Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.544

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРА, РАЗРЕШИМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

С. Н. Киясов

Аннотация. Рассмотрена структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора. Показано, что при наличии двух кусочно-мероморфных решений задачи может быть построена каноническая система решений задачи линейного сопряжения и выделены классы задач, разрешимых в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация.

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$,

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) & g_{13}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{31}(t) & g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \ t \in \Gamma, \tag{0.1}$$

— H-непрерывная на Γ матрица-функция третьего порядка. Однородная задача линейного сопряжения для трехмерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной функции $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ с H-непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t) \tag{0.2}$$

или в скалярной форме — условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t) + g_{13}(t)w^{3-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t) + g_{23}(t)w^{3-}(t), \\ w^{3+}(t) &= g_{31}(t)w^{1-}(t) + g_{32}(t)w^{2-}(t) + g_{33}(t)w^{3-}(t). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Качественная теория задачи (0.2) в классах гёльдеровских функций, причем любой размерности, изложена в [1], а в более широких классах матриц-функций — в [2]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи может быть записано в замкнутой форме — записи решения задачи в интегралах типа Коши и решения определенного числа линейных алгебраических систем. Одним из таких примеров служит решение задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций в [3]. В [2] также предложен конструктивный алгоритм решения этой задачи. В работе автора [4] рассмотрена возможность приведения задачи (0.2) к задаче с треугольной матрицей-функцией. Изучению такой возможности для матриц-функций второго порядка посвящена работа [5]. Описание современного состояния теории задачи линейного сопряжения и ее приложений можно найти в докторской диссертации В. М. Адукова [6].

В данной работе приводится ряд условий на элементы матрицы-функции (0.1), при выполнении которых решение задачи (0.3) может быть записано в замкнутой форме. Работа состоит из трех разделов. В разд. 1 изучается структура множества кусочно-мероморфных решений задачи (0.3), которые могут иметь в соответствующих областях лишь конечное число полюсов. В разд. 2 показано, что наличие двух кусочно-мероморфных решений задачи (0.3) позволяет построить ее каноническую систему решений и записать общее решение в классе кусочно-голоморфных функций. В разд. 3 рассмотрен ряд случаев, вытекающих из результатов разд. 1, когда удается подобрать два частных решения задачи линейного сопряжения (0.3).

1. Структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для трехмерного вектора

Определение 1. Пусть $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ — кусочно-мероморфное решение задачи (0.3). Будем называть его *решением с тройкой* $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$, если на Γ

$$w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda_1(t), \quad w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \lambda_2(t), \quad w^{3+}(t)/w^{3-}(t) = \lambda_3(t) \tag{1.1}$$

(полагаем, что компонента тройки λ_k равна нулю, не ограничена или является неопределенной, что будем обозначать через 0, ∞, $0/0$, если $w^{k+}(t) \equiv 0$, $w^{k-}(t) \equiv 0$, $w^{k\pm}(t) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, $t \in \Gamma$, соответственно).

Легко видеть, что множество всех кусочно-мероморфных решений задачи (0.3) представляет собой трехмерное векторное пространство V над полем рациональных функций, базисом которого является любая каноническая система решений

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_1(z) = \bigl(v_1^1(z), v_1^2(z), v_1^3(z)\bigr), \quad \mathbf{v}_2(z) = \bigl(v_2^1(z), v_2^2(z), v_2^3(z)\bigr), \\ \mathbf{v}_3(z) = \bigl(v_3^1(z), v_3^2(z), v_3^3(z)\bigr), \end{gathered} \tag{1.2}$$

$\mathbf{v}_i(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \varkappa_3$ ($\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = \varkappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — суммарный индекс матрицы-функции (0.1)). Это векторное пространство может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств V_k, $k = 1, 2, \ldots$, образованных решениями задачи с одной и той же тройкой (1.1) (исключение составляет подпространство V_0, содержащее лишь нулевое решение с тройкой $(0/0, 0/0, 0/0)$, которое будем считать принадлежащим всем V_k). В качестве представителя соответствующего подпространства, как правило, будем брать решение задачи (0.3) $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z), w^3(z))$ без конечных полюсов, имеющее наинизший возможный порядок на бесконечности. Это решение с точностью до мультипликативной постоянной получается домножением на соответствующий полином любого кусочно-мероморфного решения задачи, принадлежащего данному подпространству.

Пусть $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ — два кусочно-мероморфных решения задачи (0.3). Выясним сначала, когда они будут решениями этой задачи с одной и той же тройкой $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ с компонентами, отличными от 0, ∞, $0/0$. Такую тройку в дальнейшем будем называть *невырожденной*. Если

$$\lambda_k(t) = w_1^{k+}(t)/w_1^{k-}(t) = w_2^{k+}(t)/w_2^{k-}(t), \quad k = 1,2,3,$$

то $w_2^k(z) = r_k(z)w_1^k(z)$, где $r_k(z)$, $k = 1,2,3,$ — рациональные функции. Подставляя выраженные отсюда предельные значения $w_2^{k\pm}(t)$, $k = 1,2,3$, в краевые условия (0.3), записанные для $\mathbf{w}_2(z)$, получим, что $\mathbf{w}_1(z)$ является также решением задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t)r(t) & g_{13}(t)R(t) \\ g_{21}(t)\frac{1}{r(t)} & g_{22}(t) & g_{23}(t)\frac{R(t)}{r(t)} \\ g_{31}(t)\frac{1}{R(t)} & g_{32}(t)\frac{r(t)}{R(t)} & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad r(t) = \frac{r_2(t)}{r_1(t)},\ R(t) = \frac{r_3(t)}{r_1(t)}. \tag{1.3}$$

Значит, на Γ имеем $(F(t) - G(t))\mathbf{w}_1^-(t) \equiv 0$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{12}(t)(r(t)-1) & g_{13}(t)(R(t)-1) \\ g_{21}(t)\frac{(1-r(t))}{r(t)} & 0 & g_{23}(t)\frac{(R(t)-r(t))}{r(t)} \\ g_{31}(t)\frac{(1-R(t))}{R(t)} & g_{32}(t)\frac{(r(t)-R(t))}{R(t)} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w}_1^-(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Поэтому на Γ

$$\det(F(t) - G(t)) = (r(t)-1)(R(t)-1)(R(t)-r(t)) \\ \times (g_{13}(t)g_{21}(t)g_{32}(t) - g_{12}(t)g_{23}(t)g_{31}(t))/r(t)R(t) \equiv 0.$$

Возможны следующие случаи.

(1) $r(t) \equiv R(t) \equiv 1$ $(r_1(t) \equiv r_2(t) \equiv r_3(t))$ и $\mathbf{w}_2(z) \equiv r_1(z)\mathbf{w}_1(z)$.

(2) $r(t) \equiv 1$ $(r_1(t) \equiv r_2(t))$, $R(t) \not\equiv 1$. Условия (1.4) принимают вид

$$g_{13}(R-1)w_1^{3-} = 0, \quad g_{23}(R-1)w_1^{3-} = 0, \quad \frac{1-R}{R}\big(g_{31}w_1^{1-} + g_{32}w_1^{2-}\big) = 0. \tag{1.5}$$

Из условия $w_1^{3-}(t) \not\equiv 0$ следуют тождества $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0$, $t \in \Gamma$.

Если $g_{31}(t) \not\equiv 0$, $g_{32}(t) \not\equiv 0$, то отношение

$$g_{31}(t)/g_{32}(t) \tag{1.6}$$

должно быть функцией, мероморфно продолжимой в область D^-,

$$w_1^{2-} = -g_{31}w_1^{1-}/g_{32},$$

а краевые условия (0.3) перепишутся следующим образом:

$$w_1^{1+}(t) = -G_{23}(t)w_1^{1-}(t)/g_{32}(t), \quad w_1^{2+}(t) = G_{13}(t)w_1^{1-}(t)/g_{32}(t), \\ w_1^{3+}(t) = g_{33}(t)w_1^{3-}(t), \quad t \in \Gamma.$$

Здесь через $G_{ij}(t)$ обозначено алгебраическое дополнение элемента $g_{ij}(t)$ матрицы-функции (0.1). Значит, в силу невырожденности тройки (1.1) отношение

$$G_{13}(t)/G_{23}(t) \tag{1.7}$$

должно быть мероморфно продолжимо в область D^+. Тогда при выполнении неравенств

$$g_{33}(t) \neq 0,\ g_{32}(t) \neq 0 \text{ или } g_{31}(t) \neq 0, \quad G_{13}(t) \neq 0 \text{ или } G_{23}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.8}$$

имеют место представления (факторизации [7, с. 109])

$$g_{32}(t) = g_{32}^+(t)g_{32}^-(t), \quad g_{31}(t) = g_{31}^+(t)g_{31}^-(t), \quad g_{33}(t) = g_{33}^+(t)g_{33}^-(t),$$
$$G_{13}(t) = G_{13}^+(t)G_{13}^-(t), \quad G_{23}(t) = G_{23}^+(t)G_{23}^-(t),$$

а вектор-функции $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, определенные на Γ при $g_{32}(t) \neq 0$ соответственно равенствами

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(-\frac{G_{23}G_{13}^+}{G_{13}g_{32}^+}, \frac{G_{13}^+}{g_{32}^+}, sg_{33}^+\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{32}^-}{G_{13}^-}, -\frac{g_{31}g_{32}^-}{g_{32}G_{13}^-}, \frac{s}{g_{33}^-}\right), \quad G_{13}(t) \neq 0,$$
$$\mathbf{w}_1^+ = \left(-\frac{G_{23}^+}{g_{32}^+}, \frac{G_{13}G_{23}^+}{G_{23}g_{32}^+}, sg_{33}^+\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{32}^-}{G_{23}^-}, -\frac{g_{31}g_{32}^-}{g_{32}G_{23}^-}, \frac{s}{g_{33}^-}\right), \quad G_{23}(t) \neq 0,$$
$$\mathbf{w}_2(z) = \big(r_1(z)w_1^1(z), r_1(z)w_1^2(z), r_3(z)w_1^3(z)\big) \tag{1.9}$$

будут решениями задачи (0.3) с тройкой $(-G_{23}/g_{32}, -G_{13}/g_{31}, g_{33})$ (здесь и ниже s — рациональная функция). Если в (1.8) $g_{31}(t) \neq 0$, то решение записывается в виде

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(\frac{G_{23}G_{13}^+}{G_{13}g_{31}^+}, -\frac{G_{13}^+}{g_{31}^+}, sg_{33}^+\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(-\frac{g_{32}g_{31}^-}{g_{31}G_{13}^-}, \frac{g_{31}^-}{G_{13}^-}, \frac{s}{g_{33}^-}\right), \quad G_{13}(t) \neq 0,$$
$$\mathbf{w}_1^+ = \left(\frac{G_{23}^+}{g_{31}^+}, -\frac{G_{13}G_{23}^+}{G_{23}g_{31}^+}, sg_{33}^+\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(-\frac{g_{32}g_{31}^-}{g_{31}G_{23}^-}, \frac{g_{31}^-}{G_{23}^-}, \frac{s}{g_{33}^-}\right), \quad G_{23}(t) \neq 0. \tag{1.10}$$

Пусть $g_{31}(t) \equiv g_{32}(t) \equiv 0$. Тогда $g_{33}(t) \neq 0$ и решения имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \big(v_1^{1+}, v_1^{2+}, sg_{33}^+\big), \quad \mathbf{w}_1^- = \big(v_1^{1-}, v_1^{2-}, s/g_{33}^-\big),$$
$$\mathbf{w}_2(z) = \big(r_1(z)w_1^1(z), r_1(z)w_1^2(z), r_3(z)w_1^3(z)\big),$$

где $\mathbf{v}(z) = (v^1(z), v^2(z))$ — решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Если один из элементов матрицы-функции (1.11) — тождественный нуль или одно из отношений $g_{11}(t)/g_{21}(t)$, $g_{12}(t)/g_{22}(t)$ мероморфно продолжимо в область D^+ либо одно из отношений $g_{11}(t)/g_{12}(t)$, $g_{21}(t)/g_{22}(t)$ мероморфно продолжимо в область D^-, то соответствующая задача линейного сопряжения приводится к задаче с треугольной матрицей-функцией и можно указать явный вид решений задачи (0.3).

(3) $r(t) \not\equiv 1$, $R(t) \equiv 1$ $(r_1(t) \equiv r_3(t))$. Условия (1.4) принимают вид

$$g_{12}(r-1)w_1^{2-} = 0, \quad \frac{1-r}{r}\big(g_{21}w_1^{1-} + g_{23}w_1^{3-}\big) = 0, \quad g_{32}(r-1)w_1^{2-} = 0.$$

Рассуждая аналогично, получим, что $g_{12}(t) \equiv g_{32}(t) \equiv 0$ и при выполнении условий $g_{21}(t) \not\equiv 0$, $g_{23}(t) \not\equiv 0$ отношение

$$g_{21}(t)/g_{23}(t) \tag{1.12}$$

мероморфно продолжимо в область D^-, а отношение

$$G_{12}(t)/G_{32}(t) \tag{1.13}$$

мероморфно продолжимо в область D^+. Тогда выполнение неравенств

$$g_{22}(t)\neq 0,\ g_{21}(t)\neq 0 \text{ или } g_{23}(t)\neq 0,\ G_{12}(t)\neq 0 \text{ или } G_{32}(t)\neq 0,\ t\in\Gamma, \quad (1.14)$$

обеспечивает при $g_{23}(t)\neq 0$ принадлежность решений

$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{32}^+}{g_{23}^+}, sg_{22}^+, \frac{G_{12}G_{32}^+}{G_{32}g_{23}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{23}^-}{G_{32}^-}, \frac{s}{g_{22}^-}, -\frac{g_{21}g_{23}^-}{g_{23}G_{32}^-}\right),\quad G_{32}(t)\neq 0,$$

$$\mathbf{w}_1^+=\left(-\frac{G_{32}G_{12}^+}{G_{12}g_{23}^+}, sg_{22}^+, \frac{G_{12}^+}{g_{23}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(\frac{g_{23}^-}{G_{12}^-}, \frac{s}{g_{22}^-}, -\frac{g_{21}g_{23}^-}{g_{23}G_{12}^-}\right),\quad G_{12}(t)\neq 0,$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\big(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_1(z)w_1^3(z)\big) \quad (1.15)$$

классу решений задачи (0.3) с тройкой $(-G_{32}/g_{23}, g_{22}, -G_{12}/g_{21})$. Если в (1.14) $g_{21}(t)\neq 0$, то решение с указанной тройкой имеет вид

$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{32}^+}{g_{21}^+}, sg_{22}^+, -\frac{G_{12}G_{32}^+}{G_{32}g_{21}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{23}g_{21}^-}{g_{21}G_{32}^-}, \frac{s}{g_{22}^-}, \frac{g_{21}^-}{G_{32}^-}\right),\quad G_{32}(t)\neq 0,$$

$$\mathbf{w}_1^+=\left(\frac{G_{32}G_{12}^+}{G_{12}g_{21}^+}, sg_{22}^+, -\frac{G_{12}^+}{g_{21}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(-\frac{g_{23}g_{21}^-}{g_{21}G_{12}^-}, \frac{s}{g_{22}^-}, \frac{g_{21}^-}{G_{12}^-}\right),\quad G_{12}(t)\neq 0.$$

$$(1.16)$$

Если $g_{21}(t)\equiv g_{23}(t)\equiv 0$, то $g_{22}(t)\neq 0$ и решения имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+=\big(v_1^{1+}, sg_{22}^+, v_1^{3+}\big),\quad \mathbf{w}_1^-=\big(v_1^{1-}, s/g_{22}^-, v_1^{3-}\big),$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\big(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_1(z)w_1^3(z)\big),$$

где $\mathbf{v}(z)=(v^1(z), v^3(z))$ — решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_2(t)=\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{13}(t)\\ g_{31}(t) & g_{33}(t)\end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

которое при выполнении требований, аналогичных требованиям к элементам матрицы-функции (1.11), может быть записано явно.

(4) $R(t)=r(t)\not\equiv 1$ $(r_2(t)\equiv r_3(t))$. Условия (1.4) запишутся в виде

$$(r-1)\big(g_{12}w_1^{2-}+g_{13}w_1^{3-}\big)=0,\quad \frac{1-r}{r}g_{21}w_1^{1-}=0,\quad \frac{1-r}{r}g_{31}w_1^{1-}=0.$$

Тогда $g_{21}(t)\equiv g_{31}(t)\equiv 0$ и при выполнении условий $g_{12}(t)\not\equiv 0$, $g_{13}(t)\not\equiv 0$ отношение

$$g_{12}(t)/g_{13}(t) \quad (1.18)$$

мероморфно продолжимо в область D^-, а отношение

$$G_{21}(t)/G_{31}(t) \quad (1.19)$$

мероморфно продолжимо в область D^+. Значит, выполнение неравенств

$$g_{11}(t)\neq 0,\ g_{12}(t)\neq 0 \text{ или } g_{13}(t)\neq 0,\quad G_{21}(t)\neq 0 \text{ или } G_{31}(t)\neq 0,\quad t\in\Gamma, \quad (1.20)$$

позволяет записать решения задачи (0.3) с тройкой $(g_{11}, -G_{31}/g_{13}, -G_{21}/g_{12})$ при $g_{13}(t)\neq 0$ так:

$$\mathbf{w}_1^+=\left(sg_{11}^+, -\frac{G_{31}^+}{g_{13}^+}, \frac{G_{21}G_{31}^+}{G_{31}g_{13}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(\frac{s}{g_{11}^-}, \frac{g_{13}^-}{G_{31}^-}, -\frac{g_{12}g_{13}^-}{g_{13}G_{31}^-}\right),\quad G_{31}(t)\neq 0,$$

$$\mathbf{w}_1^+=\left(sg_{11}^+, -\frac{G_{31}G_{21}^+}{G_{21}g_{13}^+}, \frac{G_{21}^+}{g_{13}^+}\right),\quad \mathbf{w}_1^-=\left(\frac{s}{g_{11}^-}, \frac{g_{13}^-}{G_{21}^-}, -\frac{g_{12}g_{13}^-}{g_{13}G_{21}^-}\right),\quad G_{21}(t)\neq 0,$$

$$\mathbf{w}_2(z)=\big(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_2(z)w_1^3(z)\big). \quad (1.21)$$

Если в (1.20) $g_{12}(t) \neq 0$, то решение запишется в виде

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, \frac{G_{31}^+}{g_{12}^+}, -\frac{G_{21}G_{31}^+}{G_{31}g_{12}^+}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, -\frac{g_{13}g_{12}^-}{g_{12}G_{31}^-}, \frac{g_{12}^-}{G_{31}^-}\right), \quad G_{31}(t) \neq 0,$$
$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, \frac{G_{31}G_{21}^+}{G_{21}g_{12}^+}, -\frac{G_{21}^+}{g_{12}^+}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{s}{g_{11}^-}, -\frac{g_{13}g_{12}^-}{g_{12}G_{21}^-}, \frac{g_{12}^-}{G_{21}^-}\right), \quad G_{21}(t) \neq 0. \tag{1.22}$$

В случае $g_{12}(t) \equiv g_{13}(t) \equiv 0$, $g_{11}(t) \neq 0$ решения имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(sg_{11}^+, v_1^{2+}, v_1^{3+}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(s/g_{22}^-, v_1^{2-}, v_1^{3-}\right),$$
$$\mathbf{w}_2(z) = \left(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_2(z)w_1^3(z)\right),$$

где $\mathbf{v}(z) = (v^2(z), v^3(z))$ — решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} g_{22}(t) & g_{23}(t) \\ g_{32}(t) & g_{33}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

которое, если элементы матрицы-функции (1.23) удовлетворяют одному из условий, аналогичных условиям, наложенным на элементы матрицы-функции (1.11), может быть записано явно.

(5) Выполняется тождество

$$g_{12}(t)g_{23}(t)g_{31}(t) \equiv g_{13}(t)g_{21}(t)g_{32}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1.24}$$

Из краевых условий (1.4) получаем

$$g_{12}(r-1)w_1^{2-} = -g_{13}(R-1)w_1^{3-}, \quad g_{21}(r-1)w_1^{1-} = g_{23}(R-r)w_1^{3-},$$
$$g_{31}(R-1)w_1^{1-} = -g_{32}(R-r)w_1^{2-}.$$

Если все элементы матрицы-функции (0.1), входящие в эти равенства, отличны от тождественного нуля, то любое из полученных равенств согласно (1.24) является следствием двух других, что приводит нас к условию мероморфной продолжимости в область D^- любых двух отношений

$$g_{12}(t)/g_{13}(t), \quad g_{21}(t)/g_{23}(t), \quad g_{31}(t)/g_{32}(t), \tag{1.25}$$

а краевые условия (0.3) могут быть записаны в виде

$$w_1^{1+} = -\frac{G_{32}}{g_{23}}w_1^{1-}, \quad w_1^{2+} = \frac{G_{13}(R-1)}{g_{32}(R-r)}w_1^{1-}, \quad w_1^{3+} = -\frac{G_{12}(r-1)}{g_{23}(R-r)}w_1^{1-},$$

откуда в силу невырожденности тройки (1.1) следует мероморфная продолжимость в область D^+ отношений

$$g_{23}(t)G_{13}(t)/g_{32}(t)G_{32}(t), \quad G_{12}(t)/G_{32}(t). \tag{1.26}$$

Тогда при выполнении неравенств

$$g_{23}(t) \neq 0, \quad G_{32}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.27}$$

кусочно-мероморфные вектор-функции $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, где

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_1^+ = \left(-\frac{G_{32}^+}{g_{23}^+}, \frac{g_{23}G_{13}G_{32}^+(R-1)}{g_{32}G_{32}g_{23}^+(R-r)}, -\frac{G_{12}G_{32}^+(r-1)}{G_{32}g_{23}^+(R-r)}\right), \\ \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{23}^-}{G_{32}^-}, -\frac{g_{31}g_{23}^-(R-1)}{g_{32}G_{32}^-(R-r)}, \frac{g_{21}g_{23}^-(r-1)}{g_{23}G_{32}^-(R-r)}\right), \\ \mathbf{w}_2(z) = \left(r_1(z)w_1^1(z), r_2(z)w_1^2(z), r_3(z)w_1^3(z)\right) \end{gathered} \tag{1.28}$$

($r = r_2/r_1$, $R = r_3/r_1$, r_1, r_2, r_3 — рациональные функции), будут решениями задачи (0.3) с тройкой $(-G_{32}/g_{23}, -G_{13}/g_{31}, -G_{12}/g_{21})$. Вместо неравенств (1.27) можно потребовать выполнения неравенств $g_{32}(t) \neq 0$, $G_{13}(t) \neq 0$ или $g_{23}(t) \neq 0$, $G_{12}(t) \neq 0$ и записать соответствующий вид решений (1.28).

Пусть выполняются условия

$$g_{12}(t) \equiv g_{13}(t) \equiv 0, \quad g_{21}(t) \not\equiv 0, \quad g_{23}(t) \not\equiv 0, \quad g_{31}(t) \not\equiv 0, \quad g_{32}(t) \not\equiv 0. \tag{1.29}$$

Тогда отношения $g_{21}(t)/g_{23}(t)$, $g_{31}(t)/g_{32}(t)$ мероморфно продолжимы в область D^-. Краевые условия (0.3) в рассматриваемом случае принимают вид

$$w_1^{1+} = g_{11} w_1^{1-}, \quad w_1^{2+} = \frac{G_{13}(R-1)}{g_{32}(R-r)} w_1^{1-}, \quad w_1^{3+} = -\frac{G_{12}(r-1)}{g_{23}(R-r)} w_1^{1-}.$$

Учитывая, что согласно (1.29) $G_{32}(t) = -g_{11}(t) g_{23}(t)$, при выполнении неравенств $g_{11}(t) \neq 0$, $g_{23}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, придем к частному случаю формулы (1.28), непосредственное получение которой потребует лишь выполнения неравенства $g_{11}(t) \neq 0$.

Если выполняются условия

$$g_{12}(t) \not\equiv 0, \quad g_{13}(t) \not\equiv 0, \quad g_{21}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0, \quad g_{31}(t) \not\equiv 0, \quad g_{32}(t) \not\equiv 0, \tag{1.30}$$

то отношения

$$g_{12}(t)/g_{13}(t), \quad g_{32}(t)/g_{31}(t) \tag{1.31}$$

мероморфно продолжимы в область D^-, а краевые условия (0.3) принимают вид

$$w_1^{1+} = \frac{G_{23}(R-r)}{g_{31}(R-1)} w_1^{2-}, \quad w_1^{2+} = g_{22} w_1^{2-}, \quad w_1^{3+} = \frac{G_{21}(r-1)}{g_{13}(R-1)} w_1^{2-},$$

что приводит к условию мероморфной продолжимости в область D^+ отношений

$$G_{21}(t)/g_{13}(t) g_{22}(t), \quad G_{23}(t)/g_{22}(t) g_{31}(t). \tag{1.32}$$

Значит, при выполнении неравенства

$$g_{22}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.33}$$

а также (1.30) и условий, наложенных на отношения (1.31), (1.32), решения задачи (0.3) с тройкой $(-G_{23}/g_{32}, g_{22}, -G_{21}/g_{12})$ запишутся так:

$$\begin{gathered}
\mathbf{w}_1^+ = \left(\frac{G_{23} g_{22}^+ (R-r)}{g_{22} g_{31} (R-1)}, g_{22}^+, \frac{G_{21} g_{22}^+ (r-1)}{g_{13} g_{23} (R-1)} \right), \\
\mathbf{w}_1^- = \left(-\frac{g_{32}(R-r)}{g_{31} g_{22}^- (R-1)}, \frac{1}{g_{22}^-}, -\frac{g_{12}(r-1)}{g_{13} g_{22}^- (R-1)} \right), \\
\mathbf{w}_2(z) = \big(r_1(z) w_1^1(z), r_2(z) w_1^2(z), r_3(z) w_1^3(z) \big),
\end{gathered} \tag{1.34}$$

в которых входящие в них рациональные функции определены в (1.28).

В случае выполнения условий

$$g_{12}(t) \not\equiv 0, \quad g_{13}(t) \not\equiv 0, \quad g_{21}(t) \not\equiv 0, \quad g_{23}(t) \not\equiv 0, \quad g_{31}(t) \equiv g_{32}(t) \equiv 0 \tag{1.35}$$

приходим к мероморфной продолжимости в область D^- отношений

$$g_{13}(t)/g_{12}(t), \quad g_{21}(t)/g_{23}(t), \tag{1.36}$$

а также равенствам

$$w_1^{1+} = -\frac{G_{32}(R-r)}{g_{21}(r-1)} w_1^{3-}, \quad w_1^{2+} = \frac{G_{31}(R-1)}{g_{12}(r-1)} w_1^{3-}, \quad w_1^{3+} = g_{33} w_1^{3-}.$$

Таким образом, отношения

$$G_{32}(t)/g_{21}(t)g_{33}(t), \quad G_{31}(t)/g_{12}(t)g_{33}(t) \tag{1.37}$$

оказываются мероморфно продолжимыми в область D^+, и при выполнении неравенства

$$g_{33}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.38}$$

а также (1.35) и условий, наложенных на отношения (1.36), (1.37), решения задачи (0.3) с тройкой $(-G_{32}/g_{23}, -G_{31}/g_{13}, g_{33})$ и рациональными функциями, определенными в (1.28), имеют вид

$$\begin{gathered} \mathbf{w}_1^+ = \left(-\frac{G_{32} g_{33}^+ (R-r)}{g_{21} g_{33}(r-1)}, \frac{G_{31} g_{33}^+ (R-1)}{g_{12} g_{33}(r-1)}, g_{33}^+ \right), \\ \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{23}(R-r)}{g_{21} g_{33}^-(r-1)}, -\frac{g_{13}(R-1)}{g_{12} g_{33}^-(r-1)}, \frac{1}{g_{33}^-} \right), \\ \mathbf{w}_2(z) = \big(r_1(z) w_1^1(z), r_2(z) w_1^2(z), r_3(z) w_1^3(z) \big). \end{gathered} \tag{1.39}$$

Заметим, что формулы (1.34), (1.39) можно было также получить как частный случай соответствующим образом записанных формул (1.28).

Не останавливаясь на построении решений в случае, когда матрицы-функции (1.11), (1.17), (1.23) удовлетворяют одному из перечисленных выше требований, сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы кусочно-мероморфные решения* $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ *задачи линейного сопряжения* (0.3) *с матрицей-функцией* (0.1), *заданной на простом гладком замкнутом контуре* Γ, *элементы которой* $g_{ij}(t)$ *и их алгебраические дополнения* $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, *H-непрерывны, были решениями с одинаковой невырожденной тройкой* (1.1),

(1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{w}_2(z) = r(z)\mathbf{w}_1(z)$, $r(z)$ — *рациональная функция;*

(2) *необходимо, чтобы* $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0$, $g_{31}(t)/g_{32}(t)$, $G_{13}(t)/G_{23}(t)$ *были мероморфно продолжимы в области* D^- *и* D^+ *соответственно, а при выполнении неравенств* $g_{33}(t) \neq 0$, $g_{32}(t) \neq 0$ *или* $g_{31}(t) \neq 0$, $G_{13}(t) \neq 0$ *или* $G_{23}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, *эти условия будут также достаточными и при* $g_{32}(t) \neq 0$ *решения имеют вид* (1.9), *а при* $g_{31}(t) \neq 0$ — (1.10);

(3) *необходимо, чтобы* $g_{12}(t) \equiv g_{32}(t) \equiv 0$, $g_{21}(t)/g_{23}(t)$, $G_{12}(t)/G_{32}(t)$ *были мероморфно продолжимы в области* D^- *и* D^+ *соответственно, а при выполнении неравенств* $g_{22}(t) \neq 0$, $g_{21}(t) \neq 0$ *или* $g_{23}(t) \neq 0$, $G_{12}(t) \neq 0$ *или* $G_{32}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, *эти условия будут также достаточными и при* $g_{23}(t) \neq 0$ *решения имеют вид* (1.15), *а при* $g_{21}(t) \neq 0$ — (1.16);

(4) *необходимо, чтобы* $g_{21}(t) \equiv g_{31}(t) \equiv 0$, $g_{12}(t)/g_{13}(t)$, $G_{21}(t)/G_{31}(t)$ *были мероморфно продолжимы в области* D^- *и* D^+ *соответственно, а при выполнении неравенств* $g_{11}(t) \neq 0$, $g_{12}(t) \neq 0$ *или* $g_{13}(t) \neq 0$, $G_{21}(t) \neq 0$ *или* $G_{31}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, *эти условия будут также достаточными и при* $g_{13}(t) \neq 0$ *решения имеют вид* (1.21), *а при* $g_{12}(t) \neq 0$ — (1.22);

(5) *необходимо, чтобы выполнялось тождество*

$$g_{12}(t) g_{23}(t) g_{31}(t) \equiv g_{13}(t) g_{21}(t) g_{32}(t),$$

$t \in \Gamma$, в котором входящие в него элементы отличны от тождественного нуля, а отношения $g_{21}(t)/g_{23}(t)$, $g_{31}(t)/g_{32}(t)$ и $g_{23}(t)G_{13}(t)/g_{32}(t)G_{32}(t)$, $G_{12}(t)/G_{32}(t)$ были мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно; при выполнении неравенств $g_{23}(t) \neq 0$, $G_{32}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, эти условия будут также достаточными и решения имеют вид (1.28);

(6) *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$g_{12}(t) \equiv g_{13}(t) \equiv 0,\ g_{21}(t) \not\equiv 0,\ g_{23}(t) \not\equiv 0,\ g_{31}(t) \not\equiv 0,\ g_{32}(t) \not\equiv 0,$$

отношения $g_{21}(t)/g_{23}(t)$, $g_{31}(t)/g_{32}(t)$ и $G_{13}(t)/g_{11}(t)g_{32}(t)$, $G_{12}(t)/g_{11}(t)g_{23}(t)$ были мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, а при выполнении неравенства $g_{11}(t) \neq 0$ эти условия будут также достаточными и решения содержатся в формуле (1.28);

(7) *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$g_{12}(t) \not\equiv 0,\ g_{13}(t) \not\equiv 0,\ g_{21}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0,\ g_{31}(t) \not\equiv 0,\ g_{32}(t) \not\equiv 0,$$

отношения $g_{12}(t)/g_{13}(t)$, $g_{32}(t)/g_{31}(t)$ и $G_{21}(t)/g_{13}(t)g_{22}(t)$, $G_{23}(t)/g_{22}(t)g_{31}(t)$ были мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, а при выполнении неравенства (1.33) *эти условия будут также достаточными и решения имеют вид* (1.34);

(8) *необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$g_{12}(t) \not\equiv 0,\ g_{13}(t) \not\equiv 0,\ g_{21}(t) \not\equiv 0,\ g_{23}(t) \not\equiv 0,\ g_{31}(t) \equiv g_{32}(t) \equiv 0,$$

отношения $g_{13}(t)/g_{12}(t)$, $g_{21}(t)/g_{23}(t)$ и $G_{32}(t)/g_{21}(t)g_{33}(t)$, $G_{31}(t)/g_{12}(t)g_{33}(t)$ были мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, а при выполнении неравенства (1.38) *эти условия будут также достаточными и решения имеют вид* (1.39).

Замечание 1. П. (1) теоремы очевиден для любой H-непрерывной матрицы-функции (0.1) и любого решения задачи (0.3), в том числе и с вырожденной тройкой (1.1). Поэтому в пп. (2)–(8), полученных при различных дополнительных ограничениях на элементы этой матрицы-функции, решения $\mathbf{w}(z) = s_1(z)\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}(z) = s_2(z)\mathbf{w}_2(z)$ $(s_1(z), s_2(z)$ — рациональные функции) будут решениями задачи (0.3) с одинаковыми тройками (1.1). Однако $\mathbf{w}_2(z) \not\equiv s(z)\mathbf{w}_1(z)$ ни для какой рациональной функции $s(z)$ и пп. (2)–(8) не являются следствием п. (1). Кроме того, пп. (2)–(5) не вытекают друг из друга, так как в них определены решения задачи (0.3) с разными для каждого случая тройками. Пп. (6)–(8) можно рассматривать как следствия п. (5), и они приводятся для удобства их дальнейшего применения.

Замечание 2. Случай обращения соответствующих элементов матрицы-функции (0.1) и (или) их алгебраических дополнений в конечном числе точек контура в нуль определенного характера может быть исследован с привлечением теории краевой задачи Римана в исключительных случаях [8, с. 130].

Не ставя перед собой цель описания всех условий существования решений задачи (0.3) с одинаковой вырожденной тройкой (1.1), остановимся лишь на некоторых из них.

Пусть $w_1^{3-}(z) \equiv 0$, $z \in D^-$, для решения $\mathbf{w}_1(z) = \big(w_1^1(z), w_1^2(z), w_1^3(z)\big)$. Ограничимся случаем выполнения неравенств

$$G_{13}(t) \not\equiv 0, \quad G_{23}(t) \not\equiv 0, \quad G_{33}(t) \not\equiv 0. \tag{1.40}$$

Тогда краевые условия (0.3) приводят к соотношению

$$G_{13}(t)w_1^{1+}(t) + G_{23}(t)w_1^{2+}(t) + G_{33}(t)w_1^{3+}(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma, \tag{1.41}$$

и невозможности обращения в тождественный нуль в области D^+ одновременно двух компонент ${\mathbf{w}_1}^+(z)$.

Пусть $w_1^{3+}(z) \equiv 0$, $z \in D^+$, и выполнены неравенства

$$g_{31}(t) \not\equiv 0,\ g_{32}(t) \not\equiv 0, \tag{1.42}$$

тогда отношения (1.6), (1.7) будут мероморфно продолжимыми в области D^- и D^+ соответственно, а решения задачи (0.3) с тройкой $(-G_{23}/g_{32}, -G_{13}/g_{31}, 0/0)$ имеют при выполнении неравенств

$$g_{32}(t) \neq 0, \quad G_{13}(t) \neq 0 \quad (G_{23}(t) \neq 0), \quad t \in \Gamma, \tag{1.43}$$

вид первого (соответственно второго) равенства (1.9) при $s(z) \equiv 0$.

Если выполняются условия

$$g_{31}(t) \equiv 0,\ g_{32}(t) \not\equiv 0 \quad (g_{31}(t) \not\equiv 0,\ g_{32}(t) \equiv 0), \tag{1.44}$$

то $w_1^{2-}(z) \equiv 0 \quad (w_1^{1-}(z) \equiv 0,\ z \in D^-)$ и отношение

$$g_{21}(t)/g_{11}(t) \quad (g_{22}(t)/g_{12}(t)) \tag{1.45}$$

мероморфно продолжимо в область D^+, а при выполнении на Γ неравенств

$$g_{32}(t) \neq 0,\ g_{11}(t) \neq 0 \text{ или } g_{21}(t) \neq 0 \quad (g_{31}(t) \neq 0,\ g_{12}(t) \neq 0 \text{ или } g_{22}(t) \neq 0) \tag{1.46}$$

решения содержатся при $s(z) \equiv 0$ во второй (соответственно первой) формуле (1.9) ((1.10)).

Отметим, что если эти формулы получать непосредственно, то от условий $g_{32}(t) \neq 0$ и $g_{31}(t) \neq 0$ удается избавиться.

Пусть $w_1^{2+}(z) \equiv 0$, $z \in D^+$. Рассуждая аналогично, получим, что при выполнении неравенств $g_{21}(t) \not\equiv 0$, $g_{22}(t) \not\equiv 0$ отношения

$$g_{21}(t)/g_{22}(t), \quad G_{13}(t)/G_{33}(t) \tag{1.47}$$

мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, а решения, например при выполнении условий

$$g_{22}(t) \neq 0, \quad G_{33}(t) \neq 0, \tag{1.48}$$

имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(\frac{G_{33}^+}{g_{22}^+}, 0, -\frac{G_{13}G_{33}^+}{G_{33}g_{22}^+}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{22}^-}{G_{33}^-}, -\frac{g_{21}g_{22}^-}{g_{22}G_{33}^-}, 0\right), \quad \mathbf{w}_2 = r\mathbf{w}_1. \tag{1.49}$$

Если $g_{21}(t) \equiv 0$, $g_{22}(t) \not\equiv 0$ ($g_{21}(t) \not\equiv 0$, $g_{22}(t) \equiv 0$), то отношение $g_{31}(t)/g_{11}(t)$ ($g_{33}(t)/g_{12}(t)$) мероморфно продолжимо в область D^+ и при выполнении неравенства $g_{11}(t) \neq 0$ ($g_{12}(t) \neq 0$) решения имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{w}_1^+ = \left(g_{11}^+, 0, \frac{g_{31}g_{11}^+}{g_{11}}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{1}{g_{11}^-}, 0, 0\right)\\ (\mathbf{w}_1^+ = \left(g_{12}^+, 0, \frac{g_{33}g_{12}^+}{g_{12}}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(0, \frac{1}{g_{12}^-}, 0\right)),\\ \mathbf{w}_2 = r\mathbf{w}_1.\end{gathered} \tag{1.50}$$

Пусть $w_1^{1+}(z) \equiv 0$, $z \in D^+$, тогда при $g_{11}(t) \not\equiv 0$, $g_{12}(t) \not\equiv 0$ отношения

$$g_{11}(t)/g_{12}(t), \quad G_{23}(t)/G_{33}(t) \tag{1.51}$$

мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно, а решения при выполнении условий

$$g_{12}(t) \neq 0, \quad G_{33}(t) \neq 0 \tag{1.52}$$

имеют вид

$$\mathbf{w}_1^+ = \left(0, -\frac{G_{33}^+}{g_{12}^+}, \frac{G_{23}G_{33}^+}{G_{33}g_{12}^+}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{g_{12}^-}{G_{33}^-}, -\frac{g_{11}g_{12}^-}{g_{12}G_{33}^-}, 0\right), \quad \mathbf{w}_2 = r\mathbf{w}_1. \tag{1.53}$$

Если $g_{11}(t) \equiv 0$, $g_{12}(t) \not\equiv 0$ ($g_{11}(t) \not\equiv 0$, $g_{12}(t) \equiv 0$), то отношение $g_{31}(t)/g_{21}(t)$ ($g_{32}(t)/g_{22}(t)$) мероморфно продолжимо в область D^+ и при выполнении неравенства $g_{21}(t) \neq 0$ ($g_{22}(t) \neq 0$) решения имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{w}_1^+ = \left(0, g_{21}^+, \frac{g_{31}g_{21}^+}{g_{21}}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(\frac{1}{g_{21}^-}, 0, 0\right) \\
\left(\mathbf{w}_1^+ = \left(0, g_{22}^+, \frac{g_{33}g_{22}^+}{g_{22}}\right), \quad \mathbf{w}_1^- = \left(0, \frac{1}{g_{22}^-}, 0\right)\right), \\
\mathbf{w}_2 = r\mathbf{w}_1.
\end{gathered} \tag{1.54}$$

Если искать решения задачи (0.3) с условием $w_1^{2-}(z) \equiv 0$, $z \in D^-$ ($w_1^{1-}(z) \equiv 0$, $z \in D^-$), то при $w_1^{2+}(z) \equiv 0$, $z \in D^+$ ($w_1^{1+}(z) \equiv 0$, $z \in D^+$) это решение запишется как частный случай формул (1.15), (1.16) (соответственно (1.21), (1.22)) при $s(z) \equiv 0$. Случай других нулевых «плюсовых» компонент искомого решения исследуется, как в случае $w_1^{3-}(z) \equiv 0$, $z \in D^-$.

2. Построение канонической системы решений задачи (0.3) по двум ее решениям

Пусть $\mathbf{w}_i(z) = \big(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z)\big)$, $i = 1, 2$, — решения задачи (0.3), являющиеся представителями различных подпространств векторного пространства V. Рассмотрим разности

$$w_{ij}(z) = w_1^i(z)w_2^j(z) - w_1^j(z)w_2^i(z), \quad i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j \quad (w_{ij}(z) = -w_{ji}(z)). \tag{2.1}$$

Отметим тождества для введенных кусочно-аналитических в конечной плоскости функций (2.1):

$$w_i^1(z)w_{23}(z) + w_i^2(z)w_{31}(z) + w_i^3(z)w_{12}(z) \equiv 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

Покажем, что согласно выбору решений $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ одновременно не могут выполняться тождества

$$w_{12}(z) \equiv 0, \quad w_{23}(z) \equiv 0, \quad w_{31}(z) \equiv 0,$$

а значит, тождества

$$w_{12}^+(t) \equiv 0, \quad w_{23}^+(t) \equiv 0, \quad w_{31}^+(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.3}$$

$$w_{12}^-(t) \equiv 0, \quad w_{23}^-(t) \equiv 0, \quad w_{31}^-(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Действительно, из тождеств (2.3), (2.4) вытекает, что если компоненты решения $\mathbf{w}_1(z)$ не имеют нулей на контуре, то отношения

$$\frac{w_2^{1+}(t)}{w_1^{1+}(t)} \equiv \frac{w_2^{2+}(t)}{w_1^{2+}(t)} \equiv \frac{w_2^{3+}(t)}{w_1^{3+}(t)}, \quad \frac{w_2^{1-}(t)}{w_1^{1-}(t)} \equiv \frac{w_2^{2-}(t)}{w_1^{2-}(t)} \equiv \frac{w_2^{3-}(t)}{w_1^{3-}(t)}, \quad t \in \Gamma,$$

суть H-непрерывные предельные значения функций $f^{\pm}(t)$, мероморфно продолжимых в область D^+ и D^- соответственно. В противном случае вместо решения $\mathbf{w}_2(z)$ следует взять решение $p(z)\mathbf{w}_2(z)$, где $p(z)$ — полином, нули которого «гасят» в этих отношениях контурные нули компонент решения $\mathbf{w}_1(z)$ либо обращают их в соответствующих точках контура в нуль. Тогда $\mathbf{w}_2^{\pm}(t) \equiv f^{\pm}(t)\mathbf{w}_1^{\pm}(t)$ на Γ. Так как $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ — решения задачи (0.2), получим

$$f^+(t)\mathbf{w}_1^+(t) = G(t)f^-(t)\mathbf{w}_1^-(t) = f^-(t)G(t)\mathbf{w}_1^-(t).$$

Поэтому $f^+(t) \equiv f^-(t)$ на Γ. Значит, $f^+(z) \equiv f^-(z) \equiv r(z)$ — рациональная функция и $\mathbf{w}_2(z) \equiv r(z)\mathbf{w}_1(z)$, что противоречит выбору этих решений. Кроме того, из выполнения одного из тождеств (2.3) или (2.4) следует выполнение другого. В самом деле, если, например, выполняются тождества (2.4), то $\mathbf{w}_2^-(t) \equiv f^-(t)\mathbf{w}_1^-(t)$. Но тогда из краевого условия (0.2) вытекает, что $\mathbf{w}_2^+(t) \equiv f^-(t)\mathbf{w}_1^+(t)$, где $f^-(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^-. Поэтому $f^-(t) = r(t)$ — рациональная функция и $\mathbf{w}_2(z) \equiv r(z)\mathbf{w}_1(z)$, откуда следуют тождества (2.3).

Предположим, что решения $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ таковы, что для разностей (2.1) выполняются неравенства

$$w_{ij}^+(t) \neq 0, \quad w_{ls}^-(t) \neq 0, \quad i \neq j,\ l \neq s,\ t \in \Gamma, \tag{2.5}$$

для некоторых значений индексов i, j, l, s. Кроме того, для упрощения дальнейшего исследования дополнительно будем предполагать, что соответствующие разности (2.1) также не обращаются в нуль в области D^+ и в конечной части области D^-.

Предложение. *Если $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ — решения задачи линейного сопряжения* (0.2), *являющиеся представителями различных подпространств векторного пространства V кусочно-мероморфных решений задачи, для которых при некоторых значениях индексов i, j, l, s разности* (2.1) *не обращаются в нуль на контуре и в конечной части плоскости, то каноническая система решений задачи* (0.3) *может быть построена в замкнутой форме.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_i(z) = \big(w_i^1(z), w_i^2(z), w_i^3(z)\big)$, $i = 1, 2,$ — решения задачи (0.3) порядков k_1 и k_2 на бесконечности, являющиеся представителями различных подпространств векторного пространства V кусочно-мероморфных решений этой задачи. Разложения этих решений по функциям искомой канонической системы решений (1.2) имеют вид

$$\mathbf{w}_i(z) = p_{i1}(z)\mathbf{v}_1(z) + p_{i2}(z)\mathbf{v}_2(z) + p_{i3}(z)\mathbf{v}_3(z), \quad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

где $p_{ij}(z)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3,$ — некоторые полиномы.

Обозначим через $\Delta^{\pm}(z)$ определители канонической матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} v_1^1(z) & v_2^1(z) & v_3^1(z) \\ v_1^2(z) & v_2^2(z) & v_3^2(z) \\ v_1^3(z) & v_2^3(z) & v_3^3(z) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}, \quad \Delta(t) = \det G(t) = \frac{\Delta^+(t)}{\Delta^-(t)}, \quad t \in \Gamma \tag{2.8}$$

(порядок Δ^- на бесконечности равен $-\varkappa$). Пусть $\Delta_{ij}(z)$ — алгебраическое дополнение элемента $v_j^i(z)$ матрицы-функции (2.7).

Разрешая разложения (2.6) относительно полиномов $p_{ij}(z)$, $j = 1, 2, 3$, придем к равенствам

$$p_{i1}(z) = \big(w_i^1(z)\Delta_{11}(z) + w_i^2(z)\Delta_{21}(z) + w_i^3(z)\Delta_{31}(z)\big)/\Delta(z), \tag{2.9}$$

$$p_{i2}(z) = \big(w_i^1(z)\Delta_{12}(z) + w_i^2(z)\Delta_{22}(z) + w_i^3(z)\Delta_{32}(z)\big)/\Delta(z), \tag{2.10}$$

$$p_{i3}(z) = \big(w_i^1(z)\Delta_{13}(z) + w_i^2(z)\Delta_{23}(z) + w_i^3(z)\Delta_{33}(z)\big)/\Delta(z), \tag{2.11}$$

где $i = 1, 2$. Согласно (2.6) получаем

$$\begin{aligned} p_{i2}(z)\Delta_{13}(z) &= p_{i2}(z)\big(v_1^2(z)v_2^3(z) - v_1^3(z)v_2^2(z)\big) \\ &= v_1^2(z)\big(w_i^3(z) - p_{i1}(z)v_1^3(z) - p_{i3}(z)v_3^3(z)\big) \\ &\qquad - v_1^3(z)\big(w_i^2(z) - p_{i1}(z)v_1^2(z) - p_{i3}(z)v_3^2(z)\big), \end{aligned}$$

откуда

$$p_{i2}(z)\Delta_{13}(z) = v_1^2(z)w_i^3(z) - v_1^3(z)w_i^2(z) + p_{i3}(z)\Delta_{12}(z). \tag{2.12}$$

Полагая в этих равенствах $i = 1$ и $i = 2$, исключая $\Delta_{13}(z)$, а также вводя обозначение

$$p(z) = p_{12}(z)p_{23}(z) - p_{13}(z)p_{22}(z), \tag{2.13}$$

приходим к равенству

$$p\Delta_{12} = v_1^2\big(p_{22}w_1^3 - p_{12}w_2^3\big) - v_1^3\big(p_{22}w_1^2 - p_{12}w_2^2\big).$$

Аналогично

$$p_{i2}(z)\Delta_{23}(z) = v_1^3(z)w_i^1(z) - v_1^1(z)w_i^3(z) + p_{i3}(z)\Delta_{22}(z), \tag{2.14}$$

$$p_{i2}(z)\Delta_{33}(z) = v_1^1(z)w_i^2(z) - v_1^2(z)w_i^1(z) + p_{i3}(z)\Delta_{32}(z). \tag{2.15}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} p\Delta_{22} &= v_1^3\big(p_{22}w_1^1 - p_{12}w_2^1\big) - v_1^1\big(p_{22}w_1^3 - p_{12}w_2^3\big), \\ p\Delta_{32} &= v_1^1\big(p_{22}w_1^2 - p_{12}w_2^2\big) - v_1^2\big(p_{22}w_1^1 - p_{12}w_2^1\big). \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения $\Delta_{k2}(z)$, $k = 1, 2, 3$, в любое из равенств (2.10) и учитывая обозначения (2.1), получим

$$p(z)\Delta(z) = v_1^1(z)w_{23}(z) + v_1^2(z)w_{31}(z) + v_1^3(z)w_{12}(z). \tag{2.16}$$

Если $p_{12}(z) \equiv 0$, $p_{22}(z) \not\equiv 0$, то либо $p_{13}(z) \not\equiv 0$, либо в силу выбора решения $\mathbf{w}_1(z)$ будет $\mathbf{v}_1(z) \equiv \mathbf{w}_1(z)$. Подставляя в первом случае найденные из (2.12), (2.14), (2.15) при $i = 1$ значения $p_{13}(z)\Delta_{12}(z)$, $p_{13}(z)\Delta_{22}(z)$, $p_{13}(z)\Delta_{32}(z)$ в равенство (2.10) при $i = 2$, придем к частному случаю формулы (2.16) с $p(z) = -p_{13}(z)p_{22}(z)$. Аналогично рассматриваются случай $p_{22}(z) \equiv 0$, $p_{12}(z) \not\equiv 0$ и случай $p_{12}(z) \equiv 0$, $p_{22}(z) \equiv 0$, причем в последнем для обоснования формулы (2.16) при $p(z) \equiv 0$ следует учесть, что хотя бы один из полиномов $p_{i3}(z)$, $i = 1, 2$, не тождественно нулевой. Из формулы (2.16), фактически связывающей три решения задачи (0.2), вытекает, что если $\mathbf{v}_1(z) \equiv \mathbf{w}_1(z)$ или $\mathbf{v}_1(z) \equiv \mathbf{w}_2(z)$ либо

$\mathbf{v}_1(z)$ является линейной комбинацией этих решений с постоянными коэффициентами, то $p(z) \equiv 0$ и приходим к тождествам (2.2). Из (2.16) также вытекают на Γ равенства

$$p(t)\Delta^+(t) = v_1^{1+}(t)w_{23}^+(t) + v_1^{2+}(t)w_{31}^+(t) + v_1^{3+}(t)w_{12}^+(t), \tag{2.17}$$

$$p(t)\Delta^-(t) = v_1^{1-}(t)w_{23}^-(t) + v_1^{2-}(t)w_{31}^-(t) + v_1^{3-}(t)w_{12}^-(t). \tag{2.18}$$

Перейдем к построению первой вектор-функции канонической системы решений (1.2). Отметим прежде всего, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда для выбранных решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ выполняются неравенства

$$w_{12}^+(z) \neq 0, \quad z \in D^+ \cup \Gamma, \quad w_{12}^-(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}. \tag{2.19}$$

Действительно, обозначим через $F_{(i,j,k)}$ перестановочную матрицу третьего порядка, компоненты индекса которой $i \neq j \neq k$ принимают значения $1, 2, 3$, а ее ненулевыми элементами в первой, второй и третьей строках являются соответственно элементы $f_{1i} = f_{2j} = f_{3k} = 1$. При умножении матрицы-функции $G(t)$ на матрицу $F_{(i,j,k)}$ слева первой становится строка матрицы-функции $G(t)$ с номером i, второй — с номером j, а третьей — с номером k, а при умножении ее на $F_{(i,j,k)}$ справа первым становится столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса, равной 1, вторым — столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса, равной 2, и третьим — столбец, номер которого определяется номером компоненты индекса, равной 3. Обратная к $F_{(i,j,k)}$ матрица совпадает с транспонированной: $F_{(i,j,k)}^{-1} = F'_{(i,j,k)}$. Пусть, например, $w_{ij}^+(z) \neq 0$ и $w_{i_1j_1}^-(z) \neq 0$ на контуре и в соответствующих областях конечной плоскости. Тогда для матрицы-функции $\widetilde{G}(t) = F_{(i,j,k)}G(t)F'_{(i_1,j_1,k_1)}$ решения соответствующей задачи линейного сопряжения

$$\widetilde{\mathbf{w}}_m^+(z) = F_{(i,j,k)}\mathbf{w}_m^+(z), \quad \widetilde{\mathbf{w}}_m^-(z) = F_{(i_1,j_1,k_1)}\mathbf{w}_m^-(z), \quad m = 1, 2,$$

будут удовлетворять неравенствам (2.19), причем если $\widetilde{X}(z)$ — каноническая матрица задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией $\widetilde{G}(t)$. Тогда, очевидно, матрицы-функции

$$X^+(z) = F_{(i,j,k)}^{-1}\widetilde{X}^+(z), \quad X^-(z) = F_{(i_1,j_1,k_1)}\widetilde{X}^-(z)$$

определяют каноническую матрицу задачи (0.2).

Исключая $v_1^{3-}(t)$ из первого и второго краевых условий (0.3), записанных для $\mathbf{v}_1(z)$, и учитывая обозначение (2.18), придем на Γ к задаче линейного сопряжения

$$v_1^{1+} = \frac{w_1^{1+}w_2^{2-} - w_2^{1+}w_1^{2-}}{w_{12}^-}v_1^{1-} + \frac{w_2^{1+}w_1^{1-} - w_1^{1+}w_2^{1-}}{w_{12}^-}v_1^{2-} + \frac{g_{13}\Delta^- p}{w_{12}^-},$$

$$v_1^{2+} = \frac{w_1^{2+}w_2^{2-} - w_2^{2+}w_1^{2-}}{w_{12}^-}v_1^{1-} + \frac{w_2^{2+}w_1^{1-} - w_1^{2+}w_2^{1-}}{w_{12}^-}v_1^{2-} + \frac{g_{23}\Delta^- p}{w_{12}^-}.$$

Вводя новые неизвестные функции

$$\Omega^+ = \bigl(v_1^{1+}, v_1^{2+}\bigr), \tag{2.20}$$

$$W^{1-} = \frac{w_2^{2-}v_1^{1-} - w_2^{1-}v_1^{2-}}{w_{12}^-}, \quad W^{2-} = -\frac{w_1^{2-}v_1^{1-} - w_1^{1-}v_1^{2-}}{w_{12}^-}, \tag{2.21}$$

получим задачу линейного сопряжения

$$\Omega^+(t) = F(t)\mathbf{W}^-(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{W}^-(t) = (W^{1-}(t), W^{2-}(t)), \quad t \in \Gamma, \tag{2.22}$$

с аналитической в D^+ матрицей-функцией

$$F(t) = \begin{pmatrix} w_1^{1+}(t) & w_2^{1+}(t) \\ w_1^{2+}(t) & w_2^{2+}(t) \end{pmatrix}, \quad \det F(t) = w_{12}^+(t) \neq 0, \ t \in \Gamma,$$

и вектор-функцией $\mathbf{f}(t) = (g_{13}(t)\Delta^-(t)p(t)/w_{12}^-(t), g_{23}(t)\Delta^-(t)p(t)/w_{12}^-(t))$.

Полагая на Γ

$$\mathbf{W}^+(t) = F^{-1}(t)\Omega^+(t) = (W^{1+}(t), W^{2+}(t)), \tag{2.23}$$

где

$$W^{1+} = \frac{w_2^{2+}v_1^{1+} - w_2^{1+}v_1^{2+}}{w_{12}^+}, \quad W^{2+} = -\frac{w_1^{2+}v_1^{1+} - w_1^{1+}v_1^{2+}}{w_{12}^+}, \tag{2.24}$$

придем к задаче «о скачке»:

$$\mathbf{W}^+(t) = \mathbf{W}^-(t) + \mathbf{g}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2.25}$$

с вектор-функцией

$$\mathbf{g} = F^{-1}\mathbf{f} = \left(\frac{\big(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}, -\frac{\big(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right).$$

Так как первая вектор-функция канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z)$ имеет наинизший возможный порядок на бесконечности, то $-\varkappa_1 \leq \min(k_1, k_2)$ и в общем случае решение задачи (2.25) согласно (2.19), (2.21), (2.1) следует искать в классе функций, ограниченных на бесконечности. Если заведомо $-\varkappa_1 < \min(k_1, k_2)$, например, при k_1, k_2 и $\varkappa$, большем нуля, то решение задачи ищем в классе функций, исчезающих на бесконечности. Тогда на Γ

$$\begin{aligned} W^{1+} &= P\left[\frac{\big(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + c, \\ W^{2+} &= -P\left[\frac{\big(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + d, \\ W^{1-} &= -Q\left[\frac{\big(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + c, \\ W^{2-} &= Q\left[\frac{\big(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + d, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где c, d — постоянные, $P = (I+S)/2$, $Q = (I-S)/2$, I — единичный, S — сингулярный операторы. Таким образом, из (2.26), (2.21), (2.24), (2.17), (2.18) получим представления для первой вектор-функции канонической системы (1.2):

$$\begin{aligned} v_1^{1+} = w_1^{1+}\left(P\left[\frac{\big(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + c\right) \\ + w_2^{1+}\left(-P\left[\frac{\big(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+}\big)\Delta^-p}{w_{12}^+w_{12}^-}\right] + d\right), \end{aligned}$$

$$v_1^{2+} = w_1^{2+}\biggl(P\biggl[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{2+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + c\biggr) \\ + w_2^{2+}\biggl(-P\biggl[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + d\biggr),$$

$$v_1^{3+} = (p\Delta^+ - v_1^{1+}w_{23}^+ - v_1^{2+}w_{31}^+)/w_{12}^+, \tag{2.27}$$

$$v_1^{1-} = w_1^{1-}\biggl(-Q\biggl[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + c\biggr) \\ + w_2^{1-}\biggl(Q\biggl[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + d\biggr),$$

$$v_1^{2-} = w_1^{2-}\biggl(-Q\biggl[\frac{(g_{13}w_2^{2+} - g_{23}w_2^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + c\biggr) \\ + w_2^{2-}\biggl(Q\biggl[\frac{(g_{13}w_1^{2+} - g_{23}w_1^{1+})\Delta^- p}{w_{12}^+ w_{12}^-}\biggr] + d\biggr),$$

$$v_1^{3-} = (p\Delta^- - v_1^{1-}w_{23}^- - v_1^{2-}w_{31}^-)/w_{12}^-.$$

Подставляя функции (2.27) в краевые условия (0.3), убеждаемся, что эти функции являются решением задачи для любого полинома $p(z)$. Значит, для отыскания $\mathbf{v}_1(z)$ нужно неопределенными коэффициентами полинома $p(z)$ и постоянными c и d распорядиться так, чтобы вектор-функция с компонентами (2.27) имела наинизший возможный порядок $(-\varkappa_1)$ на бесконечности. Если такой порядок достигается при $p(z) \equiv 0$, то первая вектор-функция канонической системы решений (1.2) совпадет с одним из заданных решений или их линейной комбинацией с постоянными c и d.

Для степени s полинома (2.13) может быть получена оценка сверху. Действительно, обозначая через s_{ij} степень полинома p_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, из (2.6) и свойства канонической системы решений [1, с. 31] получим $k_i = \max\{s_{ij} - \varkappa_j\}$, $j = 1, 2, 3$ ($p_{ij}(z) \equiv 0$, если $k_i + \varkappa_j < 0$). Значит, $s_{ij} \le \max\{k_i - \varkappa_j\}$ при $p(z) \not\equiv 0$. Следовательно, $s \le k_1 + k_2 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = k_1 + k_2 + \varkappa - \varkappa_1 \le k_1 + k_2 + \varkappa + \min(k_1, k_2)$.

Чтобы получить представление для второй вектор-функции канонической системы решений (1.2), используя (2.6), исключаем алгебраические дополнения $\Delta_{k1}(z)$, $k = 1, 2, 3$, выраженные через $\Delta_{k3}(z)$, $k = 1, 2, 3$, по формулам, аналогичным (2.12), (2.14), (2.15). Тогда из (2.11) придем к тождеству

$$q(z)\Delta(z) = v_2^1(z)w_{23}(z) + v_2^2(z)w_{31}(z) + v_2^3(z)w_{12}(z), \tag{2.28}$$

где $q(z) = p_{11}(z)p_{23}(z) - p_{13}(z)p_{21}(z)$ — пока неопределенный полином, для степени которого $\tilde{s}$ может быть указана оценка сверху, как это сделано для степени s полинома (2.13). Действительно, из (2.28), (2.6) вытекают неравенства $\tilde{s} - \varkappa \le k_1 + k_2 - \varkappa_3 \le k_1 + k_2 + \max\{k_1, k_2\}$, откуда $\tilde{s} \le k_1 + k_2 + \varkappa + \max\{k_1, k_2\}$.

Аналогично из (2.9) получаем тождество

$$l(z)\Delta(z) = v_3^1(z)w_{23}(z) + v_3^2(z)w_{31}(z) + v_3^3(z)w_{12}(z),$$

в котором для степени неопределенного полинома

$$l(z) = p_{11}(z)p_{22}(z) - p_{21}(z)p_{12}(z)$$

также справедлива установленная выше оценка. Поэтому для второй и третьей вектор-функций канонической системы решений (1.2) при выполнении условий (2.19) оказывается справедливым представление (2.27), в котором полином $p(z)$ заменен полиномом $q(z)$ (соответственно $l(z)$), а c и d — некоторые полиномы, для степеней которых также может быть указана оценка сверху. Поэтому $\mathbf{v}_2(z)$ определяется из соответствующего представления (2.27) как вектор-функция, имеющая на бесконечности порядок, больший или равный $-\varkappa_1$, и отличная от вектор-функции $\mathbf{v}_1(z)$, домноженной на любой полином. Третья вектор-функция системы (1.2) может быть найдена из того же представления, как вектор-функция, имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa + \varkappa_1 + \varkappa_2$ и не связанная с вектор-функциями $\mathbf{v}_1(z)$ и $\mathbf{v}_2(z)$ никакой линейной комбинацией с полиномиальными коэффициентами.

Замечание. Ограничения (2.19) относятся, в основном, к технической стороне вопроса — методу решения задачи (2.22) и получения более простых формул в представлении (2.27). Предложенный метод построения канонической системы решений может быть распространен на случай обращения указанных разностей в нуль в соответствующих областях с учетом результатов работ [3, 7, 9], а в конечном числе точек контура — из [10].

Пример. Рассмотрим задачу линейного сопряжения с матрицей-функцией

$$G(t) = \begin{pmatrix} 2+\sin t & (2t+1)(1+\sin t) & -1-\sin t \\ 2\big(t+\sin t - \frac{\cos t}{2t+1}\big) & (2t+1)(2t+\sin t)-\cos t & -2t-\sin t + \frac{2\cos t}{2t+1} \\ \cos t - \frac{2}{2t+1} & (2t+1)\cos t - 1 & -\cos t + \frac{2}{2t+1} \end{pmatrix},$$

$t \in \Gamma : |t| = 1$, мероморфно продолжимой в область $D^+ : |z| < 1$, $\Delta(t) = \det G(t) = 2t-1$, ($\Delta^+(t) = 1$, $\Delta^-(t) = 1/(2t-1)$, $\varkappa = 1$). Полагая $\mathbf{w}_1^-(z) = (1,0,1)$, $\mathbf{w}_2^-(z) = (0,1,2t+1)$, из краевых условий (0.3) найдем

$$\mathbf{w}_1^+(z) = (1, \sin z, 0), \quad \mathbf{w}_2^+(z) = (0, \cos z, 1).$$

Для разностей (2.1) выполняются условия (2.19): $w_{12}^+(t) = \cos z$, $w_{12}^-(z) = 1$. Взяв в (2.27) $p(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, для первой вектор-функции $\mathbf{v}_1(z)$ канонической системы решений получаем представление

$$v_1^{1+}(z) = -\frac{(1+\sin z)(2a_2z + a_2 + 2a_1)}{4} - \frac{(\sin z - \sin(1/2))(a_2 + 2a_1 + 4a_0)}{4(2z-1)} + c,$$

$$v_1^{1-}(z) = \frac{(1+\sin(1/2))(a_2 + 2a_1 + 4a_0)}{4(2z-1)} + c,$$

$$v_1^{2+}(z) = -\frac{(1+\sin z)(2a_2z + a_2 + 2a_1)}{4} - \frac{(1-\cos(z-1/2))(a_2+2a_1+4a_0)}{4(2z-1)} \\ - (a_2z^2 + a_1z + a_0) + \frac{a_2\cos z}{2} + c\sin z + d\cos z,$$

$$v_1^{2-}(z) = \frac{(a_2+2a_1+4a_0)\cos(1/2)}{4(2z-1)} - \frac{a_1}{2z+1} - \frac{(a_2+2a_1+4a_0)}{2(4z^2-1)} + d,$$

$$v_1^{3+}(z) = -\frac{(\cos z - \cos(1/2))(a_2+2a_1+4a_0)}{4(2z-1)} - \frac{\cos z(2a_2z + a_2 + 2a_1)}{4} + \frac{a_2}{2} + d,$$

$$v_1^{3-}(z) = \frac{a_2 z^2}{(2z-1)} + \frac{a_1 + 2a_0}{2(2z-1)} + \frac{(1+\sin(1/2))(a_2 + 2a_1 + 4a_0)}{4(2z-1)}$$
$$- \frac{(1-\cos(1/2))(a_2 + 2a_1 + 4a_0)}{2(2z-1)} + \frac{(a_2 + 2a_1 + 4a_0)\cos(1/2)}{4} - \frac{a_1}{2} + c + d(2z+1).$$

При $a_2 = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $a_1 = 2a_0 \cos(1/2)/(1-\cos(1/2))$ получаем решение, имеющее наинизший порядок $-\varkappa_1 = -1$ на бесконечности, и $\mathbf{v}_1(z)$ принимает (при $a_0 = 1$) следующий вид:

$$v_1^{1+}(z) = -\frac{(1+\sin z)\cos(1/2)}{1-\cos(1/2)} - \frac{(\sin z - \sin(1/2))}{(1-\cos(1/2))(2z-1)},$$

$$v_1^{1-}(z) = \frac{1+\sin(1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z-1)},$$

$$v_1^{2+}(z) = -\frac{(1+\sin z)\cos(1/2)}{1-\cos(1/2)} - \frac{1-\cos(z-1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z-1)} - \frac{2t\cos(1/2)}{1-\cos(1/2)} - 1,$$

$$v_1^{2-}(z) = \frac{\cos(1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z-1)} - \frac{2\cos(1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z+1)} - \frac{2}{(1-\cos(1/2))(4z^2-1)},$$

$$v_1^{3+}(z) = -\frac{\cos z - \cos(1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z-1)} - \frac{\cos z\cos(1/2)}{(1-\cos(1/2))},$$

$$v_1^{3-}(z) = \frac{\sin(1/2) + 2\cos(1/2)}{(1-\cos(1/2))(2z-1)}.$$

Полагая $p(z) \equiv 0$, $d = 0$, $c = 1$, в качестве второй вектор-функции канонической системы решений $\mathbf{v}_2(z)$ с $\varkappa_2 = 0$ возьмем исходное решение $\mathbf{w}_1(z)$. Третью вектор-функцию канонической системы решений с $\varkappa_3 = 0$ получим, взяв $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $d = 0$, $c = 1$:

$$v_3^{1+}(z) = -\frac{(\sin z - \sin(1/2))}{2z-1}, \quad v_3^{1-}(z) = \frac{(1+\sin(1/2))}{2z-1},$$

$$v_3^{2+}(z) = -\frac{1-\cos(z-1/2)}{2z-1} - 1, \quad v_3^{2-}(z) = \frac{\cos(1/2)}{2z-1} - \frac{2}{4z^2-1},$$

$$v_3^{3+}(z) = -\frac{\cos z - \cos(1/2)}{2z-1}, \quad v_3^{3-}(z) = \frac{\sin(1/2) + 2\cos(1/2)}{2z-1} + \cos(1/2).$$

Вычисляя определители канонической матрицы, имеем

$$\Delta^+(z) = \cos(1/2)/(1-\cos(1/2)), \quad \Delta^-(z) = \cos(1/2)/(1-\cos(1/2))(2z-1).$$

Значит, построенная система решений действительно является канонической.

3. Некоторые случаи разрешимости задачи (0.3) в замкнутой форме

Рассмотрим случаи разрешимости задачи (0.3) в замкнутой форме, вытекающие из результатов разд. 1. Согласно представлению (2.27) и замечанию, сделанному в процессе его доказательства, для построения канонической системы решений (1.2) достаточно указать требования к элементам матрицы-функции (0.1), обеспечивающие существование двух решений задачи, аналитических в соответствующих областях конечной плоскости, для которых хотя бы одна пара разностей (2.5) не имела там и на контуре нулей. Не останавливаясь на всех возможных здесь случаях, приведем лишь некоторые из них.

1. Пусть для матрицы-функции (0.1) выполняются тождества $g_{13}(t) \equiv g_{23}(t) \equiv 0$, $t \in \Gamma$, а отношения (1.6), (1.7) аналитически продолжимы в области D^- и D^+ соответственно. Тогда при выполнении неравенств $g_{32}(t) \neq 0$, $g_{33}(t) \neq 0$, $G_{23}(t) \neq 0$ для решений $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, определенных второй формулой (1.9) при $s(z) \equiv 1$ и $s(z) \equiv 0$ соответственно, требования к разностям

$$w_{13}^+(t) = g_{33}^+(t)G_{23}^+(t)/g_{32}^+(t), \quad w_{13}^-(t) = -g_{32}^-(t)/g_{33}^-(t)G_{23}^-(t)$$

будут выполнены. При выполнении неравенств $g_{31}(t) \neq 0$, $g_{33}(t) \neq 0$, $G_{13}(t) \neq 0$ для решений, определенных при указанных значениях $s(z)$ первой формулой (1.10), требования к разностям

$$w_{23}^+(t) = g_{33}^+(t)G_{13}^+(t)/g_{31}^+(t), \quad w_{23}^-(t) = -g_{31}^-(t)/g_{33}^-(t)G_{13}^-(t)$$

также выполняются. Аналогичные условия можно получить, если использовать формулы (1.15), (1.16) и (1.21), (1.22).

2. Пусть отношения (1.6), (1.12) аналитически продолжимы в области D^-, а отношения (1.7), (1.13) аналитически продолжимы в области D^+. В качестве решений $\mathbf{w}_1(z)$ и $\mathbf{w}_2(z)$ возьмем решения, определенные при $s(z) \equiv 0$ одной из формул (1.9), (1.10) (соответственно (1.15), (1.16)). Так, при $g_{31}(t) \neq 0$, $G_{13}(t) \neq 0$ и $g_{21}(t) \neq 0$, $G_{12}(t) \neq 0$ для решений, определенных первой формулой (1.10) и второй формулой (1.16), требования на разности

$$w_{23}^+(t) = G_{12}^+(t)G_{13}^+(t)/g_{21}^+(t)g_{31}^+(t), \quad w_{23}^-(t) = g_{21}^-(t)g_{31}^-(t)/G_{12}^-(t)G_{13}^-(t)$$

будут выполнены. Аналогичные условия получаются при мероморфной продолжимости в области D^- и D^+ отношений (1.6), (1.18) (соответственно (1.7), (1.19)) и (1.12), (1.18) (соответственно (1.13), (1.19)).

3. Предположим, что для матрицы-функции (0.1) выполняется тождество (1.24) и отношения g_{21}/g_{23}, g_{31}/g_{32} в (1.25) аналитически продолжимы в область D^-, а отношения (1.26) — в область D^+. Тогда, считая в формуле (1.28) r и R различными наборами постоянных, определим два решения задачи (0.3), для которых любая из разностей (2.5) будет удовлетворять высказанным требованиям при соответствующих ограничениях на входящие в них элементы матрицы-функции (0.1) и их алгебраические дополнения (отсутствие у разностей нулей на контуре и в соответствующих областях конечной плоскости). Можно также рассмотреть случаи, вытекающие из другой формы записи формулы (1.28) и их частных случаев — формул (1.34), (1.39). В качестве второго решения можно также взять частный случай (при $s(z) \equiv 0$) формул (1.9), (1.10), (1.15), (1.16) и (1.21), (1.22), а также, при выполнении соответствующих условий, решения вида (1.49), (1.53) и (1.50), (1.54).

Домножая матрицу-функцию (0.1) на перестановочные матрицы и записывая для полученных матриц-функций сформулированные выше условия, придем к соответствующим случаям разрешимости задачи (0.3) в замкнутой форме.

Аналогичные условия, записанные для матрицы-функции $[G'(t)]^{-1}$ (обратной к транспонированной), позволяют выделить случаи разрешимости в замкнутой форме задачи (0.3), получаемые из условий 1–3, в которых элементы $g_{ij}(t)$ и их алгебраические дополнения $G_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, переставлены местами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
2. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. Ч. I, II. Одесса: АН УССР, Одес. отд-ние, Ин-т экономики, 1984. (Деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2410–84).
3. *Адуков В. М.* Факторизация Винера — Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 1. С. 54–74.
4. *Киясов С. Н.* Эффективная факторизация в некоторых классах матриц-функций третьего порядка // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. 2008. Т. 150, № 1. С. 65–70.
5. *Ehrhardt T., Speck F.-O.* Transformation techniques towards the factorization of non-rational (2×2)-matrix functions // Linear Algebra Appl. 2002. V. 353, N 1–3. P. 53–90.
6. *Адуков В. М.* Факторизация Винера — Хопфа и аппроксимации Паде матриц-функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Челябинск, 2006.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 4. С. 3–54.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
9. *Киясов С. Н.* Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме // Изв. вузов. Математика. 2013. № 1. С. 3–21.
10. *Гахов Ф. Д.* Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1952. Т. 16, № 2. С. 147–156.

Статья поступила 29 апреля 2014 г.

Киясов Сергей Николаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Лобачевского,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
`Sergey.Kijasov@kpfu.ru`