Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 515.12

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРХАНГЕЛЬСКОГО — КОМБАРОВА ДЛЯ ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ

А. В. Иванов

Аннотация. Введено понятие вариативного полунормального функтора $\mathscr{F}$ и доказано, что для любого такого функтора и любого компакта X нормальность пространства $\mathscr{F}(X) \setminus X$ влечет счетность характера X. Тем самым получено обобщение теоремы Архангельского — Комбарова 1990 г. о счетности характера компакта, нормального вне диагонали. В предположении принципа Йенсена показано, что для финитных не вариативных функторов сформулированное выше утверждение неверно.

Ключевые слова: полунормальные функторы, теорема Архангельского — Комбарова, первая аксиома счетности, нормальность вне диагонали.

Интерес к функториальной трактовке классических результатов общей топологии возник после того, как В. В. Федорчук [1] доказал в 1987 г. обобщение теоремы Катетова о метризуемости компакта, куб которого наследственно нормален, для всех нормальных функторов степени ≥ 3. Теорема А. В. Архангельского и А. П. Комбарова, о которой пойдет речь в этой работе, доказана в 1990 г. [2]. Согласно этой теореме любой компакт X, для которого пространство $X^2 \setminus \Delta$ нормально ($\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ — диагональ X^2), имеет счетный характер. Сформулированное утверждение по своей сути является теоремой о функторе возведения компакта в степень 2. Для любого полунормального функтора $\mathscr{F}$ в категории компактов и любого компакта X имеется каноническое вложение $X \subset \mathscr{F}(X)$, которое для функтора возведения в квадрат совпадает с отождествлением X с диагональю Δ. Таким образом, на языке функторов теорема Архангельского — Комбарова может быть сформулирована так: если пространство $\mathscr{F}(X) \setminus X$ нормально, то $\chi(X) \leq \omega_0$ (где $\mathscr{F}(X) = X^2$). Естественно возникает вопрос о справедливости этого утверждения для других полунормальных функторов. О таких функторах будем говорить, что они *обладают AK-свойством.* Другими словами, наличие AK-свойства у функтора $\mathscr{F}$ означает, что для любого компакта X несчетного характера пространство $\mathscr{F}(X) \setminus X$ не нормально.

В [3] в предположении принципа Йенсена $\diamondsuit$ построен пример компакта X несчетного характера, для которого пространства $\exp_n(X) \setminus X$ нормальны для любого $n \geq 2$. Тем самым установлено, что в предположении $\diamondsuit$ AK-свойством могут не обладать даже нормальные функторы любой конечной степени $n \geq 2$.

В настоящей работе введено понятие полунормального вариативного функтора и доказано, что все вариативные функторы обладают AK-свойством. Отметим при этом, что если полунормальный функтор $\mathscr{F}$ имеет степенной спектр

$\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, n\}$, где $n \geq 4$, то $\mathscr{F}$ обязательно вариативен. Кроме того, исследовано строение полунормальных финитных не вариативных функторов. Оказывается, что каждый такой функтор является букетом функторов $\exp_2$, λ_3 и некоторого функтора μ степени 3, который является в каком-то смысле двойственным к функтору суперрасширения λ_3. Доказано в предположении принципа Йенсена, что все финитные не вариативные функторы со степенным спектром $\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, n\}$ $(n = 2, 3)$ не обладают AK-свойством. Тем самым в предположении принципа Йенсена полностью решен вопрос о наличии AK-свойства у финитных полунормальных функторов со степенным спектром $\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, n\}$, $n \geq 2$.

В данной работе рассматриваются только компактные хаусдорфовы пространства (компакты), все отображения непрерывны. Замыкание множества A обозначается через $[A]$.

Определение полунормального функтора в категории компактов и непрерывных отображений приведено в [4] (см. также [5, 6]). Полунормальный функтор $\mathscr{F}$ называется *финитным*, если для любого конечного X пространство $\mathscr{F}(X)$ конечно. Если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, то для любого компакта X и любой точки $a \in \mathscr{F}(X)$ определен носитель $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathscr{F}(Y)\}.$$

Для любого натурального n естественно определяется подфунктор $\mathscr{F}_n$ полунормального функтора $\mathscr{F}$. А именно, $\mathscr{F}_n(X) = \{a \in \mathscr{F}(X) : |\,\mathrm{supp}(a)| \leq n\}$ для любого компакта X. Функтор $\mathscr{F}_n$ также полунормален (см. [5]). При этом $\mathscr{F}_1(X) = X \subset \mathscr{F}(X)$. Отметим, что если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор и $f : X \to Y$, то $f(\mathrm{supp}(a)) \supset \mathrm{supp}(\mathscr{F}(f)(a))$ для любого $a \in \mathscr{F}(X)$.

При изучении полунормальных функторов конечной степени большую роль играет отображение Басманова π_n (см. [5, 7]). В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Отображение

$$\pi_n : X^n \times \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(X)$$

определяется равенством $\pi_n(x, \xi) = \mathscr{F}(x)(\xi)$, в котором каждая точка $x \in X^n$ отождествляется с отображением $x : n \to X$. Для любого полунормального функтора $\mathscr{F}$ и любого компакта X отображение π_n непрерывно, причем $\mathrm{Im}\,\pi_n = \mathscr{F}_n(X)$. Следуя [5], для каждого $n > 1$ введем обозначение: $\mathscr{F}_{nn}(X) = \mathscr{F}_n(X) \setminus \mathscr{F}_{n-1}(X)$.

Степенным спектром функтора $\mathscr{F}$ называется [6] множество

$$\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{k : k \in N, \mathscr{F}_{kk}(k) \neq \varnothing\}.$$

Известно, что для любого подмножества $K \subset N$ $(1 \in K)$ существует полунормальный функтор со степенным спектром, равным K.

Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, $n \in \mathrm{sp}(\mathscr{F})$ и $\xi \in \mathscr{F}(n)$, $\mathrm{supp}(\xi) = n$. Пусть X — компакт и $\pi_n : X^n \times \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(X)$ — отображение Басманова. Положим

$$\mathscr{F}^{(\xi)}(X) = \pi_n(X^n \times \{\xi\}) \subset \mathscr{F}(X).$$

Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ определим $\mathscr{F}^{(\xi)}(f) : \mathscr{F}^{(\xi)}(X) \to \mathscr{F}^{(\xi)}(Y)$ как ограничение $\mathscr{F}(f)$ на $\mathscr{F}^{(\xi)}(X)$. Легко проверить, что тем самым определен функтор $\mathscr{F}^{(\xi)}$, который является полунормальным и имеет степень n. При этом всегда $\xi \in \mathscr{F}^{(\xi)}(n)$ и $\mathscr{F}^{(\xi)}(X) \subset \mathscr{F}_n(X)$ для любого компакта X.

В [6] предложена конструкция букета $\mathscr{F}\vee\mathscr{G}$ двух полунормальных функторов $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$. Для любого X пространство $(\mathscr{F}\vee\mathscr{G})(X)$ определяется как результат склейки $\mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{G}(X)$ по точкам компакта X. Действие букета функторов на отображения задается естественным образом. Аналогично может быть определен букет из n функторов $\bigvee\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i$. Легко проверить, что

$$\operatorname{sp}\left(\bigvee_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{sp}(\mathscr{F}_i).$$

Предложение 1. *Если $\xi_1,\dots,\xi_k\in\mathscr{F}_{nn}(n)$ и $\mathscr{F}^{(\xi_i)}(n)\cap\mathscr{F}^{(\xi_j)}(n)=n$ при $i\neq j$, то пространство $\bigvee\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}^{(\xi_i)}(X)$ естественно вложено в $\mathscr{F}(X)$ для любого X и $\bigvee\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}^{(\xi_i)}$ является подфунктором функтора $\mathscr{F}$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\mathscr{F}^{(\xi_i)}(X)\cap\mathscr{F}^{(\xi_j)}(X)=X$ для любого X и $i\neq j$. Предположим, что существует точка $a\in\mathscr{F}^{(\xi_i)}(X)\cap\mathscr{F}^{(\xi_j)}(X)\setminus X$. Тогда найдутся $x,y\in X^n$, $x=(x_0,\dots,x_{n-1})$, $y=(y_0,\dots,y_{n-1})$, такие, что $\mathscr{F}(x)(\xi_i)=\mathscr{F}(y)(\xi_j)=a$. Положим

$$A=\{x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1}\},\quad B=\operatorname{supp}(a)\subset A,\quad |B|>1.$$

Пусть $r:A\to B$ — ретракция и $s:B\to n$ — вложение. Будем считать, что отображения x,y действуют из n в $A\subset X$. Тогда композиции $s\circ r\circ x$ и $s\circ r\circ y$ суть отображения из n в n. Имеем

$$\mathscr{F}(s\circ r\circ x)(\xi_i)=\mathscr{F}(s\circ r)(a)\in\mathscr{F}^{(\xi_i)}(n)$$

и $\mathscr{F}(s\circ r)(a)\notin n$. Аналогично

$$\mathscr{F}(s\circ r\circ y)(\xi_j)=\mathscr{F}(s\circ r)(a)\in\mathscr{F}^{(\xi_j)}(n).$$

Но тогда

$$\mathscr{F}(s\circ r)(a)\in\mathscr{F}^{(\xi_j)}(n)\cap\mathscr{F}^{(\xi_j)}(n)\setminus n,$$

что невозможно. Предложение доказано.

Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор и $\operatorname{sp}\mathscr{F}=\{1,n,\dots\}$ (здесь и далее элементы степенного спектра $\mathscr{F}$ записаны в порядке возрастания, т. е. n — наименьший элемент степенного спектра, отличный от 1).

Определение 1. Функтор $\mathscr{F}$ будем называть *вариативным*, если существуют биекция $f:n\to n$ и $\xi\in\mathscr{F}_{nn}(n)$ такие, что $\mathscr{F}(f)(\xi)\neq\xi$.

Всякая биекция $f:n\to n$ (подстановка из элементов) разлагается в произведение транспозиций. Таким образом, функтор $\mathscr{F}$ вариативен тогда и только тогда, когда существуют транспозиция $f:n\to n$ (т. е. биекция, меняющая местами два элемента n) и $\xi\in\mathscr{F}_{nn}(n)$ такие, что $\mathscr{F}(f)(\xi)\neq\xi$.

Примерами вариативных функторов являются функторы возведения в степень n, функтор вероятностных мер P. Экспонента exp и суперрасширение λ — не вариативные функторы.

Заметим, что если существует точка $i\in n\subset\mathscr{F}(n)$, не изолированная в $\mathscr{F}(n)$, то все точки n не являются изолированными в $\mathscr{F}(n)$, и в этом случае функтор $\mathscr{F}$ обязательно вариативен. В самом деле, если $f:n\to n$ — транспозиция, $f(i)=j$, то $\mathscr{F}(f)(i)=j$. Существуют непересекающиеся окрестности Oi, Oj точек i,j в $\mathscr{F}(n)$, для которых $\mathscr{F}(f)(Oi)\subset Oj$. Взяв $\xi\in Oi\cap\mathscr{F}_{nn}(n)$, получим $\mathscr{F}(f)(\xi)\neq\xi$.

Предложение 2. *Если* $\operatorname{sp}\mathscr{F} = \{1, n, \dots\}$ *и* $n \geq 4$, *то* $\mathscr{F}$ *— вариативный функтор.*

Доказательство. Пусть $i, j \in n$, $i \neq j$. Определим отображение $g_{ij} : n \to n$ следующим образом: $g_{ij}(j) = i$, $g_{ij}(l) = l$ при $l \neq j$. Докажем прежде всего, что существуют $i, j \in n$, $i \neq j$, и $\xi \in \mathscr{F}_{nn}(n)$ такие, что $\mathscr{F}(g_{ij})(\xi) = i$. Действительно, пусть $\xi \in \mathscr{F}_{nn}(n)$ и $\mathscr{F}(g_{01})(\xi) = k > 1$. Возьмем $m \in n \setminus \{0, 1, k\}$. Получим $\mathscr{F}(g_{km})(\xi) = l \notin \{k, m\}$. При этом $g_{01} \circ g_{km} = g_{km} \circ g_{01}$, но $\mathscr{F}(g_{km} \circ g_{01})(\xi) = k \neq \mathscr{F}(g_{01} \circ g_{km})(\xi)$; противоречие. В дальнейшем будем считать для определенности, что $i = 0$, $j = 1$, $\xi \in \mathscr{F}_{nn}(n)$ и $\mathscr{F}(g_{01})(\xi) = 0$.

Пусть $f : n \to n$ и $h : n \to n$ — биекции, определяемые формулами

$$f(0) = 2,\ f(1) = 3,\ f(2) = 0,\ f(3) = 1,\ f(k) = k \text{ при } k > 3;$$

$$h(0) = 2,\ h(2) = 0,\ h(k) = k \text{ при } k \neq 0, 2.$$

Легко проверить, что

$$h \circ g_{32} \circ g_{01} \circ f = g_{32} \circ g_{01}.$$

Следовательно,

$$\mathscr{F}(h) \circ \mathscr{F}(g_{32}) \circ \mathscr{F}(g_{01}) \circ \mathscr{F}(f)(\xi) = \mathscr{F}(g_{32}) \circ \mathscr{F}(g_{01})(\xi). \tag{1}$$

Предположим, что $\mathscr{F}$ не вариативен. Тогда для биекции $f : n \to n$ и выбранного выше $\xi \in \mathscr{F}_{nn}(n)$ имеет место равенство $\mathscr{F}(f)(\xi) = \xi$. Далее, $\mathscr{F}(g_{01})(\xi) = 0$, $\mathscr{F}(g_{32})(0) = 0$, $\mathscr{F}(h)(0) = 2$. Таким образом, значение левой части равенства (1) равно 2. В то же время правая часть (1) равна 0. Получено противоречие.

Определение 2. Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathscr{F}$ *обладает АК-свойством*, если для любого компакта X несчетного характера пространство $\mathscr{F}(X) \setminus X$ не нормально.

Теорема 1. *Всякий вариативный полунормальный функтор обладает АК-свойством.*

Доказательство. Пусть $f : n \to n$ — транспозиция и $\xi \in \mathscr{F}_{nn}(n)$ таковы, что $\mathscr{F}(f)(\xi) = \xi' \neq \xi$. Будем считать для определенности, что $f(0) = 1$. Тогда $f(1) = 0$ и $f(k) = k$ при $k > 1$.

Пусть X — компакт, $p \in X$ и $\chi(p, X) > \omega_0$. В [2] доказано, что в этом случае существуют замкнутые в $X^2 \setminus \Delta$ непересекающиеся подмножества F_1, F_2, не имеющие в $X^2 \setminus \Delta$ дизъюнктных окрестностей. Выберем в X набор попарно различных точек $x_2, \dots, x_{n-1}$, отличных от p, и пусть Op — окрестность p, замыкание которой не содержит точек $x_2, \dots, x_{n-1}$. Рассмотрим множества

$$([Op] \times [Op]) \cap F_i \subset X^2 \setminus \Delta, \quad i = 1, 2.$$

Эти множества также замкнуты в $X^2 \setminus \Delta$ и не имеют дизъюнктных окрестностей (см. [2]).

Рассмотрим подмножества

$$H = X^2 \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_{n-1}\} \subset X^n, \quad \Delta_H = \Delta \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_{n-1}\} \subset H$$

(здесь и далее нумерацию координат точек $x \in X^n$ начинаем с нуля: $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$). Пусть $\pi_n : X^n \times \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}_n(X)$ — отображение Басманова и

$$h = \pi_n|_{H \times \{\xi\}} : H \times \{\xi\} \to \mathscr{F}_n(X).$$

Докажем, что отображение h взаимно однозначно на $(H \setminus \Delta_H) \times \{\xi\}$. Пусть $x, x' \in (H \setminus \Delta_H) \times \{\xi\}$ и

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq (x'_0, x'_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x'.$$

Если $\{x_0, x_1\} \neq \{x'_0, x'_1\}$, то $\operatorname{supp}(h(x)) \neq \operatorname{supp}(h(x'))$ и, следовательно, $h(x) \neq h(x')$. Если же $\{x_0, x_1\} = \{x'_0, x'_1\}$, то $x' = (x_1, x_0, x_2, \dots, x_{n-1})$. Напомним, что точку $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in X^n$ отождествили с отображением $x : n \to X$, где $x(i) = x_i$, $i \in n$. Пусть f — рассмотренная выше транспозиция 0 и 1. Тогда $x = x' \circ f$. Следовательно,

$$\mathscr{F}(x)(\xi) = \mathscr{F}(x') \circ \mathscr{F}(f)(\xi) = \mathscr{F}(x')(\xi'),$$

где $\xi' \neq \xi$. Поскольку отображение $\mathscr{F}(x')$ взаимно однозначно на $\mathscr{F}(n)$, отсюда следует, что

$$h(x') = \mathscr{F}(x')(\xi) \neq \mathscr{F}(x')(\xi') = \mathscr{F}(x)(\xi) = h(x).$$

Итак, h взаимно однозначно на $(H \setminus \Delta_H) \times \{\xi\}$.

Положим

$$\Phi_i = (([Op] \times [Op]) \cap F_i) \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_{n-1}\} \subset H, \quad i = 1, 2.$$

Множества Φ_1, Φ_2 замкнуты в $H \setminus \Delta_H$, дизъюнктны и не имеют в $H \setminus \Delta_H$ непересекающихся окрестностей. Поскольку $h(\Delta_H \times \{\xi\}) \subset X \subset \mathscr{F}_n(X)$ и $h((H \setminus \Delta_H) \times \{\xi\}) \cap X = \varnothing$, множества $h(\Phi_i \times \{\xi\})$, $i = 1, 2$, являются замкнутыми непересекающимися подмножествами $\mathscr{F}_n(X) \setminus X$, которые в силу непрерывности h не могут иметь в $\mathscr{F}_n(X) \setminus X$ дизъюнктных окрестностей. Следовательно, пространство $\mathscr{F}_n(X) \setminus X$ не нормально. Значит, не нормально и $\mathscr{F}(X) \setminus X$. Теорема доказана.

Теорема 2 ($\diamondsuit$). *Пусть $\mathscr{F}$ — финитный не вариативный функтор и $\operatorname{sp}\mathscr{F} = \{1, n\}$. Тогда $\mathscr{F}$ не обладает АК-свойством.*

Доказательство. Согласно результату Басманова [7] всякий полунормальный функтор $\mathscr{F}$ степени n однозначно определяется своим действием на категорию n, состоящую из одного n-точечного пространства n и всевозможных отображений n в себя. В условиях теоремы в силу финитности функтора $\mathscr{F}$ имеем $\mathscr{F}(n) = n \cup \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, где $\xi_i \in \mathscr{F}(n) \setminus n$, причем $\mathscr{F}(f)(\xi_i) = \xi_i$, $i = 1, \dots, k$, для любого биективного отображения $f : n \to n$.

Для каждого ξ_i, $i = 1, \dots, k$, рассмотрим функтор $\mathscr{F}^{(\xi_i)}$. Имеем $\mathscr{F}^{(\xi_i)}(n) \cap \mathscr{F}^{(\xi_j)}(n) = n$ при $i \neq j$. В силу предложения 1 функтор $\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{F}^{(\xi_i)}$ является подфунктором функтора $\mathscr{F}$. При этом $\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{F}^{(\xi_i)}(n) = \mathscr{F}(n)$. Следовательно, функтор $\bigvee_{i=1}^{n} \mathscr{F}^{(\xi_i)}$ изоморфен $\mathscr{F}$.

Итак, для любого компакта X пространство $\mathscr{F}(X) \setminus X$ распадается в конечное объединение открыто-замкнутых подмножеств $\mathscr{F}^{(\xi_i)}(X) \setminus X$, $i = 1, \dots, k$.

Рассмотрим варианты значений n.

$n = 2$. Тогда действие функтора $\mathscr{F}^{(\xi_i)}$ на категорию 2 совпадает с действием на эту категорию функтора экспоненты exp, если отождествить двухточечное подмножество $\{0, 1\} \in \exp(2)$ с точкой ξ_i. Таким образом, в силу упомянутой выше теоремы Басманова [7] функтор $\mathscr{F}^{(\xi_i)}$ естественно изоморфен функтору $\exp_2$. В [3] в предположении принципа Йенсена $\diamondsuit$ построен компакт X несчетного характера, для которого пространство $\exp_2(X)\setminus X$ нормально. Следовательно, пространства $\mathscr{F}^{(\xi_i)}(X)\setminus X$, $i=1,\dots,k$, также нормальны, а значит, нормально и $\mathscr{F}(X)\setminus X$, т. е. $\mathscr{F}$ не обладает AK-свойством.

$n=3$. Имеется ровно два функтора на категории 3, для которых $\mathscr{F}(3)=3\cup\{\xi\}$. Один из них — это функтор суперрасширения λ (см. [4]). Его действие на отображения задается следующим образом: $\lambda(f)|_3=f$ для любого $f:3\to 3$. Если f — биекция, то $\lambda(f)(\xi)=\xi$. Если же f склеивает точки, то $\lambda(f)(\xi)=i$, где точка $i\in 3$ такова, что $|f^{-1}(i)|>1$.

Второй функтор по действию на отображения является в некотором смысле антиподом λ и будем обозначать его через μ[1)]. Как и выше, $\mu(f)|_3=f$ для любого $f\in 3^3$, и если f — биекция, то $\mu(f)(\xi)=\xi$. Если же $|f(3)|=2$, то $\mu(f)(\xi)=i$, где i — точка из 3, для которой $|f^{-1}(i)|=1$. Для постоянного отображения $f:3\to\{i\}$ имеем $\mu(f)(\xi)=i$.

Пусть X — произвольный компакт. Тогда $\mu(X)$ определяется как фактор-пространство произведения $X^3\times\mu(3)$ по отношению эквивалентности, которое задается действием μ на морфизмы категории 3 (см. [7]). Соответствующее факторное отображение $\pi_3:X^3\times\mu(3)\to\mu(X)$ является при этом отображением Басманова для функтора μ. Легко видеть, что отображение π_3 на слоях вида $X^3\times\{i\}$, $i\in 3$, произведения $X^3\times\mu(3)$ является проекцией X^3 на соответствующий сомножитель, который в конечном счете отождествляется с $X\subset\mu(X)$. Таким образом, $\mu(X)$ фактически является фактор-пространством $X^3\times\{\xi\}$. Соответствующее факторное отображение

$$g=\pi_3|_{X^3\times\{\xi\}}:X^3\to\mu(X)$$

действует по следующим правилам:

$$g(y,y,y)=g(x,x,y)=g(x,y,x)=g(y,x,x)=y\in X\subset\mu(X);$$

если все координаты точки $(x,y,z)\in X^3$ различны, то $g(x,y,z)\in\mu(X)\setminus X$ и значения g не меняются при перестановках координат x,y,z.

Легко видеть, что описанные выше функторы λ_3 и μ исчерпывают все возможности задания функтора на категории 3, для которого $\mathscr{F}(3)=3\cup\{\xi\}$.

Итак, при $n=3$ построенные выше функторы $\mathscr{F}^{(\xi_i)}$, $i=1,\dots,k$, естественно изоморфны либо функтору λ_3, либо μ. Покажем, что для упомянутого выше компакта X несчетного характера из [3] пространства $\lambda_3(X)\setminus X$ и $\mu(X)\setminus X$ нормальны. Из этого будут следовать нормальность $\mathscr{F}(X)\setminus X$ и отсутствие AK-свойства у функтора $\mathscr{F}$.

Нам потребуются некоторые свойства компакта X из [3]. Топология X определена на множестве ω_1+1, где ω_1 — первый несчетный ординал. При этом единственной точкой несчетного характера в X является точка ω_1, которую будем обозначать для краткости через p. Дополнение до любой окрестности точки p в X счетно (см. [3]).

Пусть $\pi_3:X^3\times\lambda_3(3)\to\lambda_3(X)$ — отображение Басманова для функтора λ_3 и $\lambda_3(3)=3\cup\{\xi\}$, где ξ — единственная максимальная сцепленная система с носителем из трех точек. Тогда отображение

$$h=\pi_3|_{X^3\times\{\xi\}}:X^3\times\{\xi\}\to\lambda_3(X)$$

[1)]Функтор μ впервые рассмотрен в [8] под обозначением G. Однако это обозначение было использовано ранее Е. В. Моисеевым [9] для функтора гиперпространств включения. Поэтому мы предлагаем новое обозначение μ, подчеркивающее двойственность этого функтора суперрасширению.

сюръективно. Отождествим $X^3 \times \{\xi\}$ с X^3 и будем считать, что $h : X^3 \to \lambda_3(X)$. Пусть F_1, F_2 — замкнутые непересекающиеся подмножества $\lambda_3(X) \setminus X$. Возможны два варианта.

1. $p \notin [F_1]$. Тогда существуют окрестности Op, $O'p$ точки p в $\lambda_3(X)$ такие, что $[Op] \cap F_1 = \varnothing$ и $[O'p] \subset Op$. Положим

$$A = X \setminus Op, \quad A' = X \setminus O'p, \quad U = X \setminus [O'p].$$

Имеем $A \subset U \subset A'$. Множество $(A')^2$ является замкнутым счетным подмножеством компакта X^2. Следовательно, $(A')^2$ — метризуемый компакт. Далее, $A^2 \subset U^2 \subset (A')^2$, где A^2 замкнуто, а U^2 открыто в X^2. Следовательно, A^2 — G_δ-подмножество в X^2. Поэтому $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ также G_δ-подмножество X^2. Таким образом, множества

$$B_1 = \{(a, a, x) : a \in A, x \in X\}, \quad B_2 = \{(a, x, a) : a \in A, x \in X\},$$
$$B_3 = \{(x, a, a) : a \in A, x \in X\}$$

являются G_δ-подмножествами X^3. Легко проверить, что $h^{-1}(A) = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Следовательно, $h^{-1}(A)$ — G_δ-подмножество X^3, и, значит, A — G_δ-подмножество $\lambda_3(X)$.

Таким образом, пространство $W = \lambda_3(X) \setminus (Op \cup A)$ нормально. Следовательно, множества $F_1 \cap W$ и $F_2 \cap W$ имеют в W дизъюнктные окрестности V_1 и V_2, которые можно продолжить до открытых множеств G_1, G_2 в $\lambda_3(X)$ ($G_i \cap W = V_i$, $i = 1, 2$). Положим

$$OF_1 = G_1 \setminus [Op], \quad OF_2 = G_2 \cup Op.$$

Легко видеть, что $OF_1 \setminus X$ и $OF_2 \setminus X$ — дизъюнктные окрестности F_1 и F_2 в $\lambda_3(X) \setminus X$.

2. $p \in [F_i]$, $i = 1, 2$. Пусть $\Phi_1 = h^{-1}(F_i)$, $i = 1, 2$. Ясно, что Φ_1, Φ_2 — замкнутые непересекающиеся подмножества $X^3 \setminus h^{-1}(X)$. Имеются две возможности.

2(а). $[\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap h^{-1}(p) = \varnothing$. Тогда существует окрестность O множества $h^{-1}(p)$ в X^3 такая, что $[O] \cap [\Phi_1] \cap [\Phi_2] = \varnothing$. Положим $Op = h^\sharp(O)$. Множества $F_1 \setminus Op$ и F_2 обладают в $\lambda_3(X) \setminus X$ дизъюнктными окрестностями U_1, U_2 в силу рассуждений, проведенных в п. 1. Пусть W_1 и W_2 — дизъюнктные окрестности соответственно $[O] \cap [\Phi_1]$ и $[\Phi_2]$ в X^3. Тогда $OF_2 = U_2 \cap h^\sharp(W_2)$ и $OF_1 = U_1 \cup h^\sharp(W_1)$ — непересекающиеся окрестности F_1 и F_2 в $\lambda_3(X)$.

2(б). $[\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap h^{-1}(p) \neq \varnothing$. Пусть $z \in [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap h^{-1}(p)$. Возможны два варианта.

(а) Точка z имеет две координаты, равные p, а третья координата z отлична от p. Пусть для определенности $z = (p, p, x)$, где $x \neq p$. Пусть $\{O_k : k \in \omega_0\}$ — счетная база окрестностей точки x в X такая, что $[O_{k+1}] \subset O_k$ и $Z_k = X^2 \times [O_k] \subset X^3$. Тогда $z \in [\Phi_1 \cap Z_k] \cap [\Phi_2 \cap Z_k]$ для любого k. Пусть $q : X^3 \to X^2$ — проекция, действующая по правилу $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$. Тогда $q(z) = (p, p)$ и, следовательно, $[q(\Phi_i \cap Z_k)] \ni (p, p)$ для $i = 1, 2$.

В силу построения множеств $\Phi_1 = h^{-1}(F_i)$ все координаты каждой точки $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Phi_i$ различны. Следовательно, $q(\Phi_i \cap Z_k) \cap \Delta = \varnothing$, где $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X^2$.

Напомним, что пространство X как множество есть $\omega_1 + 1$, где $\omega_1 = p$. Для любого $x = \alpha \in X$ определен α-отрезок $X : [\alpha, p] = \{\beta \in X : \alpha \leq \beta \leq p\}$. Пусть $[\alpha, p) = [\alpha, p] \setminus \{p\}$. По лемме 4 из [3] получаем, что существует $\alpha_k \in X$, $\alpha_k < p$, такое, что

$$[\alpha_k, p] \times \{p\} \subset [q(\Phi_1 \cap Z_k)] \tag{2}$$

(в качестве множества B в формулировке леммы 4 из [3] у нас выступает $q(\Phi_1 \cap Z_k)$, $n = 2$).

Из определения функтора λ_3 следует, что если $(x_1, x_2, x_3) \in \Phi_1$, то любая перестановка координат x_1, x_2, x_3 также дает точку, лежащую в Φ_1. Таким образом, условие (2) равносильно включению

$$\{p\} \times [\alpha_k, p] \subset [q(\Phi_1 \cap Z_k)].$$

Пусть

$$\alpha = \sup(\{\alpha_k : k \in \omega_0\} \cup \{x + 1\}).$$

Докажем, что

$$[\alpha, p) \times \{p\} \times \{x\} \subset \Phi_1.$$

Пусть $y = (t, p, x)$, $t \in [\alpha, p)$, и $Oy = Ot \times Op \times O_k$ — окрестность точки y, где Ot и Op — окрестности t и p в X. Если $Oy \cap \Phi_1 = \varnothing$, то $q(\Phi_1 \cap Z_{k+1}) \cap (Ot \times Op) = \varnothing$, что невозможно, поскольку $(t, p) \in [q(\Phi_1 \cap Z_{k+1})]$. Таким образом, в силу замкнутости Φ_1 в $X^3 \setminus h^{-1}(X)$ получаем, что $y \in \Phi_1$. Итак, $[\alpha, p) \times \{p\} \times \{x\} \subset \Phi_1$. Совершенно аналогично можно доказать, что найдется $\beta < p$ ($\beta \in X$) такое, что $[\beta, p) \times \{p\} \times \{x\} \subset \Phi_2$. Но это противоречит дизъюнктности Φ_1 и Φ_2. Итак, случай (а) невозможен.

(б) $z = (p, p, p)$. Если $[\Phi_1 \cap (X^2 \times \{p\})] \ni (p, p, p)$, то по лемме 3 из [3], где $n = 2$ и $D = \Phi_1 \cap (X^2 \times \{p\}) \subset X^2$ (здесь отождествляем $X^2 \times \{p\}$ с X^2), существует $\alpha \in X$, $\alpha < p$, такое, что $([\alpha, p]^2 \times \{p\}) \setminus h^{-1}(X) \subset \Phi_1$. Если же $(p, p, p) \notin [\Phi_1 \cap (X^2 \times \{p\})]$, то

$$(p, p, p) \in [\Phi_1 \setminus (X^2 \times \{p\} \cup X \times \{p\} \times X \cup \{p\} \times X^2)]$$

и тогда по лемме 3 из [3] ($n = 3$, $D = \Phi_1 \setminus (X^2 \times \{p\} \cup X \times \{p\} \times X \cup \{p\} \times X^2)$) существует $\alpha < p$, для которого $[\alpha, p]^3 \setminus h^{-1}(X) \subset \Phi_1$. Итак, в любом случае существует $\alpha < p$ такое, что $([\alpha, p]^2 \times \{p\}) \setminus h^{-1}(X) \subset \Phi_1$. Аналогичное утверждение верно и для множества Φ_2, откуда следует, что $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что случай (б) также невозможен. Нормальность $\lambda_3(X) \setminus X$ доказана.

Остается доказать нормальность $\mu(X) \setminus X$. Для этого достаточно заметить, что пространства $\mu(X) \setminus X$ и $\lambda_3(X) \setminus X$ гомеоморфны, поскольку прообразы этих пространств при отображениях Басманова $h = \pi_\lambda|_{X^3 \times \{\xi\}}$ и $\pi_\mu|_{X^3 \times \{\xi\}}$ для функторов λ_3 и μ совпадают с $X^3 \setminus h^{-1}(X)$ и действие отображений $\pi_\lambda|_{X^3 \times \{\xi\}}$ и $\pi_\mu|_{X^3 \times \{\xi\}}$ на этих прообразах также одинаково: точки склеиваются тогда и только тогда, когда они отличаются перестановкой координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федорчук В. В.* К теореме Катетова о кубе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 4. С. 93–96.
2. *Arhangel'skii A. V., Kombarov A. P.* On ∇-normal spaces // Topol. Appl. 1990. V. 35, N 2–3. P. 121–126.
3. *Иванов А. В.* Пример компакта несчетного характера, для которого пространства $\exp_n(X) \setminus X$ нормальны // Мат. заметки (в печати). Препринт: http://www.petrsu.ru/Chairs/Geom/geom_publ1.pdf.
4. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
5. *Fedorchuk V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors // Topol. Appl. 1997. V. 76, N 2. P. 125–150.

6. *Иванов А. В., Кашуба Е. В.* О наследственной нормальности пространств вида $\mathscr{F}(X)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 813–824.

7. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы конечных степеней на категории бикомпактных пространств // Фундаментальная и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 3. С. 637–654.

8. *Ivanov A. V., Kashuba E. V., Matyushichev K. V., Stepanova E. N.* Functors and compact spaces of uncountable character // Topol. Appl. 2013. V. 160, N 13. P. 1606–1610.

9. *Моисеев Е. В.* О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. математика, механика. 1988. № 3. С. 54–57.

Статья поступила 16 ноября 2013 г.

Иванов Александр Владимирович
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@petrsu.ru