Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 519.17

КАЖДЫЙ 3–МНОГОГРАННИК С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5 СОДЕРЖИТ 7–ЦИКЛ С МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ 15

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Пусть $\varphi_P(C_7)$ ($\varphi_T(C_7)$) — минимальное целое k, при котором каждый выпуклый 3-многогранник (соответственно каждая плоская триангуляция) с минимальной степенью 5 содержит 7-цикл, степени всех вершин которого не превышают k. В 1999 г. Йендроль, Мадараш, Сотак и Туза доказали, что $15 \le \varphi_T(C_7) \le 17$. Известно также, что $\varphi_P(C_7) \le 359$ (Мадараш, Шкрековский и Фосс, 2007).

В настоящей работе доказано равенство $\varphi_P(C_7) = \varphi_T(C_7) = 15$, которое является ответом на вопрос Йендроля и др. (1999).

DOI 10.17377/smzh.2015.56.405

Ключевые слова: плоский граф, структурные свойства, 3-многогранник, высота.

1. Введение

Степенью $d(x)$ вершины или грани x в плоском графе G называется число инцидентных ей ребер (разделяющие ребра учитываются в степени $d(x)$ грани x дважды). k*-Вершина* (k*-грань*) есть вершина (грань) степени k, k^+*-вершина* имеет степень не менее k, и т. д. Минимальную вершинную степень графа G обозначим через $\delta(G)$. Будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста.

Нормальная плоская карта — это плоский псевдограф, в котором допускаются петли и кратные ребра, но $d(x) \ge 3$ для любой вершины или грани x. Как доказано Штейницем [1], 3-связные плоские графы являются плоским представлением конечных выпуклых трехмерных многогранников, называемых в дальнейшем 3-*многогранниками.*

Мы рассматриваем класс $\mathbf{M}_5$ нормальных плоских карт с $\delta = 5$ и его подклассы $\mathbf{P}_5$ — 3-многогранников — и $\mathbf{T}_5$ — плоских триангуляций. Цикл на k вершинах обозначим через C_k, а через S_k — k-звезду с центром в 5-вершине.

В 1904 г. Вернике [2] доказал, что во всякой $M_5 \in \mathbf{M}_5$ найдется вершина степени 5, смежная с вершиной степени не более 6. В 1922 г. Франклин [3] улучшил этот результат, доказав существование 5-вершины, смежной с двумя

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00631, 12–01–00448) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1939.2014.1). Работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–98510).

6^--вершинами. В 1940 г. Лебег [4, с. 36] дал приближенное описание окрестностей вершин степени 5 в $\mathbf{T}_5$.

Для заданного графа H *вес* $w_M(H)$ есть максимальное по всем $M_5 \in \mathbf{M}_5$ значение минимальной суммы степеней вершин всех подграфов H карты M_5. *Веса* $w_P(H)$ и $w_T(H)$ определяются точно так же для $\mathbf{P}_5$ и $\mathbf{T}_5$ соответственно.

Оценки $w_M(S_1) \leq 11$ [2] и $w_M(S_2) \leq 17$ [3] точны. Лебег [4, с. 36] доказал оценки $w_M(S_3) \leq 24$ и $w_M(S_4) \leq 31$, что позднее было доведено до точных оценок: $w_M(S_3) \leq 23$ [5] и $w_M(S_4) \leq 30$ [6]. Заметим, что $w_M(S_3) \leq 23$ легко влечет $w_M(S_2) \leq 17$ и непосредственно следует из $w_M(S_4) \leq 30$ (достаточно удалить вершину максимальной степени из звезды минимального веса).

Из результата Лебега [4, с. 36] следует, что $w_T(C_3) \leq 18$. В 1963 г. Коциг [7] дал другое доказательство этого факта и предположил, что $w_T(C_3) \leq 17$. (Нетрудно показать, что оценка 17 точна.)

В 1989 г. гипотеза Коцига была подтверждена О. В. Бородиным [8] в более общей форме, а именно: $w_M(C_3) = 17$. Другим следствием этого результата является подтверждение гипотезы Грюнбаума [9] о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, удаление которых из графа разбивает его на две компоненты связности, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превышает 11. Эта оценка точна (ранее Пламмером [10] была получена верхняя оценка 13).

Из теоремы Лебега [4, с. 36] также следует, что $w_T(C_4) \leq 26$ и $w_T(C_5) \leq 31$. В 1998 г. О. В. Бородин и Вудал [6] доказали, что $w_T(C_4) = 25$ и $w_T(C_5) = 30$, а недавно О. В. Бородин, А. О. Иванова и Вудал [11] доказали, что $w_P(C_4) = 26$ и $w_P(C_5) = 30$.

Пусть далее $\varphi_M(H)$ ($\varphi_P(H)$, $\varphi_T(H)$) есть минимальное целое k, при котором каждая нормальная плоская карта (3-многогранник, плоская триангуляция) с минимальной степенью 5 содержит копию графа H, все степени которого не превышают k.

Как следует из результата Франклина [3], $\varphi_M(S_2) = 6$. Из $w_M(C_3) = 17$ [8] имеем $\varphi_M(C_3) = 7$. В 1996 г. Йендроль и Мадараш [5] доказали, что $\varphi_M(S_4) = \varphi_T(C_4) = \varphi(C_5) = 10$. Сотак (личное сообщение, см. обзоры Йендроля и Фосса [12, с. 15; 13]) доказал, что $\varphi_P(C_4) = 11$ и $\varphi_P(C_5) = 10$. Заметим, что последние два равенства легко получаются из $w_P(C_4) = 26$ и $w_P(C_5) = 30$ [11].

В 1999 г. Йендроль и др. [14] получили следующие оценки: $10 \leq \varphi_T(C_6) \leq 11$, $15 \leq \varphi_T(C_7) \leq 17$, $15 \leq \varphi_T(C_8) \leq 29$, $19 \leq \varphi_T(C_9) \leq 41$ и $\varphi_T(C_p) = \infty$, где $p \geq 11$. Мадараш и Сотак [15] доказали, что $20 \leq \varphi_T(C_{10}) \leq 415$.

Для более широкого класса $\mathbf{P}_5$ известно, что $10 \leq \varphi_P(C_6) \leq 107$ [16]. Фактически в [16] эта граница доказана для всех 3-многогранников с $\delta \geq 4$, в которых нет смежных 4-вершин. Недавно О. В. Бородин, А. О. Иванова и А. В. Косточка [17] доказали, что $\varphi_P(C_6) = \varphi_T(C_6) = 11$.

Для C_7 кроме вышеупомянутого результата $15 \leq \varphi_T(C_7) \leq 17$ известно, что $\varphi_P(C_7) \leq 359$ [18]. Цель нашей статьи — доказательство равенства $\varphi_P(C_7) = \varphi_T(C_7) = 15$, что является исчерпывающим ответом на поставленный Йендролем и др. [14] вопрос.

Теорема 1. *Каждый* 3*-многогранник с минимальной степенью* 5 *содержит* 7*-цикл, в котором каждая вершина имеет степень не более* 15*; оценка точна.*

Другие структурные результаты об $\mathbf{M}_5$, часть которых имеют приложения к задачам раскраски, можно найти в уже упомянутых статьях и в [15, 16, 18–21].

Одна из идей, используемых в нашем доказательстве, заключается в рассмотрении подходящего 7-цикла не во всем контрпримере, а в специально подобранной его части. Аналогичный подход к решению задач раскраски плоских графов описан в обзоре О. В. Бородина [22, с. 520, 521] и был использован несколько раз начиная с 1979 г. [23].

2. Нижняя оценка в теореме 1

Плоская триангуляция, в которой нет 7-циклов, избегающих 15^+-вершину, может быть построена следующим образом [5]. Обрежем все вершины додекаэдра и на каждое ребро каждой полученной 3-грани поместим 2-вершину, соединим три 2-вершины каждой полученной 6-грани и добавим новую вершину в каждую полученную 15-грань, соединив эту 15-вершину с граничными вершинами грани (рис. 1).

Рис. 1. Каждый C_7 проходит через вершину степени 15.

3. Доказательство верхней оценки в теореме 1

Пусть G' — контрпример к основному утверждению теоремы 1, т. е. G' является 3-многогранником с $\delta = 5$, в котором каждый 7-цикл содержит 16^+-вершину.

По формуле Эйлера $|V'| - |E'| + |F'| = 2$ для G' имеем

$$\sum_{v \in V'} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F'} (d(f) - 4) = -8. \tag{1}$$

Из (1) следует, что G' содержит 3-грань. Можно считать, что внешняя грань графа G' ограничена 3-циклом с вершинным множеством T'.

Особый треугольник $T^* = t_1 t_2 t_3$ графа G' — это 3-цикл графа G' с минимальным, но не нулевым количеством вершин внутри. Определим граф G как подграф графа G', индуцированный вершинами, лежащими внутри T^*. Вершины графа G назовем *внутренними*, а вершины t_1, t_2 и t_3 — *особыми.*

Через G^{**} обозначим подграф графа G', индуцированный вершинами графа $G \cup T^*$. В частности, $T^* = T'$, когда $G^{**} = G'$. В обоих случаях T^* является границей $\partial(f_\infty)$ внешней грани f_∞ графа G^{**}.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, достаточно доказать следующий более сильный факт.

Утверждение 2. *G^{**} содержит 7-цикл, состоящий из внутренних 15^--вершин.*

Пусть G^{**} — контрпример к утверждению 2. Через G^* обозначим контрпример к утверждению 2 с максимальным числом ребер на том же множестве вершин, что и G^{**}.

Точнее, рассмотрим максимальную последовательность

$$G_0 = G^{**}, G_1, \dots, G_I = G^*,$$

где граф G_i, $1 \le i \le I$, получен из G_{i-1} добавлением отсекающей от грани треугольник диагонали, причем такой, что не менее одного из ее концов либо принадлежит T^*, либо имеет степень не менее 16 в G_{i-1}.

Заметим, что мы не можем создать 7-цикл, состоящий из внутренних 15^--вершин ни на одном шаге конструирования G^*, поскольку по построению один из концов добавляемого ребра имеет степень не менее 17 или принадлежит T^*. Другие структурные свойства графа G^*, подтверждающие то, что G^* действительно является контрпримером к утверждению 2, рассматривается в п. 3.1.

Далее докажем, что G^* не может существовать. Отсюда будет следовать, что G^{**} также не существует, это завершит доказательство утверждения 2 и теоремы 1.

С этого момента степени вершин и граней треугольника T^* рассматриваются в G^*, а не в G'. Обозначим множества вершин, ребер и граней графа G^* через V^*, E^* и F^* соответственно, где $V^* = V(G) \cup \{t_1, t_2, t_3\}$. Из формулы Эйлера $|V^*| - |E^*| + |F^*| = 2$ для графа G^* получаем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{v \in \{t_1, t_2, t_3\}} (d(v) - 2) + \sum_{f \in F^*} (2d(f) - 6) = 0. \tag{2}$$

Определим *начальный заряд* $\mu(x)$ элемента x, где $x \in V^* \cup F^*$, следующим образом: $\mu(v) = d(v) - 6$, если $v \in V$, $\mu(v) = d(v) - 2$, если $v \in \{t_1, t_2, t_3\}$, и $\mu(f) = 2d(f) - 6$, если $f \in F^*$. Отметим, что только внутренние 5-вершины имеют отрицательный начальный заряд.

Используя свойства графа G^* как контрпримера к утверждению 2, определим локальное перераспределение зарядов, сохраняющее их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V^* \cup F^*$. Также покажем, что $\mu'(t_1) > 0$. Это будет противоречить тому, что сумма новых зарядов согласно формуле (2) равна 0.

3.1. Структурные свойства графа G^*. Через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим соседей вершины v в циклическом порядке. Вершина *симплициальна*, если она полностью окружена 3-гранями.

Для краткости внутреннюю 15^--вершину графа G_i, $0 \le i \le I$, назовем *белой* вершиной, а вершину v — *черной*, если v принадлежит T^* или внутренняя, а $d(v) \ge 16$. (На приведенных далее рисунках белые 5-вершины, белые 6^+-вершины и белые вершины произвольной степени изображены маленькими белыми кружками, большими белыми кружками с надписью 6^+ внутри и пустыми белыми большими кружками соответственно.) Ребро назовем *жестким*, если оно инцидентно хотя бы одной черной вершине. *Добавление диагонали* означает добавление ребра, соединяющего две вершины на расстоянии 2 в границе $\partial(f)$ некоторой 4^+-грани f, т. е. отсекающего 3-грань от грани f.

Сначала проверим, что каждый G_i, где $0 \le i \le I$, является контрпримером к утверждению 2. При $i = 0$ это было наше предположение.

Предположим, что $i < I$ и u является черной вершиной в границе $\partial(f) = \dots uvw$ грани f в G_i. Заметим, что добавление диагонали uw внутри f не создает петель, поскольку G_i не содержит кратных ребер. Если добавление диагонали uw создает кратные ребра, то uvw есть разделяющий цикл, строго заключенный в T^*, что противоречит определению T^*. Наконец, мы не можем создать 7-цикл, состоящий из белых вершин в G_{i+1}, поскольку нельзя создать новые белые вершины добавлением жестких диагоналей uw.

В дальнейшем понадобятся простейшие структурные свойства графа G^*, выраженные в (SP1)–(SP4), а также немного более сложные свойства графа G^*, представленные леммами 3–7.

(SP1) *Граница любой 4^+-грани графа G^* является циклом, который состоит из белых вершин.*

Первое утверждение для G_0 следует из отсутствия точек сочленения как в G', так и в G_0. При $i > 0$ это вытекает из того факта, что добавление диагонали не создает точек сочленения. Второе утверждение получаем из максимальности G^* по числу жестких ребер.

(SP2) *Если v — черная вершина в G^*, то v симплициальная.*

Действительно, это просто другой способ выражения свойства (SP1).

(SP3) *Не существует 7-граней в G^*.*

Это непосредственно следует из (SP1).

(SP4) *Нет разделяющих 3-циклов в G^*, состоящих из трех белых вершин.*

Это вытекает из минимальности T^* по числу внутренних вершин и того факта, что добавление жестких диагоналей не может создать белую вершину, а значит, не может создать цикл, состоящий из белых вершин.

Рис. 2. Конфигурации, запрещенные в G^* по лемме 3.

Лемма 3. *Если белая 5-вершина v в G^* окружена пятью белыми вершинами и инцидентна четырем 3-граням, то пятая инцидентная ей грань f не может удовлетворять неравенству $4 \leq d(f) \leq 5$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $f = vv_1xv_2$ (рис. 2(a)). Существует замкнутый 7-маршрут $W = xv_2vv_3v_4v_5v_1$. Каждые две вершины в W на расстоянии не более 2 различны, поскольку G^* не содержит ни петель, ни кратных ребер. Существует только две вершины маршрута W на расстоянии 3, которые теоретически могли бы совпадать: x и $v_4 = x'$. Однако они не могут совпадать, потому что иначе v_1vv_4 является разделяющим 3-циклом (например, он отделяет v_2 от v_5, см. рис. 2(a)), а это противоречит (SP4). Это означает, что семь вершин в W попарно различны, т. е. W является 7-циклом на белых вершинах в G^*; противоречие.

Пусть $f = vv_1xyv_2$ (рис. 2(b)), т. е. имеем 7-маршрут $W = xyv_2v_3vv_5v_1$. Рассуждая, как описано выше, мы должны только исключить возможность $x = v_3$ (поскольку случай $y = v_5$ симметричен). Снова совпадение x с v_3 невозможно благодаря (SP4), поэтому W является 7-циклом на белых вершинах; противоречие. □

Лемма 4. *Если v является белой симплициальной 5-вершиной в G^*, окруженной пятью белыми вершинами, а грань f инцидентна ребру v_1v_2, где $f \neq vv_1v_2$, то либо $d(f) \geq 8$, либо f — 3-грань, инцидентная черной вершине.*

Доказательство. Все запрещенные конфигурации показаны на рис. 3. (Напомним, что 7-грани, состоящие из белых вершин, исключены согласно (SP3).) Доказательство аналогично доказательству леммы 3 и оставляется читателю. Для удобства читателя отметим крестом внутри те вершины, которые не нужны для нахождения соответствующего 7-маршрута W. Кроме того, для вершины x, имеющей «близнеца» на расстоянии 3 вдоль W, обозначим ее близнецов через x' или x''. Симметричные ситуации не рассматриваются. □

Рис. 3. Конфигурации, запрещенные в G^* по лемме 4.

Лемма 5. *G^* не содержит двух смежных белых симплициальных 5-вершин, имеющих общего черного соседа и по четыре белых соседа.*

Доказательство Запрещенная конфигурация показана на рис. 4. Доказательство не содержит ничего нового по сравнению с доказательствами лемм 3 и 4 и оставляется читателю.

Рис. 4. Конфигурация, запрещенная в G^* по лемме 5.

Лемма 6. *Если белая 5-вершина v в G^* смежна в точности с одной черной вершиной и четырьмя белыми вершинами, то v не может быть инцидентна в точности одной 5-грани и четырем 3-граням.*

Доказательство. См. рис. 5. □

Рис. 5. Конфигурации, запрещенные в G^* по лемме 6.

Лемма 7. *G^* не содержит двух смежных белых 5-вершин, хотя бы одна из которых инцидентна в точности одной 4-грани и четырем 3-граням, имеющих общего черного соседа и по четыре белых соседа.*

Доказательство. См. рис. 6. $\square$

Рис. 6. Конфигурации, запрещенные в G^* по лемме 7.

3.2. Перераспределение зарядов в G^*. Используем следующие правила перераспределения (рис. 7).

R1. Каждая грань f с $4 \leq d(f) \leq 5$ отдает $\frac{1}{2}$ каждой инцидентной ей белой 5-вершине.

R2. Каждая 6^+-грань отдает 1 каждой инцидентной ей белой 5-вершине.

R3. Каждая 8^+-грань $f = \dots v_1v_2$ отдает $\frac{1}{5}$ каждой белой 5-вершине v через каждое ребро v_1v_2 грани vv_1v_2, где v_1 и v_2 белые.

R4. Если черная вершина v лежит в границе 3-грани uvw с черной вершиной w и белой 5-вершиной u, то v (так же, как и w) отдает $\frac{1}{2}$ вершине u.

R5. Если v является белой 5-вершиной такой, что v_1 и v_3 черные, а v_2, v_4 и v_5 белые, то v от каждого черного соседа получает

(a) $\frac{1}{2}$, если v симплициальная,

или

(b) $\frac{1}{4}$, если v инцидентна 4- или 5-грани $\dots v_5 v v_4$.

R6. Если белая 5-вершина v имеет в точности одного черного соседа, то v от него получает

(a) 1, если v симплициальная,

или

(b) $\frac{1}{2}$, если v инцидентна в точности одной 4-грани.

R7. Если симплициальная белая 5-вершина v имеет только белых соседей, а черная вершина w лежит в границе грани wv_1v_2, то v получает $\frac{1}{5}$ от w через ребро v_1v_2.

Рис. 7. Правила перераспределения зарядов.

3.3. Проверка того, что $\mu'(x) \geq 0$ для $x \in V^* \cup F^*$ и $\mu'(t_1) > 0$.

Случай 1. $d(v) = 5$ и v — белая вершина.

Если v получает 1 от 6^+-грани по R2 или черной вершины по R6a, либо не менее двух раз по $\frac{1}{2}$ по правилам R4 или R5(a), либо $2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ по R5(b) и R1, либо $2 \times \frac{1}{2}$ по R6(b) и R1, то $\mu'(v) \geq 5 - 6 + 1 = 0$, что и требуется. Поэтому пусть далее v не получает ничего по R2, R4, R5 и R6 и получает $\frac{1}{2}$ по R1 не более одного раза.

Согласно лемме 6 остается рассмотреть случай, когда все вершины $v_1, \dots, v_5$ белые. Вершина v либо симплициальна, либо инцидентна единственной грани $f = v_1vv_2x$ или $f = v_1vv_2xy$. Во втором случае имеем требуемые 7-циклы $xv_1vv_5v_4v_3v_2$ или $xv_1v_5vv_3v_2y$ соответственно благодаря лемме 3; противоречие.

Пусть v симплициальная. По лемме 4 с учетом (SP3) каждое ребро v_iv_{i+1} (сложение по модулю 5) инцидентно либо 8^+-грани, либо 3-грани $w_iv_iv_{i+1}$, где w_i черная. Значит, v получает по $\frac{1}{5}$ через каждое ребро v_iv_{i+1} по R3, R7, откуда $\mu'(v) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$.

Случай 2. $6 \leq d(v) \leq 15$ и v внутренняя. Поскольку v не участвует в правилах R1–R7, то $\mu'(v) = d(v) - 6 \geq 0$.

Случай 3. $t_i \in T^*$, $1 \leq i \leq 3$. Заметим, что $d(t_i) \geq 3$, поскольку иначе $T^* - t_i$ является разделяющим множеством из двух вершин в G', что противоречит 3-связности графа G'. Напомним, что $\mu(t_i) = d(t_i) - 2$. Вершина t_i отдает 1, $\frac{1}{2}$

или $\frac{1}{4}$ не более чем $d(t_i)-2$ смежным белым 5-вершинам по правилам R4, R5, R6 и $\frac{1}{5}$ через не более чем $d(t_i)-3$ ребер по R7. Заметим, что 1 может передаваться, только если $d(t_i) \geq 5$, и это может произойти не более чем $\lceil \frac{d(t_i)-2}{2} \rceil$ раз ввиду леммы 5.

Если $d(t_i) = 3$, то $\mu'(t_i) \geq 3 - 2 - \frac{1}{2} > 0$. Если $d(t_i) = 4$, то $\mu'(t_i) \geq 4 - 2 - 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > 0$.

Наконец, если $d(t_i) \geq 5$, то $\mu'(t_i) \geq d(t_i) - 2 - \lceil \frac{d(t_i)-2}{2} \rceil \times 1 - (d(t_i) - 2 - \lceil \frac{d(t_i)-2}{2} \rceil) \times \frac{1}{2} - \frac{d(t_i)-3}{5} \geq \frac{d(t_i)-3}{4} - \frac{d(t_i)-3}{5} = \frac{d(t_i)-3}{20} > 0$, что и требовалось доказать.

Случай 4. $d(v) \geq 16$ и v внутренняя. По свойству (SP2) вершина v симплициальная. Здесь v также черная, но мы должны рассмотреть передачи вершины v по правилам R4–R7 более тщательно, чем в случае 3.

Заменим правила R6(a) и R7 следующими «правилами усреднения» R6*(a) и R7* соответственно (рис. 8).

R6*(a). Если симплициальная белая 5-вершина v имеет в точности одного черного соседа v_2, то v_2 отдает $\frac{2}{3}$ вершине v вдоль ребра v_2v и по $\frac{1}{6}$ вершинам v_1 и v_3 через грани v_1v_2v и v_2v_3v соответственно.

R7*. Если симплициальная белая 5-вершина v имеет только белых соседей, а черная вершина w лежит в 3-грани wv_1v_2, то каждая из v_1 и v_2 получает $\frac{1}{10}$ от w через грань v_1v_2w.

Рис. 8. Правила усреднения.

Заметим, что это не изменит новый заряд $\mu'(v)$, но теперь все передачи от вершины v происходят вдоль ребер. А именно, 0 передается черному соседу, не более $\frac{1}{3}$ передается белому соседу степени от 6 до 15 и не более $\frac{2}{3}$ белому 5-соседу.

Действительно (рис. 9), черная вершина ничего не получает ни по одному из правил R4–R7, R6* и R7*. Белый 5^+-сосед v_2, ничего не получающий по правилам R4–R7, получает не более $\frac{1}{6}$ от каждой из вершин v_1 и v_3 по R6*(a) и R7*. Возможные передачи от v другим белым 5-соседям после усреднения с учетом лемм 5–7 показаны на рис. 9(c)–(h).

Поскольку нет ребра, переводящего более чем $\frac{2}{3}$ от v, получаем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-18}{3}$. Нам уже нечего доказывать, если $d(v) \geq 18$, поэтому далее предположим, что $16 \leq d(v) \leq 17$.

Теперь мы имеем грубую оценку $\mu'(v) \geq -\frac{2}{3}$, и нужны дополнительные рассуждения, чтобы показать, что фактически $\mu'(v) \geq 0$.

Рис. 9. Передачи от 16^+-вершины после усреднения.

Сначала дадим несколько определений для белого 5-соседа v_2 вершины v. Пусть v_2 окружена вершинами v, v_1, x, y, v_3 по часовой стрелке, где v_1 и v_3 белые (рис. 10). Если v_2 симплициальная и (a) x и y черные, то v_2 назовем *сильной*, (b) x черная, а y белая, то v_2 назовем *нормальной*, (c) x и y белые, то v_2 назовем *слабой*.

Пусть v_2 несимплициальная. Если x черная, а v_2 инцидентна грани $f = \dots v_3v_2y$, где $4 \le d(f) \le 5$, то назовем v_2 *полунормальной*. Если v_2 инцидентна ровно одной 4-грани, а x и y белые, то v_2 назовем *полуслабой*.

Рис. 10. Сильная, нормальная, слабая, полунормальная и полуслабая 5-вершины.

Напомним, что сильный сосед ничего не получает от v ни до, ни после усреднения (см. рис. 9(d)). Ввиду грубой оценки $\mu'(v) \ge -\frac{2}{3}$ нам нечего доказывать, если v смежна с черной вершиной либо с (не менее чем) двумя белыми 5^+-вершинами, не получающими ничего по правилам R4–R7, либо с сильной вершиной. Поэтому далее будем считать, что ни одна из этих ситуаций не имеет места; в частности, v полностью окружена белыми вершинами.

Двойной получатель, или *дубль*, — это пара (v_1, v_2) нормальных вершин v_1 и v_2 при v (рис. 11(a)).

Заметим, что каждый двойной получатель забирает $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ от v вместо $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, включенных в грубую нижнюю оценку для $\mu'(v)$, таким образом, он *экономит* $\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ для v по сравнению с уровнем передачи в $\frac{2}{3}$ по ребру.

Тройной получатель, или *триплет*, (v_1, v_2, v_3) состоит из слабой вершины v_2, нормальной вершины v_1 и белой вершины v_3 (см. рис. 11(b)). В зависимости от $d(v_3)$ различаем два вида триплетов (см. рис. 11(b1) и 11(b2)). Если $d(v_3) = 5$, то (v_1, v_2, v_3) получает $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$ от v по R4–R7; иначе он получает $\frac{1}{2} + 1 + 0$. После усреднения эти триплеты получают в сумме столько же, сколько и до усреднения с учетом лемм 5–7, т. е. экономят 0 и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Рис. 11. Дубль и два вида триплетов.

Следующие две леммы накладывают ограничения на несимплициальных 5-соседей вершины v.

Лемма 8. *Каждое из ребер $v_i v_{i+1}$, где $1 \le i \le d(v)$, сложение по модулю $d(v)$, инцидентно двум 3-граням.*

Доказательство. Пусть существует 4^+-грань $\dots x v_1 v_2 y$. Докажем, что на ребрах vv_1 и vv_{16} достигается суммарная экономия в $\frac{1}{3}$. По симметрии то же самое будет верно для ребер vv_2 и vv_3. Отсюда будет следовать, что $\mu'(v) \ge -\frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

Если $d(v_1) \ge 6$, то v_1 не получает ничего по основным правилам, а значит, получает не более $2 \times \frac{1}{6}$ после усреднения, что и требовалось.

Пусть $d(v_1) = 5$. Поскольку v_1 должна участвовать в основных правилах, то можно считать, что v_1 полунормальная (участвует в правиле R5(b)) или полуслабая (участвует в правиле R6(b)).

Если v_1 полунормальная, то получает $\frac{1}{4}$ после усреднения, а значит, на ребре vv_1 достигается экономия более чем в $\frac{1}{3}$. Пусть v_1 полуслабая. С учетом леммы 5 по каждому из ребер vv_1 и vv_{16} уходит не более $\frac{1}{2}$ как до усреднения, так и после (ввиду уже сделанных предположений v_{16} может быть лишь нормальной, полунормальной, слабой или полуслабой), т. е. на этих двух ребрах уже достигается экономия в $2 \times \frac{1}{6}$, что и требовалось. $\square$

Лемма 9. *Если вершина v_2 инцидентна 4-грани $xyzv_2$, где $\{x, z\} \cap \{v_1, v_3\} = \varnothing$, то вершины v_1 и v_3 нормальные.*

Доказательство. Ввиду сделанных предположений v_3 должна получать ненулевой заряд от v, а это означает, что v_3 является нормальной (R5(a)), полунормальной (R5(b)), слабой (R6(a)) или полуслабой (R6(b)). Согласно ранее установленным свойствам (леммы 3–7) видим, что v_3 может участвовать только в R5(a), т. е. являться нормальной. Ввиду симметрии то же верно и для v_1, что и требовалось. Отметим, что на каждой из вершин v_1, v_2, v_3 достигается экономия в $\frac{1}{6}$ (см. R5(a) и рис. 9(e)), т. е. суммарная экономия от любой несимплициальной вершины при v равна $\frac{1}{2}$. $\square$

Подслучай 4.1. $d(v) = 17$. Поскольку $\mu'(v) \ge -\frac{1}{3}$, остается рассмотреть только случай, когда v полностью окружена белыми 5-вершинами, получающими больше нуля по R4–R7, и, как упомянуто выше, не имеет сильных соседей. Другими словами, каждый 5-сосед вершины v либо нормальный, либо слабый, либо полунормальный (т. е. получающий $\frac{1}{4}$ по R5(b)), либо полуслабый (т. е. получающий $\frac{1}{2}$ по R6(b)).

Ввиду лемм 8 и 9 можно считать, что v окружена только нормальными и слабыми 5-вершинами. При этих обстоятельствах из леммы 4 следует, что не существует передачи от вершины v через ребро по R6 (рис. 12(a)), и не существует двух соседних слабых соседей (см. рис. 12(b)). Очевидно, каждый слабый сосед вершины v принадлежит единственному тройному получателю. Заметим, что нормальный сосед v_2 вершины v принадлежит в точности одному получателю и этот получатель либо дубль, либо тройной (см. рис. 12(c),(d)), в зависимости от «цвета» вершины x на рис. 12(c),(d).

Рис. 12. Ситуация около v при $16 \le d(v) \le 17$.

В свою очередь, это значит, что окрестность вершины v разбивается на двойные и тройные получатели. Поскольку $\frac{17}{3}$ не является целым числом, то v имеет не менее одного двойного получателя, который экономит не менее $\frac{1}{3}$, как говорилось выше. Это означает, что фактически $\mu'(v) \ge -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 4.2. $d(v) = 16$.

(A) Нет 6^+-вершины, смежной с v. Отметим, что полуслабых вершин при v не более одной, так как согласно лемме 9 такая вершина окружена по циклу двумя нормальными вершинами, что приводит к экономии в $\frac{1}{2}$. Рассуждая, как в подслучае 4.1, видим, что окрестность вершины v разбивается на двойные и тройные получатели, а также, быть может, получатель из трех ребер, ведущих в нормальную, полуслабую и еще одну нормальную вершину. Поскольку $\frac{16-2k}{3}$ не целое при $k = 0, 1$, найдутся хотя бы два двойных получателя. Таким образом, $\mu'(v) \ge -\frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$, что и требовалось.

(B) $d(v_1) \ge 6$ и v_1 белая (рис. 13(a)). Можно считать, что полуслабых вершин при v нет, т. е. все соседи вершины v симплициальные. Далее надо изучить окрестность вершины v_1 более тщательно. Пусть v_2 окружена вершинами v, v_1, x_2, y_2, v_3 в циклическом порядке. Здесь доказательство разветвляется.

Рис. 13. Ситуации около белого 6^+-соседа 16-вершины.

(B1) В точности одна из x_2, y_2 черная (см. рис. 13(b),(c)). Теперь v_1 не получает $\frac{1}{6}$ от v_2 в соответствии с правилом усреднения R7*. Это значит, что фактически v_1, включенная в грубую оценку $\mu'(v) \ge -\frac{2}{3}$, получает на $\frac{1}{6}$ меньше, чем $\frac{1}{3}$.

(B2) Обе x_2 и y_2 белые (см. рис. 13(d)). Здесь (v_1, v_2, v_3) является тройным получателем. Напомним, что v_2 получает 1 от v по R7 и отдает $\frac{1}{6}$ вершине v_1 согласно правилу R7*, так что мы не получаем экономии заряда для v_1 от v_2.

Замечание 10. Поскольку v_4 белая по предположению, это означает, что v_3 — нормальная белая 5-вершина, которая имеет черного соседа, отличного от v (см. рис. 13(d)).

(B3) Обе x_2 и y_2 черные. Это невозможно согласно предположению, что v не имеет черных соседей. (Напомним, что такой 5-сосед всегда экономит требуемые нам $\frac{2}{3}$, поскольку он не получает заряда от v ни по одному из правил, включая правила усреднения.)

(C) Ввиду симметрии между v_2 и v_{16} не требует рассмотрения случай, когда и v_2, и v_{16} являются такими, как описано в (B1), потому что тогда v_1 ничего не получает от v даже после применения правил R6* и R7*, откуда $\mu(v) \geq 0 + (16-1) \times \frac{2}{3} = 0$.

(D) Таким образом, в дальнейшем можно считать, что обе вершины x_2 и y_2 белые, т. е. v_2 слабая (рис. 14). Здесь удобно забыть об усреднении и вернуться к исходным правилам R6 и R7. Пусть v_{16} окружена вершинами v, v_1, x_{16}, y_{16}, v_{15} в циклическом порядке.

Если (v_{15}, v_{16}, v_1) также является триплетом, то $(v_{15}, v_{16}, v_1, v_2, v_3)$ называется *квинтетом* (см. рис. 14(a)). Согласно замечанию 2 вершины v_{15} и v_3 нормальные. Как и в подслучаях 4.1 и 4.2(A), приходим к выводу, что окрестность вершины v разбивается на квинтеты, дубли и триплеты.

Рис. 14. Решающая экономия заряда 16-вершины.

Указанный выше квинтет получает $\frac{1}{2} + 1 + 0 + 1 = \frac{1}{2} = 5 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ по R4–R7, так что он экономит $\frac{1}{3}$ для v. Поскольку $\frac{16-5}{3}$ не целое, v имеет не менее одного двойного получателя, который экономит еще одну $\frac{1}{3}$ для v наряду с 6^+-соседом. Это значит, что $\mu(v) \geq -\frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

Предположим, что x_{16} черная (см. рис. 14(b)). Напомним, что y_{16} белая, поскольку v_{16} не сильная. Согласно приведенным выше рассуждениям окрестность v разбивается на тройные и двойные получатели. Триплет (v_1, v_2, v_3) получает $0 + 1 + \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, т. е. экономит $\frac{1}{2}$ для v. Кроме того, поскольку $\frac{16}{3}$ не целое, v имеет не менее одного двойного получателя, что влечет $\mu(v) \geq -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 0$.

Наконец, предположим, что x_{16} белая, а y_{16} черная (см. рис. 14(a),(c)). Теперь (v_{16}, v_1, v_2, v_3) — *квартет*, получающий $\frac{1}{2} + 0 + 1 + \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$ по R4–R7, т. е. он экономит $\frac{2}{3}$ для v (относительно уровня передач в $\frac{2}{3}$ на ребро). Остальные соседи вершины v разбиваются на двойные и тройные получатели. Это показывает, что фактически $\mu(v) \geq -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$, что и требовалось.

Случай 5. $f \in F^*$. Если $d(f) = 3$, то $\mu'(f) = \mu(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$, поскольку f не участвует в правилах перераспределения зарядов независимо от того, является ли f гранью f_∞ или нет.

Допустим, что f является внутренней гранью с $d(f) \geq 4$. Напомним, что $d(f) \neq 7$ по (SP3). Если $4 \leq d(f) \leq 5$, то f участвует только в R1 и получаем $\mu'(f) \geq 2d(f) - 6 - \frac{d(f)}{2} = \frac{3(d(f)-4)}{2} \geq 0$. Если $d(f) = 6$, то $\mu'(f) \geq 12 - 6 - 6 \times 1 = 0$ по R1. Наконец, если $d(f) \geq 8$, то $\mu'(f) \geq 2d(f) - 6 - d(f) \times 1 - d(f) \times \frac{1}{5} = \frac{4d(f)-30}{5} > 0$ по R1 и R5.

Таким образом, $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V^* \cup F^*$ и $\mu'(t_1) > 0$. Противоречие $0 < 0$ с (1) показывает, что G^* не может существовать. Это завершает доказательство утверждения 2 и, как следствие, теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. N 12. P. 1–139.
2. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
3. *Franklin P.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
4. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
5. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
6. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
7. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34.
8. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
9. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in graph theory, Part II (D. R. Fulkerson, ed.). Washington, D. C.: Math. Assoc. Amer., 1975. P. 201–224. (MAA Stud. Math.; V. 12).
10. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graphs // Graph theory and application. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.
11. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Woodall D. R.* Light C_4 and C_5 in 3-polytopes with minimum degree 5 // Discrete Math. 2014. V. 334. P. 63–69.
12. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane: a survey. Discrete Math. TU Dresden, 2001. (Preprint / Inst. Algebra MATH-AL-2-2001.
13. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 406–421.
14. *Jendrol' S., Madaras T., Soták R., Tuza Z.* On light cycles in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 197/198. P. 453–467.
15. *Madaras T., Soták R.* The 10-cycle is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.
16. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.
17. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Every 3-polytope with minimum degree 5 has a 6-cycle with maximum degree at most 11 // Discrete Math. 2014. V. 315/316. P. 128–134.
18. *Madaras B., Škrekovski R., Voss H.-J.* The 7-cycle C7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5 // Discrete Math. 2007. V. 307. P. 1430–1435.
19. *Borodin O. V.* Structural properties of plane maps with minimum degree 5 // Math. Nachr. 1992. V. 18. P. 109–117.
20. *Ferencová B., Madaras T.* Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.
21. *Borodin O. V.* Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.

22. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.

23. *Borodin O. V.* On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25. P. 198–223.

Статья поступила 16 ноября 2014 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677013
shmgnanna@mail.ru