабелевы простые группы характеризуемы множеством порядков элементов, обращающихся в нуль?*

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Например, для простой линейной группы $L_3(5)$ имеем $\mathrm{Vo}(L_3(5)) = \mathrm{Vo}(\mathrm{Aut}(L_3(5)))$, но $L_3(5) \not\cong \mathrm{Aut}(L_3(5))$, так как $|L_3(5)| \neq |\mathrm{Aut}(L_3(5))|$. Однако, исследовав группы одного и того же порядка, можем выдвинуть следующую гипотезу.

---

Работа частично поддержана Центром мастерства в области алгебраических гиперструктур и их приложений Университета Тарбиат Модарес (CEAHA). Также авторы были частично поддержаны Иранским национальным научным фондом (INSF) (код проекта 91058621).

**Гипотеза.** *Пусть $G$ — конечная группа, и пусть $M$ — конечная неабелева простая группа. Если* $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ *и* $|G| = |M|$, *то* $G \cong M$.

На самом деле идея добавления условия, что все группы имеют один и тот же порядок, восходит к известной гипотезе Ши, которая звучит следующим образом. *Спектром* $\omega(G)$ *конечной группы* $G$ называется множество порядков элементов группы $G$. Гипотеза Ши (вопрос 12.39 в [5]) утверждает, что всякая конечная простая группа однозначно определяется своим спектром и порядком в классе всех групп.

**Гипотеза Ши.** *Пусть $G$ — конечная группа, и пусть $M$ — конечная простая группа. Тогда* $G \cong M$ *тогда и только тогда, когда* $|G| = |M|$ *и* $\omega(G) = \omega(M)$.

В ряде статей доказано, что эта гипотеза верна для большинства конечных простых групп, более того, в [6] показано, что гипотеза Ши верна для всех конечных простых групп.

Конечная группа $G$ называется VCP-*группой*, если каждый элемент множества $\mathrm{Vo}(G)$ есть степень простого числа. Ввиду [4, лемма 2.4] и того факта, что $\mathrm{Vo}(A_7) = \{3, 4, 5, 7\}$, конечная неабелева простая VCP-группа изоморфна одной из групп $L_2(q)$, где $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $A_7$, $Sz(8)$ и $Sz(32)$. Имеющийся результат для знакопеременной группы $A_5$ в [4] стал мотивацией для доказательства того, что наша гипотеза верна для всех конечных неабелевых простых VCP-групп. Основной целью работы является доказательство следующей теоремы.

**Основная теорема.** *Пусть $G$ — конечная группа, и пусть $M$ — одна из конечных простых групп* $L_2(q)$, *где* $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $A_7$, $Sz(8)$ *и* $Sz(32)$. *Если* $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ *и* $|G| = |M|$, *то* $G \cong M$.

## 2. Обозначения и предварительные результаты

В настоящей работе будем использовать следующие обозначения: $(m, n)$ и $[m, n]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел $m$ и $n$ соответственно. Для конечной группы $G$ символом $\pi(G)$ будет обозначаться множество всех простых делителей порядка $|G|$. Пусть также $\mathrm{Sol}(G)$ — разрешимый радикал группы $G$. Все обозначения, используемые ниже без объяснения, стандартны и могут быть найдены, например, в [7].

Структура конечных неразрешимых VCP-групп была найдена в [4, теорема A]. Поскольку $\mathrm{Vo}(A_7) = \{3, 4, 5, 7\}$, очевидно, что простая группа $A_7$ в этой теореме пропущена. Сформулируем исправленную версию этой теоремы, которую будем использовать в доказательстве основной теоремы. Заметим, что в этой теореме $M_{10}$ обозначает единственную VCP-подгруппу индекса 2 в группе $\mathrm{Aut}(L_2(9))$, а под CP-группой имеем в виду конечную группу $G$ такую, что каждый элемент в $\mathrm{Vo}(G)$ — простое число.

**Теорема 2.1.** *Пусть $G$ — конечная неразрешимая* VCP-*группа. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $\mathrm{Sol}(G) = 1$, *то группа $G$ изоморфна одной из следующих групп:*

$$L_2(q),\ q = 5, 7, 8, 9, 17, \quad L_3(4), Sz(8), Sz(32), A_7, M_{10}.$$

2. *Предположим, что* $\mathrm{Sol}(G) > 1$. *Пусть для некоторого простого числа $p$ группа* $N := O^p(\mathrm{Sol}(G))$ *такова, что* $\mathrm{Sol}(G)/N > 1$. *Тогда либо* $G/\mathrm{Sol}(G) \cong A_7$, *либо* $p = 2$, $G/N$ — CP-*группа и выполнено одно из следующих утверждений:*

(a) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *элементарная абелева, а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна группе* $L_2(5)$;

(b) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *абелева, а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна* $L_2(8)$;

(c) *группа* $\mathrm{Sol}(G)/N$ *нильпотентна ступени не выше* 6, *а группа* $G/\mathrm{Sol}(G)$ *изоморфна* $Sz(8)$ *или* $Sz(32)$.

Одним из ключевых утверждений для доказательства основной теоремы является результат Долфи и др. [3] об «обращающемся в нуль» графе простых чисел конечной группы и его связи с графом Грюнберга — Кегеля. По этой причине напомним требуемые определения. Для конечного множества положительных целых чисел $X$ *граф простых чисел* $\Pi(X)$ определяется как простой ненаправленный граф, вершинами которого являются простые числа $p$ такие, что существует элемент множества $X$, делящийся на $p$, и две различные вершины $p, q$ являются смежными тогда и только тогда, когда существует элемент из $X$, делящийся на $pq$. Для конечной группы $G$ граф $\Pi(\omega(G))$, который обозначаем символом $GK(G)$, также известен под названием *графа Грюнберга — Кегеля группы* $G$. Граф простых чисел $\Pi(\mathrm{Vo}(G))$, который в данной статье обозначается через $\Gamma(G)$, называется *обращающимся в нуль* графом простых чисел группы $G$. Следующая лемма описывает некоторые свойства обращающегося в нуль графа простых чисел конечной группы и его связь с графом Грюнберга — Кегеля. Отметим, что $n(\mathscr{G})$ означает число связных компонент графа $\mathscr{G}$.

**Лемма 2.2** [3, 8]. *Пусть* $G$ *— конечная группа.*

(1) *Если группа* $G$ *разрешима, то граф* $\Gamma(G)$ *имеет не более двух связных компонент.*

(2) *Если группа* $G$ *неразрешима и граф* $\Gamma(G)$ *несвязен, то* $G$ *имеет единственный неабелев композиционный фактор* $S$ *и* $n(\Gamma(G)) \leq n(GK(S))$, *если только* $G$ *не изоморфна* $A_7$.

Пусть $p$ — простое число. Говорят, что характер $\chi$ из $\mathrm{Irr}(G)$ *имеет нулевой* $p$*-дефект*, если $p$ не делит $|G|/\chi(1)$. Согласно фундаментальному результату Брауэра [9, теорема 8.17] если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ имеет нулевой $p$-дефект, то для каждого элемента $g \in G$ такого, что $p$ делит $o(g)$, имеем $\chi(g) = 0$. Следующая лемма показывает, что очень часто неабелева простая группа имеет неприводимые характеры нулевого $p$-дефекта для каждого простого $p$.

**Лемма 2.3** [2, предложение 2.1]. *Пусть* $M$ *— неабелева простая группа, и пусть* $p$ *— простое число. Если группа* $M$ *лиевского типа или* $p \geq 5$, *то существует характер* $\chi \in \mathrm{Irr}(M)$ *нулевого* $p$*-дефекта.*

В следующей лемме собраны некоторые факты, связанные с неприводимыми характерами нулевого $p$-дефекта нормальной подгруппы или фактор-группы.

**Лемма 2.4.** *Пусть* $G$ *— конечная группа, и пусть* $N$ *— нормальная подгруппа в* $G$.

(1) *Если* $p \in \pi(N)$ *и* $N$ *имеет неприводимый характер нулевого* $p$*-дефекта, то всякий элемент в* $N$ *порядка, делящегося на* $p$, *является элементом группы* $G$, *обращающимся в нуль.*

(2) *Если* $p \in \pi(G/N)$, $(|N|, p) = 1$ *и у группы* $G/N$ *есть неприводимый характер нулевого* $p$*-дефекта, то* $G$ *также имеет неприводимый характер нулевого* $p$*-дефекта.*

Доказательство. Утверждение (1) есть лемма 2.7 из [3]. Далее, поскольку неприводимые характеры группы $G/N$ можно рассматривать как неприводимые характеры группы $G$, ядро которых содержит $N$, доказательство утверждения (2) получается непосредственно. $\square$

Следующая лемма, которую легко доказать с использованием таблицы характеров прямого произведения групп и строения неприводимых характеров фактор-группы, необходима для доказательства основной теоремы.

**Лемма 2.5.** *Пусть $G$ — конечная группа.*

(1) *Если $G = H \times K$, то* $\mathrm{Vo}(G) = \{[m,n] \mid m \in \mathrm{Vo}(H),\ n \in \omega(K)\} \cup \{[m,n] \mid m \in \omega(H),\ n \in \mathrm{Vo}(K)\}$.

(2) *Если $N$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $m \in \mathrm{Vo}(G/N)$, то существует целое число $n$ такое, что $mn \in \mathrm{Vo}(G)$.*

## 3. Доказательство основной теоремы

Известно, что $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$ и $|G| = |M|$, где $M$ — одна из простых групп $L_2(q)$, $q \in \{5,7,8,9,17\}$, $L_3(4)$, $A_7$, $Sz(8)$ и $Sz(32)$. Используя [7], соберем порядки $|M|$ и $\mathrm{Vo}(M)$ в табл. 1.

**Таблица 1**

| $M$ | $\mathrm{Vo}(M)$ | $\lvert M\rvert$ |
|---|---|---|
| $L_2(5)$ | $\{2,3,5\}$ | $2^2.3.5$ |
| $L_2(7)$ | $\{2,3,4,7\}$ | $2^3.3.7$ |
| $L_2(8)$ | $\{2,3,7,9\}$ | $2^3.3^2.7$ |
| $L_2(9)$ | $\{2,3,4,5\}$ | $2^3.3^2.5$ |
| $L_2(17)$ | $\{2,3,4,8,9,17\}$ | $2^4.3^2.17$ |
| $L_3(4)$ | $\{2,3,4,5,7\}$ | $2^6.3^2.5.7$ |
| $A_7$ | $\{3,4,5,7\}$ | $2^3.3^2.5.7$ |
| $Sz(8)$ | $\{2,4,5,7,13\}$ | $2^6.5.7.13$ |
| $Sz(32)$ | $\{2,4,5,25,31,41\}$ | $2^{10}.5^2.31.41$ |

В силу следствия 4.1 из [4] и леммы 2.2(1) группа $M = L_2(5)$ характеризуется множеством $\mathrm{Vo}(M)$ и, следовательно, $G \cong M$. Далее, если $M = L_3(4)$, то $n(\Gamma(G)) = 4$, и потому из леммы 2.2 следует, что $G$ имеет единственный неабелев композиционный фактор $S$ такой, что

$$n(GK(S)) \geq n(\Gamma(G)) = 4. \tag{3.1}$$

Таким образом, $|\pi(S)| \geq 4$, и так как $S$ — простая группа и $|S|$ делит $|G|$, ввиду [10] $S$ изоморфна одной из групп $A_7, A_8, L_3(4)$. Но $\omega(A_7) = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $\omega(A_8) = \omega(A_7) \cup \{15\}$, откуда $n(GK(A_8)) < n(GK(A_7)) = 3$. Тем самым в силу (3.1) можем заключить, что $S \cong L_3(4)$, откуда $G \cong L_3(4)$.

Для остальных случаев будем использовать теорему 2.1. Так как $\mathrm{Vo}(G) = \mathrm{Vo}(M)$, из табл. 1 имеем $n(\Gamma(G)) \geq 3$ и из леммы 2.2(1) следует, что $G$ — неразрешимая VCP-группа. Пусть $K = \mathrm{Sol}(G)$. Если $K = 1$, то ввиду $|G| = |M|$ легко заключаем, что $G \cong M$. Поэтому для завершения доказательства основной теоремы достаточно получить противоречие для случая $K > 1$, где $G/K \cong L_2(5), L_2(8), A_7, Sz(8), Sz(32)$. Пусть $M = L_2(7)$. Поскольку $\{5,9\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, в силу $\mathrm{Vo}(L_2(7))$ и леммы 2.5(2) легко приходим к противоречию. Тем же способом легко убеждаемся, что если $M$ — одна из групп $L_2(8)$, $L_2(17)$, $Sz(8)$,

$Sz(32)$, то $G/K \cong M$, и потому из $|G| = |M|$ вытекает, что $K = 1$; противоречие. Для удобства опускаем детали. Таким образом, остается рассмотреть случаи $M = L_2(9)$ и $M = A_7$. Разберем их отдельно.

Случай 1. Пусть $M = L_2(9)$. Если $G/K \ncong L_2(5)$, то $\{7, 31\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, и лемма 2.5(2) приводит к противоречию. Поэтому достаточно рассмотреть случай $G/K \cong L_2(5)$. Поскольку $|G| = |M|$, имеем $|K| = 6$, а значит, $K$ эквивалентно $S_3$ или $\mathbb{Z}_6$. Так как $C_G(K)K/K \trianglelefteq G/K$ и $G/K$ — неабелева простая группа, заключаем, что $C_G(K)K = K$ или $C_G(K)K = G$. В первом случае $C_G(K) \leq K$, и потому

$$60 = |G/K| \mid |G/C_G(K)| \mid |\operatorname{Aut}(K)|,$$

что приводит к противоречию, ибо легко убедиться, что порядок группы автоморфизмов группы порядка 6 не делится на 5. Поэтому $C_G(K)K = G$, откуда

$$C_G(K)/Z(K) \cong C_G(K)K/K \cong G/K \cong L_2(5).$$

Если $K \cong S_3$, то $Z(K) = C_G(K) \cap K = 1$ и, следовательно, $G \cong S_3 \times L_2(5)$. Так как $2 \in \omega(S_3)$ и $5 \in \mathrm{Vo}(L_2(5))$, из леммы 2.5(1) следует, что $10 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие с тем, что $G$ — VCP-группа. Поэтому $K \cong \mathbb{Z}_6$ и группа $K$ абелева. Таким образом, $G = C_G(K)$, так что $G$ — центральное расширение $K$ с помощью группы $L_2(5)$. Пусть $P$ — силовская 2-подгруппа группы $K$. Тем самым $P \triangleleft G$ и $\frac{G/P}{K/P} \cong L_2(5)$. Легко заключаем, что группа $G/P$ есть центральное расширение группы $K/P$ с помощью $L_2(5)$. Так как порядок множителя Шура группы $L_2(5)$ равен 2 и $|K/P| = 3$, отсюда следует, что расширение расщепляемое, а значит, $G/P \cong K/P \times L_2(5)$. Из леммы 2.5 вытекает, что множество $\mathrm{Vo}(G)$ содержит число, кратное 6; противоречие.

Случай 2. Пусть $M = A_7$. Если $G/K \cong L_2(8), Sz(8), Sz(32)$, то поскольку $\{9, 13, 31\} \cap \mathrm{Vo}(G/K) \neq \varnothing$, по лемме 2.5(2) получаем противоречие. Если $G/K \cong L_2(5)$, то $|K| = 42$ и аналогично предыдущему случаю заключаем, что $C_G(K)K = K$ или $C_G(K)K = G$. Так как $|\operatorname{Aut}(K)|$ не делится на 5, случай $C_G(K)K = K$ невозможен. Таким образом, $G = C_G(K)K$, откуда $C_G(K)/Z(K) \cong G/K \cong L_2(5)$, и так как $Z(K) \leq Z(C_G(K))$, заключаем, что $C_G(K)$ — центральное расширение группы $Z(K)$ с помощью $L_2(5)$. Если это расширение расщепляемо, то $C_G(K) = Z(K) \times T$, где $T \cong L_2(5)$. В силу $T \leq G$, $T \cap K \leq T \cap Z(K) = 1$ и $|G| = |TK|$ группа $G$ — расщепляемое расширение группы $K$ с помощью $L_2(5)$. Поскольку $|\operatorname{Aut}(K)|$ не делится на 60, легко видеть, что $G = K \times L_2(5)$. Так как $2 \in \omega(K)$ и $5 \in \mathrm{Vo}(L_2(5))$, из леммы 2.5(1) следует, что $10 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие. Поэтому $C_G(K)$ — нерасщепляемое расширение группы $Z(K)$ с помощью $L_2(5)$. Ввиду центральности этого расширения с учетом порядка множителя Шура группы $L_2(5)$ получаем, что $|Z(K)| \in \{1, 2, 6, 14, 42\}$.

Если $|Z(K)| = 1$, то $K \cap C_G(K) = 1$, и в силу $G = KC_G(K)$ получаем, что $G = K \times L_2(5)$; противоречие. Если $|Z(K)| = 2$, то согласно $(|K/Z(K)|, |Z(K)|) = (21, 2) = 1$ из теоремы Шура — Цассенхауса вытекает, что у $K$ существует подгруппа $N$ такая, что $K = NZ(K)$. Так как $|K : N| = 2$, заключаем, что $K = N \times Z(K)$. Утверждается, что $G = N \times C_G(K)$. С учетом порядка группы $NC_G(K)$ имеем $G = NC_G(K)$ и потому легко видеть, что $N$ — нормальная подгруппа в $G$. Далее, $N \cap C_G(K) \leq N \cap Z(K) = 1$, что доказывает утверждение. Таким образом, $15 \in \omega(G)$. С другой стороны, поскольку $G/K \cong L_2(5)$, в силу лемм 2.3 и 2.4(2) группа $G$ имеет неприводимый характер нулевого 5-дефекта, а значит, $15 \in \mathrm{Vo}(G)$; противоречие.

Если $|Z(K)| \in \{6, 14, 42\}$, то пусть $P$ — силовская 2-подгруппа группы $Z(K)$. Легко видеть, что $C_G(K)/P$ — центральное расширение группы $Z(K)/P$ с помощью $L_2(5)$. Учитывая порядок множителя Шура группы $L_2(5)$, видим, что это расширение расщепляется; следовательно, $C_G(K)/P \cong Z(K)/P \times L_2(5)$. Таким образом, $\{15, 35\} \cap \omega(C_G(K)) \neq \varnothing$. Поскольку $L_2(5)$ имеет неприводимый характер нулевого 5-дефекта, из леммы 2.4(2) следует, что у группы $C_G(K)$ тоже имеется неприводимый характер нулевого 5-дефекта. Поэтому в силу леммы 2.4(1) $\{15, 35\} \cap \mathrm{Vo}(G) \neq \varnothing$; противоречие. $\square$

Авторы благодарят рецензента за неоценимые комментарии.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Bubboloni D., Dolfi S., Spiga P.* Finite groups whose irreducible characters vanish only on $p$-elements // J. Pure Appl. Algebra. 2009. V. 213. P. 370–376.
2. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the orders of zeros of irreducible characters // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 345–352.
3. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the vanishing prime graph of finite groups // J. London Math. Soc. 2010. V. 82, N 1. P. 167–183.
4. *Zhang J., Li Z., Shao C.* Finite groups whose irreducible characters vanish only on elements of prime power order // Int. Electron. J. Algebra. 2011. V. 9. P. 114–123.
5. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2010.
6. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.
7. *Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
8. *Dolfi S., Pacifici E., Sanus L., Spiga P.* On the vanishing prime graph of solvable groups // J. Group Theory. 2010. V. 13. P. 189–206.
9. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Dover, 1976.
10. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum, // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. V. 6. P. 1–12.


*Статья поступила 2 октября 2013 г.*

M. Foroudi Ghasemabadi (Гасемабади М. Фороуди), A. Iranmanesh (Иранманеш А.)
F. Mavadatpour (Мавадатпур Ф.)
Tarbiat Modares University,
Tehran, Iran
`foroudi@modares.ac.ir`, `iranmanesh@modares.ac.ir`, `f.mavadatpor@modares.ac.ir`