Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 514.763

ПОТОК РИЧЧИ НА КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. Пирхади, А. Разави

Аннотация. Рассматривается поток Риччи на контактных многообразиях. Определяется поток контактной кривизны и устанавливается существование в малом. Кроме того, изучен контактный солитон Риччи и показано, что любое решение ненормированного потока контактной кривизны является самоподобным решением, соответствующим контактному солитону Риччи, являющемуся стационарным солитоном. Наконец, показано, что зависящее от времени контактных эйнштейновых, сасакиевых, K-контактных или η-эйнштейновых 1-форм η_t является решением нормализованного потока контактной потока кривизны, если оно является конформной вариацией начальной 1-формы η_0.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.513

Ключевые слова: контактное многообразие, многообразие Эйнштейна, поток Риччи, солитон Риччи.

1. Введение

Контактная геометрия была введена Софусом Ли в 1872 г в [1], изучавшим контактные преобразования как геометрическое средство для исследования систем дифференциальных уравнений. Контактная геометрия имеет многочисленные приложения в механике, оптике, термодинамике и теории управления. Классическая теория систем дифференциальных уравнений первого порядка для скалярной функции может рассматриваться как теория подмногообразий контактных многообразий. Почти контактные многообразия впервые были изучены Базби и Вонгом [2] и Греем [3] с использованием топологического метода; затем Сасаки в [4] предложил геометрическую точку зрения на почти контактные структуры, а несколько позже Тасиро [5] показал, что на любой ориентируемой дифференцируемой гиперповерхности в почти комплексном многообразии естественно вводится почти контактная структура. Детали можно найти в [6, 7].

Одной из основных задач дифференциальной геометрии является нахождение метрик постоянной кривизны на римановых многообразиях. Существование такой метрики важно для доказательства таких значительных геометрических теорий, как гипотеза Терстона о геометризации для 3-многообразий [8]. В 1982 г. Гамильтон [9] ввел понятие потока Риччи и показал, что при условии положительности исходной метрики он имеет решение с постоянной кривизной на 3-многообразиях. Работы Гамильтона и Перельмана показали, что поток Риччи является одним из мощных средств в геометрическом анализе, и привели к доказательству знаменитых гипотезы Пуанкаре и гипотезы Терстона о геометризации в трехмерной топологии. Кроме того, внимание многих авторов, работающих в контактной и симплектической геометрии, было привлечено вариационным исчислением (см. [10–14]). Например, в [15] Танно изучал вариацию на пространстве всех метрик, ассоциированных с контактной формой ($M(\eta)$), и нашел критическую точку функционала энергии Дирихле на этом пространстве. На протяжении десятилетий вариационные задачи широко использовались для изучения топологии и геометрии контактных структур. В данной работе мы используем поток Риччи и вариационное исчисление для получения новой информации о контактных многообразиях.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 содержатся некоторые определения и утверждения о контактных многообразиях. В разд. 3 определяются нормированный и ненормированный контактные потоки кривизны и устанавливается существование в малом ненормированного потока контактной кривизны, а также показывается, что любое решение ненормированного потока контактной кривизны можно перевести в решение нормированного потока контактной кривизны с помощью однопараметрического семейства диффеоморфизмов и наоборот. В разд. 4 определяется контактный солитон Риччи и для него доказываются некоторые интересные результаты.

2. Контактные структуры

В этом разделе напоминаем некоторые из основных фактов, касающихся геометрии контактных многообразий. Пусть $H \subset TM$ — гладкое распределение гиперплоскостей; тогда для каждой точки $p \in M$ имеется 1-форма η такая, что $\ker(\eta_p) = H_p$, и эта 1-форма единственна с точностью до скалярного умножения. Поскольку H — гладкое распределение, η_p можно продлить до гладкой 1-формы η в окрестности U точки p со свойством $\ker(\eta) = H|_U$. Назовем η *локально определяющей формой для* H.

Определение 2.1. *Контактная структура на* M — это гладкое распределение гиперплоскостей H такое, что для всякой локально определяющей 1-формы η форма $d\eta|_H$ невырожденна. Пара (M, H) и форма η называются *контактными многообразием* и *локальной контактной формой* соответственно.

Замечание 1. Заметим, что если (M, H) — контактное многообразие, $p \in M$ и η — локальная контактная форма в окрестности U точки p, то $d\eta$ — симплектическая форма на $H|_U$. В частности, $d\eta_p$ — симплектическая форма на H_p в точке p. Следовательно, H_p четномерно, и потому T_pM нечетномерно. Значит, M должно быть нечетномерным.

Почти контактная метрическая структура на $(2n+1)$-мерном многообразии M — это $(1,1)$-тензорное поле φ, векторное поле ξ, 1-форма η и риманова метрика g, удовлетворяющие равенствам [6]

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1. \tag{1}$$

$$g(X, Y) = g(\varphi(X), \varphi(Y)) + \eta(X)\eta(Y). \tag{2}$$

Почти контактная метрическая структура [6] — это:

1) сасакиева структура, если $(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$ для всех $X, Y \in TM$;

2) K-контактное многообразие, если $\nabla\xi = -\varphi$, где ∇ — связность Леви-Чивита для g;

3) η-эйнштейнова структура, если $Rc(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y)$,

где a и b — гладкие функции на M. Известно [6], что всякое сасакиево многообразие K-контактно, но обратное верно только в размерности 3. Почти комплексная структура — это тензорное поле J типа $(1,1)$ на многообразии такое, что $J^2=-I$. Эрмитова метрика на почти комплексном многообразии (M,J) — это риманова метрика, инвариантная относительно J, т. е. $g(JX,JY)=g(X,Y)$. Заметим, что J отрицательна и самосопряжена относительно g, т. е. $g(X,JY)=-g(JX,Y)$, и потому $\Omega(X,Y)=g(X,JY)$ определяет 2-форму, называемую *фундаментальной 2-формой* почти эрмитовой структуры (M,J,g). Если $d\Omega=0$, то структура называется *почти кэлеровой*.

Под *симплектическим многообразием* (M,ω) понимают гладкое многообразие M, снабженное замкнутой невырожденной 2-формой ω, называемой *симплектической формой*, т. е. $i_X(\omega)$ — ненулевая 1-форма на M для каждого ненулевого поля X.

Следующее предложение показывает связь между симплектическими многообразиями и почти комплексными структурами [6].

Предложение 2.2. *Пусть (M^{2n},ω) — симплектическое многообразие. Тогда существуют риманова метрика g и почти комплексная структура J такие, что*

$$g(X,JY)=\omega(X,Y).$$

С этого момента предполагаем, что M^{2n+1} — ориентируемое риманово многообразие и h_0 — фиксированная риманова метрика на M. Поэтому если (M,H) — контактное риманово многообразие и η — глобальная 1-форма на M, то $d\eta$ — симплектическая 1-форма на векторном расслоении H. Определим $A\in\operatorname{Aut}(H)$ формулой

$$d\eta(X,Y)=h_0(X,AY)$$

для любых $X,Y\in\Gamma(H)$. Поскольку форма $d\eta$ антисимметрична, $h_0(X,AY)=-h_0(AX,Y)$. Пусть A^* — оператор, сопряженный к A по отношению к h_0; тогда оператор A^*A $(=-A^2)$ симметричен и положительно определен в каждой точке и потому диагонализуем и имеет строго положительные вещественные собственные числа. Пусть $\sqrt{(AA^*)}$ $(=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}))$ — квадратный корень из AA^*. Оператор A перестановочен с $(\sqrt{AA^*})$. Положим $J:=(\sqrt{(AA^*)})^{-1}A$. Заметим, что оператор J перестановочен как с A, так и с $\sqrt{(AA^*)}$, откуда следует, что

$$J^*=A^*(\sqrt{(AA^*)})^{-1}=-A(\sqrt{(AA^*)})^{-1}=-J,$$

$$J^2=-JJ^*=-(\sqrt{(AA^*)})^{-1}AA^*(\sqrt{(AA^*)})^{-1}=-\operatorname{id}.$$

Положим $h(X,Y)=h_0(X,\sqrt{(AA^*)}Y)$ для произвольных $X,Y\in\Gamma(H)$. Легко видеть, что h определяет метрику на векторном расслоении H и $d\eta(X,Y)=h(X,JY)$. Значит, в силу поляризации существует единственная (с точностью до h_0) риманова метрика h на распределении H и единственное (с точностью до h_0) тензорное поле J типа $(1,1)$ такое, что для любых $X,Y\in\Gamma(H)$

$$J^2(X)=-X,\quad h(X,JY)=d\eta(X,Y). \tag{3}$$

Пусть ξ — характеристическое векторное поле для η $(\eta(\xi)=1)$, продолжающее метрику h до метрики g по формуле $g(X,\xi)=\eta(X)$ и J до поля эндоморфизмов φ по формуле $\varphi(\xi)=0$, и потому

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi,\quad g=-g^T+\eta\otimes\eta, \tag{4}$$

где g^T — трансверсальная метрика, определяемая формулой

$$g^T(X,Y) = d\eta(X,\varphi Y). \tag{5}$$

Имеется также хорошо известная деформация контактных форм, называемая D-*гомотетической* и определяемая формулой

$$\eta = a\eta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \xi = \frac{1}{a}\xi_0, \quad g = ag_0 + a(a-1)\eta_0 \otimes \eta_0, \tag{6}$$

где a — положительная константа.

Векторное поле X на контактном многообразии (M,η) называется *контактным векторным полем*, если существует гладкая функция f такая, что

$$L_X\eta = f\eta. \tag{7}$$

Пусть Λ — множество всех контактных векторных полей на M, и пусть отображения ρ_1 и ρ_2 определяются следующим образом:

$$\rho_1 : \Lambda \to C^\infty(M), \quad X \mapsto f_X := \eta(X). \tag{8}$$

$$\rho_2 : C^\infty(M) \to \Lambda, \quad f \mapsto X_f. \tag{9}$$

где X_f — векторное поле, заданное формулой

$$\eta(X_f) = f, \quad i_{X_f}d\eta = df(\xi)\eta - df. \tag{10}$$

Отображения ρ_1 и ρ_2 определяют биекцию между контактными векторными полями и гладкими функциями на M, что доказано в [13]. Легко видеть, что

$$L_{X_f}\eta = df(\xi)\eta. \tag{11}$$

3. Поток контактной кривизны и существование в малом

Определение 3.1. Пусть (M^{2n+1},η_0) — контактное многообразие, и пусть (M,η_t) — гладкое однопараметрическое семейство контактных метрических структур на M. Подобно гамильтонову потоку Риччи рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}Rc_{g_t}(\xi_t,.) + \frac{1}{2}\eta_t, \quad \eta(0,.) = \eta_0, \tag{12}$$

и назовем его *нормированным потоком* контактной кривизны. Будем называть

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}Rc_{g_t}(\xi_t,.), \quad \eta(0,.) = \eta_0, \tag{13}$$

ненормированным потоком контактной кривизны.

Покажем, как можно перейти от решения нормированного потока контактной кривизны к решению ненормированного потока контактной кривизны, и наоборот. Следующая лемма [6] показывает, что контактные формы инвариантны относительно диффеоморфизмов.

Лемма 3.2. *Пусть η — контактная форма и ψ — преобразование на M^{2n+1}. Тогда $\psi^*\eta$ — контактная форма, контактные компоненты которой вычисляются по формулам*

$$\bar{g} = \psi^* g, \quad \overline{\varphi} = (\psi^{-1})_*\varphi\psi_*, \quad \bar{\xi} = (\psi^{-1})_*\xi. \tag{14}$$

Предложение 3.3. *Пусть M — компактное многообразие и $\{\eta_t\}$ — решение нормированного потока контактной кривизны. Тогда найдется однопараметрическое семейство диффеоморфизмов ψ_t такое, что $\psi_t^*\eta_t$ есть решение ненормированного потока контактной кривизны. Аналогично всякое решение ненормированного потока кривизны приводит к решению нормированного потока кривизны.*

Доказательство. Пусть $\{\eta_t\}$ — решение нормированного потока контактной кривизны, и пусть f_t — решение уравнения

$$\xi_t(f_t) = 1, \tag{15}$$

являющегося уравнением с частными производными первого порядка и имеющего решение. Символами X_t обозначим векторные поля, соответствующие f_t. Тогда

$$L_{X_t}\eta_t = \eta_t. \tag{16}$$

Пусть ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, определяемое следующим образом [8]:

$$\frac{\partial\psi_t(x)}{\partial t} = -\frac{1}{2}X_t(\psi_t(x)). \tag{17}$$

Утверждается, что $\psi_t^*\eta_t$ — решение ненормированного потока контактной кривизны. Имеем

$$\begin{aligned}(\psi_t^*\eta_t)' &= \psi_t^*(\eta_t') + \psi_t^*(L_{X_t}\eta_t)\\ &= \psi_t^*\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Ric}_{g_t}(\xi_t,.) + \frac{1}{2}\eta_t\right) - \frac{1}{2}\psi_t^*(\eta_t) = -\frac{1}{2}\operatorname{Ric}_{\psi_t{}^*g_t}(\psi_{t*}^{-1}\xi_t,.).\end{aligned} \tag{18}$$

Пусть $\{\eta_t\}$ — решение ненормированного потока контактной кривизны и ϕ_t определяется следующим образом:

$$\frac{\partial\phi_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2}X_t(\phi_t(x)). \tag{19}$$

Используя это, получаем

$$\begin{aligned}(\phi_t^*\eta_t)' &= \phi_t^*(\eta_t') + \phi_t^*(L_{X_t}\eta_t)\\ &= \phi_t^*\left(-\frac{1}{2}Rc_{g_t}(\xi_t,.)\right) + \frac{1}{2}\phi_t^*(\eta_t) = -\frac{1}{2}Rc_{\phi_t{}^*g_t}(\phi_{t*}^{-1}\xi_t,.) + \frac{1}{2}\phi_t^*(\eta_t). \quad \square\end{aligned} \tag{20}$$

Докажем существование в малом упомянутых выше уравнений. Для этого достаточно показать, что существует $T > 0$, для которого $\eta_t := \eta_0 + t\eta$ является контактной формой для каждого $t \in [0, T]$.

Лемма 3.4. *Пусть η_0 — контактная форма и η — 1-форма на M. Тогда существует положительное вещественное число T такое, что $\eta_t := \eta_0 + t\eta$ есть контактная форма для любого $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\eta_t \wedge (d\eta_t)^n \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$. Без ограничения общности можем предполагать, что η_0 — положительная контактная форма ($\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n > 0$). Определим f соотношением

$$f : M \times R \to R, \quad (p, t) \to \eta_t \wedge (d\eta_t)^n(X_1, \dots, X_{2n+1})(p), \tag{21}$$

где $\{X_1, \dots, X_{2n+1}\}$ — положительно ориентированный базис на M. Из

$$\eta_t \wedge (d\eta_t)^n = t^{n+1}\eta \wedge (d\eta)^n + \dots + \eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \tag{22}$$

получаем, что $f(M, 0) > 0$. Поскольку f — гладкое отображение на $M \times R$, существует положительное вещественное число T такое, что $f(t, M)$ остается положительным для любого $t \in [0, T]$, и это показывает, что η_t для каждого $t \in [0, T]$ является контактной формой. $\square$

Далее, пусть η_t — семейство контактных форм, решающее (13). По теореме Мозера для контактных форм [16] найдется семейство зависящих от времени диффеоморфизмов ψ_t таких, что

$$\eta_t = \psi_t^* \eta_0. \tag{23}$$

Поэтому можно ограничить существование решения на меньшее множество контактных форм, удовлетворяющих соотношению

$$g_t^T = f(t) g_0^T. \tag{24}$$

Используем D-гомотетичную деформацию, чтобы убедиться, что существует много контактных форм на контактном многообразии (M, η_0), имеющих такой вид. Так как мы хотим использовать линеаризацию для решения (12), нужно получить $(\xi')_{t=0}$, что приводит к следующему утверждению.

Предложение 3.5. *Пусть $\eta_t = \eta_0 + t\eta$ и ξ_t — характеристическое векторное поле, соответствующее η_t. Тогда $\xi'_{t=0}$ вычисляется по формуле*

$$\xi'_{t=0} = -\eta(\xi_0)\xi_0 - \varphi_0(\sharp d\eta(\xi_0, .)). \tag{25}$$

Доказательство. Пользуясь равенством $\eta_t(\xi_t) = 1$ и дифференцируя в нуле, имеем

$$\eta(\xi_0) + \eta_0(\xi'_{t=0}) = 0. \tag{26}$$

Отсюда следует, что

$$\xi'_{t=0} = -\eta(\xi_0)\xi_0 + X, \tag{27}$$

где X — сечение H_0. Используя равенство $d\eta_t(\xi_t, .) = 0$, выводим, что

$$d\eta_0(\xi'_{t=0}, .) + d\eta(\xi_0, .) = 0. \tag{28}$$

Подставляя (27) в это уравнение, получим

$$\begin{gathered} d\eta_0(X, .) = -d\eta(\xi_0, .), \quad g_0(\varphi_0 X, .) = d\eta(\xi_0, .), \\ \flat\varphi_0 X = d\eta(\xi_0, .), \quad \varphi_0 X = \sharp d\eta(\xi_0, .). \end{gathered} \tag{29}$$

Из (29) следует, что

$$X = -\varphi_0(\sharp d\eta(\xi_0, .)). \tag{30}$$

Поэтому равенство (27) переписывается в виде

$$\xi'_{t=0} = -\eta(\xi_0)\xi_0 - \varphi_0(\sharp d\eta(\xi_0, .)), \tag{31}$$

который представляет собой систему уравнений с частными производными первого порядка относительно η. $\square$

Из сделанного выше предположения заключаем, что g' имеет следующий вид:

$$g'_{t=0} = (\eta \otimes \eta_0 + \eta_0 \otimes \eta) + \text{ члены низшего порядка и независимые члены.} \tag{32}$$

Как известно [8], линеаризация тензора Риччи в направлении h характеризуется соотношением

$$(Rc_{ij})' = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{lj}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^j}\right) + \text{ члены низшего порядка.} \quad (33)$$

Заменяя в (33) h выражением $(\eta_0 \otimes \eta + \eta \otimes \eta_0)$, получаем

$$(Rc_{ij})' = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(-\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x^k \partial x^l}(\eta_0)_j - \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x^k \partial x^l}(\eta_0)_i + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial x^i \partial x^k}(\eta_0)_j + \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x^i \partial x^k}(\eta_0)_l \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial x^j \partial x^k}(\eta_0)_i + \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x^j \partial x^k}(\eta_0)_l - \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^i \partial x^j}(\eta_0)_l - \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial x^i \partial x^j}(\eta_0)_k\right) + \text{ члены низшего порядка.} \quad (34)$$

Положим $E = -\frac{1}{2}Rc(\xi_t, .)$ и получим

$$(E_i)' = -\frac{1}{2}(R_{ij})'\xi_0^j - \frac{1}{2}(R_{ij})_0(\xi^j)'_{t=0} = -\frac{1}{2}(R_{ij})'\xi_0^j - \frac{1}{2}(R_{ij})_0\xi_0^j(\eta)_k\xi_0^k. \quad (35)$$

Символ E' в точке x — это отображение

$$\sigma(E')(x) : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \to \Gamma(T^*M), \quad (36)$$

задаваемое следующим образом:

$$\sigma(E')_i(x)(a,\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{n}(a_k a_l \eta_i (\eta_0)_j + a_k a_l \eta_j (\eta_0)_i - a_i a_k \eta_l (\eta_0)_j - a_i a_k \eta_j (\eta_0)_l$$
$$- a_j a_k \eta_l (\eta_0)_i - a_j a_k \eta_i (\eta_0)_l + a_i a_j \eta_k (\eta_0)_l + a_i a_j \eta_l (\eta_0)_k)\xi_0^j. \quad (37)$$

Полагая $a := (1, 0, \dots, 0)$ и $\eta := (1, 0, \dots, 0)$, легко убедиться, что $\sigma(E')(x)(a, \eta) = 0$. Поэтому $\sigma(E')$ имеет в направлении a нулевое собственное значение и поток контактной кривизны не является строго параболическим уравнением.

Аналогично методу де Тюрка [8] определим зависящее от времени гладкое векторное поле W_t, ассоциированное с контактной формой η_t, следующим образом:

$$W_t^k(\eta_t) = g_t^{ij}\big(\Gamma_{ij}^k(g_t) - \overline{\Gamma}_{ij}^k\big), \quad (38)$$

где g_t — риманова метрика, ассоциированная с η_t, и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ — символы Кристоффеля римановой метрики h_0. Пусть Λ — множество всех контактных форм на M^{2n+1}. Рассмотрим оператор

$$P : \Lambda \to \Gamma(T^*M), \quad \eta_t \to i_{\xi_t}(L_{W_t} g_t), \quad (39)$$

где g_t и ξ_t — контактные компоненты, зависящие от η_t. В координатах имеем

$$(P(\eta))_i = \xi_t^j(\nabla_i (W_t)_j + \nabla_j (W_t)_i), \quad (40)$$

где $(W_t)_i$ — компоненты $\flat W$. Можем записать $P(\eta_t)$ просто следующим образом:

$$P(\eta_t) = L_{W_t}\eta_t + i_{[\xi_t, W_t]} g_t. \quad (41)$$

Используя линеаризацию в направлении η и нормальные координаты в точке x, получаем

$$(P'(\eta_0)(\eta)) = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\eta_l}{\partial x^i\partial x^k}(\eta_0)_j + \frac{\partial^2\eta_j}{\partial x^i\partial x^k}(\eta_0)_l + \frac{\partial^2\eta_l}{\partial x^j\partial x^k}(\eta_0)_i \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2\eta_i}{\partial x^j\partial x^k}(\eta_0)_l - \frac{\partial^2\eta_k}{\partial x^i\partial x^j}(\eta_0)_l - \frac{\partial^2\eta_l}{\partial x^i\partial x^j}(\eta_0)_k\right)\xi_0^j + \text{ члены низшего порядка.} \tag{42}$$

Следовательно, определим модифицированный поток контактной кривизны формулой

$$\frac{\partial\eta_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}Rc(\xi_t,.) + \frac{1}{2}P(\eta_t), \quad \eta(0,.) = \eta_0. \tag{43}$$

Предложение 3.6. *Модифицированный поток контактной кривизны является параболическим уравнением.*

Доказательство. Пусть $L := -\frac{1}{2}Rc(\xi_t,.)+\frac{1}{2}P(\eta_t)$. Прямым вычислением можно продифференцировать символ модифицированного потока контактной кривизны таким образом:

$$\sigma(L')_i(x)(a,\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k,l=1}^{n}(a_k a_l \eta_i(\eta_0)_j + a_k a_l \eta_j(\eta_0)_i)\xi_0^j. \tag{44}$$

Утверждается, что этот оператор имеет n положительных собственных значений в каждой точке. Определим линейную функцию f для каждой точки x следующим образом:

$$f : T_xM \to R, \quad (v_i) \longrightarrow (\xi_0)_x^i v_i. \tag{45}$$

Тогда f — ненулевая линейная функция, потому что $f(\eta_0)_x = 1$. Следовательно, существуют $v_1,\dots,v_{2n} \in T_xM$ такие, что $f(v_i) = 0$ для $i = 1,\dots,2n$. С другой стороны, символ оператора L' — диагональный оператор на $\{v_1,\dots,v_{2n}\}$, т. е.

$$\sigma(L')(a,v_i) = |a|^2 v_i. \tag{46}$$

Полагая $v_{2n+1} := (\eta_0)_x$ и используя равенства $f(v_{2n+1}) = 1$ и $\sigma(L')(a,v_{2n+1}) = 2|a|^2 v_{2n+1}$, можем заключить, что L — строго параболическое уравнение и система (43) обладает существованием в малом. $\square$

Следствие 3.7. *Модифицированный поток контактной кривизны имеет единственное решение в малом.*

Рассмотрим векторное поле X_t, заданное формулой

$$X_t = -\sharp d\eta_t([\xi_t,W_t],.). \tag{47}$$

Определение поля X_t приводит к следующему утверждению.

Предложение 3.8. *Пусть W_t и X_t определяются формулами* (38) *и* (47) *соответственно. Тогда*

$$L_{X_t}\eta_t + L_{X_{\eta_t(W_t)}}\eta_t = i_{[\xi_t,W_t]}g_t. \tag{48}$$

Доказательство. Используя свойства контактных структур и определение X_t, получаем

$$d\eta_t(X_t,Y_t) = g_t(X_t,\varphi_t Y_t) = g_t(-\sharp d\eta_t([\xi_t,W_t],.),\varphi_t Y_t)$$
$$= -d\eta_t([\xi_t,W_t],\varphi_t Y_t) = -g_t\big([\xi_t,W_t],\varphi_t^2 Y_t\big) = g_t([\xi_t,W_t],Y_t), \tag{49}$$

где $Y_t \in H_t$. Перепишем (49):

$$d\eta_t(X_t,.) + \eta_t[\xi_t, W_t]\eta_t = i_{[\xi_t,W_t]}g_t. \tag{50}$$

Из равенства $i_{[X,Y]} = [i_X, L_Y]$ следует, что

$$i_{[\xi_t,W_t]}\eta_t = i_{\xi_t}L_{W_t}\eta_t - L_{W_t}i_{\xi_t}\eta_t = i_{\xi_t}(i_{W_t}d\eta_t + di_{W_t}\eta_t) = d(\eta_t(W_t))\xi_t. \tag{51}$$

Пусть $X_{\eta_t(W_t)}$ — контактное векторное поле, соответствующее гладкой функции $\eta_t(W_t)$. Тогда

$$L_{X_{\eta_t(W_t)}}\eta_t = d(\eta_t(W_t))\xi_t\eta_t. \tag{52}$$

С другой стороны, из определения X_t имеем

$$\eta_t(X_t) = g_t(X_t, \xi_t) = g_t(-\sharp d\eta_t([\xi_t, W_t], .), \xi_t) = -d\eta_t([\xi_t, W_t], \xi_t) = 0. \tag{53}$$

Используя (50)–(53), получаем соотношение

$$L_{X_t}\eta_t + L_{X_{\eta_t(W_t)}}\eta_t = i_{[\xi_t,W_t]}g_t. \quad \square \tag{54}$$

Теорема 3.1. *Пусть (M^{2n+1}, η_0) — компактное контактное многообразие. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что на $M \times [0, \varepsilon)$ существует единственное решение ненормированного потока контактной кривизны.*

Доказательство. Пусть $\{\phi_t\}$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на M, определяемое как

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x) = -\frac{1}{2}W(\phi_t(x), t) - \frac{1}{2}X_t(\phi_t(x)) - \frac{1}{2}X_{\eta_t(W_t)}(\phi_t(x)), \quad \phi_0 = \mathrm{Id}_M. \tag{55}$$

Известно, что диффеоморфизмы ϕ_t существуют, поскольку существует решение модифицированного потока контактной кривизны. Это можно легко доказать так же, как и в [8, с. 82].

Утверждается, что $\bar{\eta}(t) = \phi_t^*\eta(t)$ является решением ненормированного потока контактной кривизны, где $\eta(t)$ — решение модифицированного потока контактной кривизны на $[0, T)$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\eta_t) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}(\phi_{t+s}^*\eta_{t+s}) = \phi_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\eta_t\right) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}(\phi_{t+s}^*\eta_t)\\ &= \phi_t^*\left(-\frac{1}{2}i_\xi Rc + \frac{1}{2}P(\eta_t)\right) - \frac{1}{2}\phi_t^*(P(\eta_t)) = -\frac{1}{2}i_{(\phi_t^{-1})_*\xi_t}Rc(\phi_t^*g_t).\end{aligned} \tag{56}$$

Чтобы показать единственность, предположим, что η_t — решение потока контактной кривизны и $\{W_t\}$ — семейство зависящих от времени векторных полей, определяемых формулой (38). Пусть $\phi_t : (M, g) \to M$ — произвольное однопараметрическое семейство диффеоморфизмов. Имеем

$$\left((\phi_t^{-1})^*g\right)^{\alpha\beta}\frac{\partial\left(\phi_t^{-1}\right)^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial\left(\phi_t^{-1}\right)^j}{\partial y^\beta} = g^{ij}. \tag{57}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\left((\phi_t^{-1})^*g\right) = \frac{\partial^2\left(\phi_t^{-1}\right)^k}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\frac{\partial\phi_t^\gamma}{\partial x^k} + \Gamma_{ij}^k(g)\frac{\partial\left(\phi_t^{-1}\right)^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial\left(\phi_t^{-1}\right)^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial\phi_t^\gamma}{\partial x^k}. \tag{58}$$

Отсюда

$$g^{ij}\big(\Gamma^k_{ij}-\overline{\Gamma}^k_{ij}\big)=\big((\phi_t^{-1})^*g\big)^{\alpha\beta}\left\{\left(\frac{\partial^2\big(\phi_t^{-1}\big)^k}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}+\Gamma^k_{ij}(g)\frac{\partial\big(\phi_t^{-1}\big)^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial\big(\phi_t^{-1}\big)^i}{\partial y^\alpha}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial^2\big(\phi_t^{-1}\big)^k}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}+\overline{\Gamma}^k_{ij}(g)\frac{\partial\big(\phi_t^{-1}\big)^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial\big(\phi_t^{-1}\big)^i}{\partial y^\alpha}\right)\right\}. \quad (59)$$

Поэтому

$$(\phi_t)_*W=\overline{W}, \quad (60)$$

где $\overline{W}^k=\big((\phi_t^{-1})^*g\big)^{\alpha\beta}\big(\Gamma^k_{\alpha\beta}\big((\phi_t^{-1})^*g\big)-\overline{\Gamma}^k_{\alpha\beta}\big)$. Пусть $\bar{\eta}_t=(\phi_t^{-1})^*\eta_t$ и $(\bar{\xi},\overline{X_t},\overline{X}_{\bar{\eta}_t(\overline{W})})$ — определенные выше контактные компоненты, соответствующие $\bar{\eta}_t$. Вычисления, подобные проведенным выше, дают

$$(\phi_t)_*X_t=\overline{X_t},\quad (\phi_t)_*X_{\eta_t(W_t)}=\overline{X}_{\bar{\eta}_t(\overline{W})}. \quad (61)$$

Пусть ϕ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, определенных формулой

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x)=\frac{1}{2}W(\phi_t(x),t)+\frac{1}{2}X_t(\phi_t(x))+\frac{1}{2}X_{\eta_t(W_t)}(\phi_t(x)),\quad \phi_0=Id_M. \quad (62)$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((\phi_t^{-1})^*\eta_t\big)=\frac{\partial}{\partial s}\big|s=0\big((\phi_{t+s}^{-1})^*\eta_{t+s}\big)=(\phi_t^{-1})^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\eta_t\right)+\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\big((\phi_{t+s}^{-1})^*\eta_t\big)$$
$$=(\phi_t^{-1})^*\left(-\frac{1}{2}i_\xi Rc\right)+\left(L_{(\phi_t)_*\frac{\partial\phi_t}{\partial t}}(\phi_t^{-1})^*\eta_t\right)=-\frac{1}{2}i_{(\phi_t)_*\xi_t}Rc\big((\phi_t^{-1})^*g_t\big)+\frac{1}{2}P(\bar{\eta}_t). \quad (63)$$

Из единственности решения модифицированного потока контактной кривизны на подходящем временно́м интервале видно, что поток контактной кривизны имеет единственное решение в малом. □

4. Контактный солитон Риччи

Определение 4.1. Пусть (M,η_t) — решение ненормированного потока контактной кривизны на временно́м интервале $[0,T]$. Будем говорить, что η_t — *самоподобное решение*, если существуют скаляры $\sigma(t)$ и диффеоморфизмы ψ_t такие, что

$$\eta_t=\sigma(t)\psi_t^*(\eta_0). \quad (64)$$

Определение 4.2. Контактное многообразие (M,η_0) называется *контактным солитоном Риччи*, если существуют константа λ и векторное поле X такие, что верно равенство

$$\frac{1}{2}i_{\xi_0}Rc(g_0)+L_X\eta_0+\lambda\eta_0=0. \quad (65)$$

Если $\lambda=-1,0,1$, то солитон называется *сжимающимся*, *стабильным* и *расширяющимся* соответственно.

Предложение 4.3. *Пусть (M, η_t) — самоподобное решение ненормированного потока контактной кривизны. Тогда существует векторное поле X на M такое, что (M, η_0, X) — контактный солитон Риччи. Обратно, для всякого солитона Риччи (M, η_0, X) существуют скаляры $\sigma(t)$ и диффеоморфизмы ψ_t такие, что $\eta(t) := \sigma(t)\psi_t^*(\eta_0)$ — решение ненормированного потока контактной кривизны.*

Доказательство. Предположим сначала, что (M, η_t) — самоподобное решение. Без ограничения общности можем предполагать, что $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = \mathrm{id}$. Пусть $Y(t)$ — семейство векторных полей, порожденных ψ_t. Мы можем записать

$$-\frac{1}{2} i_{\xi_0} Rc(g_0) = \frac{\partial \eta(t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sigma'(0)\eta_0 + L_{Y(0)}\eta_0. \tag{66}$$

Обратно, пусть (M, η_0, X) — контактный солитон Риччи. Определим $\sigma(t)$ равенством $\sigma(t) := \sqrt{1 + 2\lambda t}$, а Y_t — равенством $Y_t(x) := \frac{1}{\sigma^2(t)} X(x)$. Пусть ψ_t — диффеоморфизмы, порожденные Y_t. Утверждается, что $\eta(t)$ есть решение ненормированного потока контактной кривизны. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\sigma(t)}\psi_t^*(\eta_0) + \sigma(t)\psi_t^*(L_{Y_t}\eta_0) = \frac{1}{\sigma(t)}\psi_t^*(\lambda\eta_0 + L_X\eta_0) \\ &= \frac{1}{\sigma(t)}\psi_t^*\left(-\frac{1}{2} i_{\xi_0} Rc(g_0)\right) = -\frac{1}{2\sigma(t)} i_{(\psi_t^{-1})_*\xi_0}\psi_t^*(Rc(g_0)).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} i_{\xi_t} Rc(g_t). \quad \square \tag{67}$$

Пусть M — компактное многообразие, и пусть η_t — решение ненормированного потока контактной кривизны. Из теоремы Мозера для контактных многообразий имеем следующее утверждение.

Следствие 4.4. *Всякое решение ненормированного потока контактной кривизны самоподобно, и соответствующий ему контактный солитон Риччи стационарен.*

Определение 4.5. Контактное многообразие (M, η) называется *контактно-эйнштейновым многообразием*, если риманова метрика g, соответствующая почти контактной структуре $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, эйнштейнова.

В определении 4.5 η называется *контактно-эйнштейновой* 1*-формой.*

Предложение 4.6. *Пусть η_t — решение нормированного потока контактной кривизны такое, что $\{\eta_t\}$ — семейство контактно-эйнштейновых* 1*-форм на M. Тогда η_t — конформная вариация η_0.*

Доказательство. Пусть η_t — семейство контактно-эйнштейновых 1-форм, решающих уравнение потока контактной кривизны. Тогда

$$i_{\xi_t} Rc(g_t) = \sigma(t)\eta_t \tag{68}$$

и получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma(t)\eta_t + \frac{1}{2}\eta_t, \tag{69}$$

следовательно,

$$\eta_t = e^{\frac{1}{2}\int(1-\sigma(t))dt}\eta_0. \quad \square \tag{70}$$

Пусть η_t — зависящее от времени семейство сасакиевых форм или семейство K-контактных форм на M^{2n+1}. Тогда 1-форма $Rc_{g_t}(\xi_t, .)$ выглядит следующим образом:

$$Rc_{g_t}(\xi_t, .) = 2n\eta_t. \tag{71}$$

Если η_t — семейство η-эйнштейновых 1-форм, то

$$Rc_{g_t}(\xi_t, .) = (a+b)\eta_t. \tag{72}$$

Следовательно, предложение 4.6 можно распространить на сасакиевы, K-контактные и η-эйнштейновы 1-формы.

Предложение 4.7. *Пусть η_t — зависящее от времени семейство сасакиевых,* K*-контактных или η-эйнштейновых* 1*-форм. Тогда семейство η_t — решение нормированного потока контактной кривизны, если оно является конформной вариацией контактной формы η_0.*

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные комментарии и предложения по улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lie S.* Theorie der transformationsgruppen. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970.
2. *Boothby W. M., Wang H. C.* On contact manifolds // Ann. Math. 1958. V. 68, N 2. P. 721–734.
3. *Gray J. W.* Some global properties of contact structures // Ann. Math. 1959. V. 69, N 2. P. 421–450.
4. *Sasaki S., Hatakeyama Y.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tohoku Math. J. (2). 1961. V. 13, N 2. P. 281–294.
5. *Tashiro Y.* On contact structure of hypersurfaces in complex manifold // Tohoku Math. J. (2). 1963. V. 15, N 2. P. 62–78.
6. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston: Birkhäuser, 2010.
7. *Geiges H.* A brief history of contact geometry and topology // Expo. Math. 2001. V. 19, N 1. P. 25–53.
8. *Chow B., Knopf D.* The Ricci flow: An introduction. Providence RI: Amer. Math. Soc, 2004.
9. *Hamilton R. S.* Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Differ. Geom. 1982. V. 17, N 2. P. 255–306.
10. *Банару М. Б.* Аксиома гиперповерхностей Кенмоцу для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 261–266.
11. *Смоленцев Н. К.* О пространстве римановых метрик на симплектическом и контактном многообразиях // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1402–1408.
12. *Streets J., Tian G.* A parabolic flow of pluriclosed metrics // Int. Math. Res. Not. 2010. V. 2010, N 16. P. 3101–3133.
13. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and nonlinear differential equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. V. 101.
14. *Song J., Weinkove B.* Lecture notes on the Kahler-Ricci flow. 2012. htt[://arxiv.org/abs/1212.3653.
15. *Tanno S.* Variational problems on contact Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 314, N 1. P. 349–379.
16. *Piercey V. I.* Lecture note on Contact geometry. Univ. Arizona, 2008.

Статья поступила 22 июля 2014 г.

Vahid Pirhadi (Пирхади Вахид), Asadollah Razavi (Разави Асадулла)
Department of pure Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Amirkabir University of Technology,
424, Hafez Ave., Tehran, Iran
v.pirhadi@aut.ac.ir, arazavi@aut.ac.ir