Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.543

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Аннотация. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Доказано, что свободное произведение $\mathcal{K}$-группы A и $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы B с объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в группе B, $\mathcal{K}$-аппроксимируемо. Также получено достаточное условие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом в одном из сомножителей.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.113

Ключевые слова: корневой класс, аппроксимируемость конечными π-группами, аппроксимируемость корневыми классами, обобщенное свободное произведение.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathcal{K}$ (*$\mathcal{K}$-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм σ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ элемента g относительно гомоморфизма σ отличен от 1. Если в качестве $\mathcal{K}$ взять класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с наиболее изученным понятием финитной аппроксимируемости. Мы же рассмотрим свойство аппроксимируемости корневыми классами групп.

Согласно Грюнбергу [1] содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathcal{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Заметим, что в данном Грюнбергом определении корневого класса групп второе условие вытекает из первого и третьего. Кроме того, данное определение не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Более простая характеризация корневых классов была дана в работе [2], где показано, что корневыми являются те и только те наследственные классы групп, которые замкнуты относительно декартовых сплетений. Что же касается корневых классов, состоящих только из конечных групп, то для них известна еще более понятная и легко проверяемая характеризация: класс конечных групп корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений [3].

Отметим, что корневыми являются многие активно изучаемые классы групп: класс всех периодических групп, конечных групп, конечных p-групп, конечных π-групп, разрешимых групп, разрешимых групп без кручения. Имеет смысл упомянуть и тот факт, что пересечение любых двух корневых классов групп снова корневой класс [2].

В той же работе [1] Грюнбергом установлено, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда каждая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Позже Д. Н. Азаров и Тьеджо [4] доказали, что любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом, что полностью положительно разрешило вопрос о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости свободного произведения $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп.

Аппроксимируемость корневыми классами групп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений исследовалась в [2, 4–14]. Другие свойства корневых классов групп изучались в [2, 3, 15, 16]. Во многих случаях удается показать, что некоторое свойство конкретного корневого класса групп справедливо не только для данного корневого класса, но и в более общей ситуации, а иногда верно для всех корневых классов групп. Так, например, при изучении аппроксимируемости и отделимости корневыми классами групп утверждения, справедливые для уже привычных нам классов всех конечных групп, конечных p-групп, конечных π-групп, часто удается обобщить, накладывая на корневой класс лишь требование замкнутости относительно факторизации (сравни [17] и [11], [18] и [12]).

В данной работе рассматривается вопрос об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенного свободного произведения

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

двух групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$, при условии, что объединенная подгруппа является ретрактом в одном из сомножителей.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *ретрактом* этой группы, если существует гомоморфизм $\sigma : X \to Y$, действующий на подгруппе Y тождественно. Легко видеть, что подгруппа Y является ретрактом группы X тогда и только тогда, когда X представляет собой расщепляемое расширение некоторой группы Z (изоморфной ядру указанного выше гомоморфизма σ) при помощи Y.

Первым из результатов, полученных в данной работе, является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт группы B. Пусть также группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$, а группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда группа A является ретрактом G и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

При помощи этого утверждения получено достаточное условие аппроксимируемости группы G произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ (теорема 2), в котором группа A уже не обязательно принадлежит классу $\mathscr{K}$. Напомним определения используемых в формулировке этого условия понятий.

Подмножество M группы X называется *$\mathscr{K}$-отделимым в* X [19], если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего M, существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $x\sigma \notin M\sigma$.

Следуя [20], будем говорить, что группа X *$\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе* Y, если для любой нормальной в Y подгруппы $M \leqslant Y$ такой, что $Y/M \in \mathscr{K}$, найдется нормальная подгруппа N группы X, удовлетворяющая условиям $X/N \in \mathscr{K}$ и $N \cap Y \leqslant M$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт группы B. Пусть группы A и B $\mathscr{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H группы A $\mathscr{K}$-отделима, группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Тогда группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в разд. 3. В разд. 6 будет показано, что условия $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и $\mathscr{K}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H, содержащиеся в формулировках теоремы 2 и приводимого далее следствия 2, в общем случае не являются необходимыми для $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы G.

Сформулируем следствия теоремы 2. Говорят (см., например, [21]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathscr{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша — Зайцева, K — ретракт группы B. Тогда группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Следуя [22], нильпотентную группу будем называть *π-ограниченной*, если она обладает центральным рядом, каждый фактор X которого удовлетворяет следующему условию: в произвольной фактор-группе Y группы X все примарные компоненты, соответствующие числам из множества π, конечны.

Очевидно, что конечно порожденная нильпотентная группа оказывается π-ограниченной для любого множества π. Отметим также (см. [22, предложение 5]), что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то π-ограниченная нильпотентная группа — это в точности нильпотентная группа, ограниченная и разрешимая в смысле А. И. Мальцева [19].

Если $\mathscr{L}$ — некоторый класс групп, то через $\pi(\mathscr{L})$ будем обозначать множество всех простых делителей конечных порядков элементов всевозможных $\mathscr{L}$-групп. Если ни одна из $\mathscr{L}$-групп не имеет кручения, то это множество естественным образом оказывается пустым.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, A — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая $\pi(\mathscr{K})$-ограниченная нильпотентная группа, B — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа, подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A, подгруппа K — ретракт группы B. Если выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:*

1) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из конечных групп,*

2) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и множество $\pi(\mathscr{K})$ конечно,*

3) *класс* $\mathscr{K}$ *состоит только из периодических групп и подгруппа* H *конечно порождена,*

4) *группа* A *конечно порождена,*
то группа G $\mathscr{K}$*-аппроксимируема.*

Следующие два утверждения известны, однако теорема 2 позволяет дать более короткие и простые их доказательства.

Следствие 3 [13, теорема 2]. *Пусть* $\mathscr{K}$ *— корневой класс групп,* H *— нормальная подгруппа группы* A*,* K *— ретракт группы* B*. Если группа* B $\mathscr{K}$*-аппроксимируема и* $A/H \in \mathscr{K}$*, то группа* G *также* $\mathscr{K}$*-аппроксимируема.*

Следствие 4 [6, теорема 1]. *Пусть* $\mathscr{K}$ *— корневой класс групп,* A *и* B *—* $\mathscr{K}$*-аппроксимируемые группы, подгруппа* H *— ретракт группы* A*, подгруппа* K *— ретракт группы* B*. Тогда группа* G $\mathscr{K}$*-аппроксимируема.*

Таким образом, теорема 2 обобщает ряд полученных в работах [6] и [13] результатов, а также доказанное Болером и Эвансом утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами [23] и полученное П. А. Бобровским и Е. В. Соколовым [24] аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p-группами.

Доказательства всех следствий будут приведены в разд. 4 данной статьи. Разд. 5 содержит пример применения полученных результатов к исследованию вопроса об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений классом конечных π-групп.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть X — группа, $\mathscr{L}$ — некоторый класс групп. Обозначим через $\mathscr{L}^*(X)$ семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{L}$.

Предложение 1. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей класс групп,* X *— произвольная группа. Тогда пересечение конечного числа подгрупп семейства* $\mathscr{L}^*(X)$ *снова является подгруппой данного семейства.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из теоремы Ремака. В самом деле, если $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathscr{L}^*(X)$, то фактор-группа $X/(Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n)$ вкладывается в прямое произведение фактор-групп $X/Y_1, X/Y_2, \dots, X/Y_n$ и в силу условий, наложенных на класс $\mathscr{L}$, принадлежит данному классу. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть класс групп* $\mathscr{L}$ *замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть* X *— расщепляемое расширение группы* Z *при помощи группы* Y*. Пусть также* M *— произвольная подгруппа семейства* $\mathscr{L}^*(X)$*,* $U = M \cap Z$*,* $V = M \cap Y$*,* W *— подгруппа из* $\mathscr{L}^*(Y)$ *такая, что* $W \subseteq V$*, и пусть* $L = WU$*. Тогда* $L \in \mathscr{L}^*(X)$ *и* X/L *— расщепляемое расширение* ZL/L *при помощи* YL/L*.*

Доказательство. Покажем, что подгруппа L нормальна в группе X. Действительно,

$$L^X = (WU)^X = W^X U = W^{YZ} U = W^Z U.$$

Подгруппа Z нормальна в группе X, стало быть, $[W, Z] \subseteq Z$. Так как M — нормальная подгруппа группы X и $W \leqslant M$, имеем $[W, Z] \subseteq M$. Поэтому $[W, Z] \subseteq U$ и, следовательно, $W^Z \subseteq WU$. Тогда $L^X \subseteq WU = L$. Значит, L — нормальная подгруппа группы X.

Покажем, что фактор-группа X/L принадлежит классу $\mathscr{L}$. Поскольку L нормальна в группе X, то L нормальна и в M. Рассмотрим фактор-группу M/L:

$$\begin{aligned} M/L = M/LU = M/L(M \cap Z) \cong MZ/LZ = MZ/WUZ \\ = MZ/WZ \leqslant X/WZ = YZ/WZ \cong Y/W(Y \cap Z). \end{aligned}$$

Так как X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, то $Y \cap Z = 1$. Стало быть, $Y/W(Y \cap Z) = Y/W$. Воспользовавшись замкнутостью класса $\mathscr{L}$ относительно взятия подгрупп и тем, что $W \in \mathscr{L}^*(Y)$, получаем, что $M/L \in \mathscr{L}$. Заметим, что $(X/L)/(M/L) \cong X/M$. При этом $M/L \in \mathscr{L}$, $X/M \in \mathscr{L}$ и класс $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия расширений. Значит, $X/L \in \mathscr{L}$.

Покажем, что X/L — расщепляемое расширение ZL/L при помощи YL/L. Очевидно, что подгруппа ZL/L нормальна в группе X/L. Поскольку $X = YZ$, то $X/L \subseteq YL/L \cdot ZL/L$. Обратное включение очевидно. Тем самым $X/L = YL/L \cdot ZL/L$.

Так как $L = WU$, то $YL = YU$ и $ZL = WZ$. Отсюда и из условия $Y \cap Z = 1$ легко следует, что $YL \cap ZL \subseteq WU = L$. Поэтому $YL/L \cap ZL/L = 1$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть класс групп $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y. Если группа X $\mathscr{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий подгруппе Y. Тогда он представим в виде $x = yz$, где $z \in Z \setminus \{1\}$ и $y \in Y$. В силу $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X существует подгруппа $M \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $z \notin M$. Положим $U = M \cap Z$, $V = M \cap Y$ и $L = VU$. Тогда по предложению 2 $L \in \mathscr{L}^*(X)$.

Предположим, что $x \in YL$. Заметим, что $YL = YVU = YU$. Поэтому существуют элементы $y' \in Y$ и $u \in U$ такие, что $x = y'u$. Следовательно, $yz = y'u$. Отсюда и из того, что $Y \cap Z = 1$, получаем, что $z = u \in U$. Тогда $z \in M$, что противоречит выбору подгруппы M. Следовательно, $x \notin YL$.

Таким образом, если $x \notin Y$, то найдется подгруппа $L \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YL$. Следовательно, подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть класс групп $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, и пусть X — некоторая группа, Y — $\mathscr{L}$-отделимая подгруппа группы X.*

1. *Если группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y, то все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X.*

2. *Если все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X и имеют в подгруппе Y конечные индексы, то группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Сначала проверим утверждение 1. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(Y)$, x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий M. Если $x \notin Y$, то в силу $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X в семействе $\mathscr{L}^*(X)$ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$ и, следовательно, $x \notin MN$.

Пусть теперь $x \in Y$. Так как группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y, существует подгруппа $N \in \mathscr{L}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y \leqslant M$. Отсюда и из того, что $M \subseteq Y$, получаем, что $MN \cap Y \subseteq M$. Обратное включение очевидно. Значит, $MN \cap Y = M$.

Следовательно, $x \notin MN$. Поэтому подгруппа M, а значит, и все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X.

Докажем утверждение 2. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(Y)$, и пусть $1 = y_1, \ldots, y_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M. Так как M по условию имеет конечный индекс в подгруппе Y, множество $\{y_1, \ldots, y_n\}$ конечно. Поэтому, пользуясь $\mathscr{L}$-отделимостью подгруппы M в группе X и предложением 1, можем найти подгруппу $N \in \mathscr{L}^*(X)$ такую, что $y_2, \ldots, y_n$ не содержатся в MN.

Предположим, что $N \cap Y \not\subseteq M$. Тогда в подгруппе $N \cap Y$ найдется элемент g, не принадлежащий M. Следовательно, его можно записать в виде $g = xy_i$ для подходящих $x \in M$ и $i \in \{2, \ldots, n\}$. Тогда $y_i = x^{-1}g \in MN$, что противоречит выбору подгруппы N. Стало быть, $N \cap Y \leqslant M$. Это означает $\mathscr{L}$-квазирегулярность группы X по подгруппе Y. Предложение доказано.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Как обычно, через π' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X *π'-изолирована* в X, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q — элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y. Следующее предложение дает весьма общее необходимое условие $\mathscr{L}$-отделимости подгрупп.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{L}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X, то она $\pi(\mathscr{L})'$-изолирована в X.*

Доказательство. Пусть q — $\pi(\mathscr{L})'$-число и x — элемент группы X такой, что $x^q \in Y$. Пусть также N — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(X)$. Тогда X/N — периодическая $\pi(\mathscr{L})$-группа. Обозначим через s порядок ее элемента xN. Отсюда $x^s \in N$, а потому $x^s \in YN$. С другой стороны, $x^q \in Y$, поэтому $x^q \in YN$. Таким образом, $x^s \in YN$ и $x^q \in YN$, причем q и s взаимно просты. Следовательно, $x \in YN$. Так как подгруппа $N \in \mathscr{L}^*(X)$ была выбрана произвольным образом, то

$$x \in \bigcap_{N \in \mathscr{L}^*(X)} YN.$$

Отсюда и из $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X вытекает, что $x \in Y$. Предложение доказано.

Если класс $\mathscr{L}$ корневой, а группа X $\pi(\mathscr{L})$-ограниченная нильпотентная, то необходимое условие $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы, доставляемое предложением 5, оказывается и достаточным, как показывает приводимое далее предложение 8. Его доказательство опирается на следующие два известных утверждения.

Предложение 6 [22, теорема 3]. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Произвольная π'-изолированная подгруппа π-ограниченной нильпотентной группы отделима в этой группе классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп.*

Предложение 7 [15, предложение 2]. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп. Если множество $\pi(\mathscr{K})$ непусто, то класс всех конечных разрешимых $\pi(\mathscr{K})$-групп содержится в $\mathscr{K}$.*

Предложение 8. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathscr{K})'$-изолированная подгруппа $\pi(\mathscr{K})$-ограниченной нильпотентной группы $\mathscr{K}$-отделима.*

Доказательство. Пусть X — произвольная $\pi(\mathscr{K})$-ограниченная нильпотентная группа и Y — некоторая ее $\pi(\mathscr{K})'$-изолированная подгруппа. Класс $\mathscr{K}$ корневой, а потому содержит хотя бы одну неединичную группу, стало быть, множество $\pi(\mathscr{K})$ непусто. Отсюда и из предложения 6 следует, что подгруппа Y отделима в группе X конечными $\pi(\mathscr{K})$-группами. Так как гомоморфный образ нильпотентной группы снова является нильпотентной группой, подгруппа Y оказывается отделимой в X конечными нильпотентными $\pi(\mathscr{K})$-группами, а значит, и конечными разрешимыми $\pi(\mathscr{K})$-группами. В силу предложения 7 класс конечных разрешимых $\pi(\mathscr{K})$-групп содержится в $\mathscr{K}$. Следовательно, подгруппа Y $\mathscr{K}$-отделима в группе X. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, X — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая $\pi(\mathscr{K})$-ограниченная нильпотентная группа, Y — $\mathscr{K}$-отделимая подгруппа группы X. Если выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

1) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из конечных групп,*
2) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и множество $\pi(\mathscr{K})$ конечно,*
3) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и подгруппа Y конечно порождена,*

то группа X $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Доказательство. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{K}^*(Y)$. Так как подгруппа Y $\mathscr{K}$-отделима в группе X, ввиду предложения 5 Y $\pi(\mathscr{K})'$-изолирована в X. Отсюда и из того, что $V \in \mathscr{K}^*(Y)$, вытекает $\pi(\mathscr{K})'$-изолированность подгруппы V в группе X. Тогда согласно предложению 8 подгруппа V $\mathscr{K}$-отделима в этой группе. Покажем, что V имеет конечный индекс в группе Y. В силу произвольности выбора V и предложения 4 отсюда будет следовать, что группа X $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Класс $\pi(\mathscr{K})$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов [22, предложение 2]. Поэтому фактор-группа Y/V является $\pi(\mathscr{K})$-ограниченной нильпотентной $\mathscr{K}$-группой. Если справедливо условие 1 или 3, то отсюда сразу же следует, что группа Y/V конечна.

Пусть выполняется условие 2. Заметим, что в силу упомянутых выше свойств класса $\pi(\mathscr{K})$-ограниченных нильпотентных групп любой фактор Z произвольного центрального ряда группы Y/V оказывается периодической $\pi(\mathscr{K})$-ограниченной абелевой $\pi(\mathscr{K})$-группой. Это означает, что все примарные компоненты группы Z соответствуют числам из множества $\pi(\mathscr{K})$ и потому их количество конечно. При этом каждая такая компонента согласно определению свойства $\pi(\mathscr{K})$-ограниченности также конечна. Следовательно, конечными оказываются как группа Z, так и вся фактор-группа Y/V. Предложение доказано.

Предложение 10 [20, предложение 1.2.5]. *Пусть класс $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathscr{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если суще-*

ствует подгруппа $Z \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X.

Предложение 11. *Пусть $\mathscr{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathscr{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathscr{L}$-группой.*

Доказательство. Пусть $1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \cdots \leqslant Y_n = Y$ — субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Доказательство будем вести индукцией по длине этого ряда.

Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$ и для всех подгрупп, обладающих рядом указанного выше вида длины, меньшей n, искомое утверждение имеет место.

Так как группа X, а значит, и ее подгруппа Y_1, аппроксимируется группами без кручения, она сама не имеет кручения. Тем самым Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y. Также из $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X следует, что существует нормальная подгруппа M этой группы такая, что $X/M \in \mathscr{L}$ и $y \notin M$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/M вытекает, что элемент y имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы M, поэтому $M \cap Y_1 = 1$.

Поскольку

$$M \cap Y_{i+1}/M \cap Y_i \cong (M \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i,$$

группа $M \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, причем длина этого ряда строго меньше n. Стало быть, в силу индуктивного предположения существует подгруппа $L \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $L \cap (M \cap Y) = 1$.

Обозначим $L \cap M$ через Z. Тогда $Z \cap Y = 1$ и ввиду предложения 1 подгруппа Z содержится в семействе $\mathscr{L}^*(X)$. Следовательно, Z — искомая подгруппа. Предложение доказано.

В заключение данного раздела приведем ряд доказанных в [4] утверждений, которые потребуются в дальнейшем.

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Произвольное расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathscr{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathscr{K}$* [4, лемма].

2. *Обобщенное свободное произведение P двух $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, в свою очередь, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$, если существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathscr{K}$, инъективный на объединенной подгруппе* [4, теорема 3].

3. *Пусть P — обобщенное свободное произведение двух изоморфных $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, и пусть изоморфизм, склеивающий объединенные подгруппы, совпадает с ограничением на них изоморфизма свободных множителей. Группа P аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда объединенные подгруппы $\mathscr{K}$-отделимы в сомножителях* [4, теорема 4].

3. Доказательства теорем

Прежде всего, напомним ряд понятий и конструкций, впервые появившихся в работе [25].

Пусть A и B — некоторые группы, $H \leqslant A$, $K \leqslant B$, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм подгрупп. Нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-*совместимыми*, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$.

В этом случае отображение $\varphi_{R,S} : HR/R \to KS/S$, переводящее элемент hR, $h \in H$, в элемент $(h\varphi)S$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$, и сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S} : G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $\varepsilon : A \to A/R$ и $\delta : B \to B/S$.

Доказательство теоремы 1. Предположим теперь, что A, B, H, K, φ и класс $\mathscr{K}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Так как подгруппа K является ретрактом группы B, существует нормальная подгруппа N группы B такая, что B — расщепляемое расширение группы N при помощи группы K. Поскольку $N \cap K = 1$, подгруппы 1 и N (H, K, φ)-совместимы. Поэтому можно рассмотреть группу

$$G_{1,N} = (A * B/N; H = KN/N, \varphi_{1,N}).$$

В силу выбора подгруппы N справедливо равенство $B/N = KN/N$. Следовательно, $G_{1,N} = A$. Так как гомоморфизм $\rho_{1,N} : G \to G_{1,N}$ продолжает тождественное отображение группы A, последняя является ретрактом группы G. При этом $A \in \mathscr{K}$ и, значит, $G_{1,N}$ оказывается $\mathscr{K}$-группой. Таким образом, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 2 предложения 12. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Далее до конца раздела будем считать, что A, B, H, K, φ и $\mathscr{K}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Пусть M и N — произвольные подгруппы семейств $\mathscr{K}^*(A)$ и $\mathscr{K}^*(B)$ соответственно. Построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ таких, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Так как $M \in \mathscr{K}^*(A)$, то $M \cap H \in \mathscr{K}^*(H)$. Аналогично $N \in \mathscr{K}^*(B)$, значит, $N \cap K \in \mathscr{K}^*(K)$. Тогда прообраз подгруппы $N \cap K$ относительно изоморфизма φ содержится в $\mathscr{K}^*(H)$. Следовательно,

$$T = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1} \in \mathscr{K}^*(H)$$

в силу предложения 1. Поскольку группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H, существует подгруппа $P \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $P \cap H \leqslant T$.

Так как K — ретракт группы B, найдется такая нормальная подгруппа Z группы B, что B является расщепляемым расширением группы Z при помощи группы K. Обозначим через S подгруппу $(P \cap H)\varphi(N \cap Z)$. Тогда согласно предложению 2 $S \in \mathscr{K}^*(B)$ и B/S — расщепляемое расширение ZS/S при помощи KS/S.

Пусть $R = P \cap M$. Тогда снова в силу предложения 1 $R \in \mathscr{K}^*(A)$. Покажем, что подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Из построения группы P вытекает справедливость включения

$$P \cap H \subseteq M \cap H.$$

Тогда

$$(H \cap R)\varphi = (H \cap P \cap M)\varphi = ((P \cap H) \cap (M \cap H))\varphi = (P \cap H)\varphi.$$

Так как $K \cap Z = 1$ и $(P \cap H)\varphi \leqslant K$, то

$$K \cap S = K \cap (P \cap H)\varphi(N \cap Z) = (P \cap H)\varphi.$$

Таким образом, подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Поскольку A/R и B/S — $\mathscr{K}$-группы и KS/S — ретракт группы B/S, группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 1. Следовательно, подгруппы R и S искомые.

Перейдем непосредственно к доказательству $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы G. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Возможны два случая: $g \in H$ и $g \notin H$.

Рассмотрим первый случай: $g \in H$. Тогда g — неединичный элемент $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы A. Значит, найдется подгруппа $M \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $g \notin M$. В силу доказанного выше существуют (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ такие, что $R \leqslant M$, $S \leqslant B$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Под действием гомоморфизма $\rho_{R,S}$ элемент g переходит в отличный от 1 элемент gR фактор-группы A/R. Стало быть, существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathscr{K}$-группу такой, что $(gR)\sigma \neq 1$.

Рассмотрим второй случай: $g \notin H$. Пусть $g = g_1 g_2 \ldots g_l$ — несократимая запись элемента g длины $l \geqslant 1$. Так как $g \notin H$, то $g_k \notin H$ для любого $k \in \{1, \ldots, l\}$, причем если $l > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Пусть $g_k \in A$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$. Тогда из $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и того, что $g_k \notin H$, следует существование подгруппы $E_k \in \mathscr{K}^*(A)$ такой, что $g_k \notin HE_k$.

Так как K — ретракт $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы B, в силу предложения 3 подгруппа K $\mathscr{K}$-отделима в B. Поэтому если $g_k \in B$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$, то аналогично находим подгруппу $F_k \in \mathscr{K}^*(B)$ такую, что $g_k \notin KF_k$.

Пусть

$$\Omega_A = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in A\}, \quad \Omega_B = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in B\}.$$

Обозначим

$$M = \bigcap_{k \in \Omega_A} E_k, \quad N = \bigcap_{k \in \Omega_B} F_k.$$

Ввиду предложения 1 $M \in \mathscr{K}^*(A)$, $N \in \mathscr{K}^*(B)$ и $g_k \notin HM$, если $g_k \in A$; $g_k \notin KN$, если $g_k \in B$.

Как и выше, построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ такую, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Подействуем гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g. Тогда

$$g\rho_{R,S} = (g_1 g_2 \ldots g_l)\rho_{R,S} = g_1\rho_{R,S} g_2\rho_{R,S} \ldots g_l\rho_{R,S} \neq 1.$$

Действительно, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$, значит, $g_kR \notin HR/R$. Если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$, тем самым $g_kS \notin KS/S$. Таким образом, если $l = 1$, то $g\rho_{R,S}$ не входит в объединенную подгруппу, стало быть, отличен от 1. Если $l > 1$, то запись элемента $g\rho_{R,S}$ несократима и имеет длину, большую 1, значит, $g\rho_{R,S} \neq 1$.

Построенная группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathscr{K}$-группу такой, что $(g\rho_{R,S})\sigma \neq 1$. Следовательно, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

4. Доказательства следствий

Доказательство следствия 1. Легко видеть, что класс всех $\mathscr{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 11 существует нормальная подгруппа Z группы A такая, что фактор-группа A/Z является $\mathscr{K}$-группой без кручения и $Z \cap H = 1$. Тогда группа A, очевидно, $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и ввиду предложения 10 подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. Следовательно, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.

Доказательство следствия 2. Если выполняется хотя бы одно из условий 1–3, то согласно предложению 9 группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.

Пусть выполняется условие 4. Если при этом класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп, то справедливо также условие 3 и $\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы G доказана. Поэтому далее будем считать, что класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда бесконечная циклическая группа также принадлежит классу $\mathscr{K}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп. Хорошо известно (см., например, [26, с. 13]), что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения все члены верхнего центрального ряда изолированы. Отсюда с помощью очевидной индукции легко следует, что каждая такая группа обладает конечным субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами. Так как класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно расширений, это означает, что все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения содержатся в $\mathscr{K}$.

Поскольку группа A конечно порожденная нильпотентная, ее периодическая часть $\tau(A)$ конечна. Ввиду $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы A и предложения 1 отсюда вытекает существование такой подгруппы $N \in \mathscr{K}^*(A)$, что $N \cap \tau(A) = 1$. Тогда N является конечно порожденной нильпотентной группой без кручения и в силу доказанного выше принадлежит классу $\mathscr{K}$. Следовательно, группа A представляет собой расширение $\mathscr{K}$-группы N при помощи $\mathscr{K}$-группы A/N и потому, в свою очередь, содержится в классе $\mathscr{K}$. Теперь $\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы G вытекает из теоремы 1.

Доказательство следствия 3. Из условия $A/H \in \mathscr{K}$ следует, что подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. $\mathscr{K}$-квазирегулярность группы A по подгруппе H вытекает из того, что класс $\mathscr{K}$ корневой.

В самом деле, если M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{K}^*(H)$, то A/H, $H/M \in \mathscr{K}$ и согласно условию 3 из определения корневого класса существует подгруппа $N \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $N \leqslant M$. Тогда $N \cap H = N \leqslant M$.

Из $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы B следует $\mathscr{K}$-аппроксимируемость ее подгруппы K, а значит, и изоморфной ей группы H. Тогда группа A представляет собой расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы H при помощи $\mathscr{K}$-группы A/H. Стало быть, группа A $\mathscr{K}$-аппроксимируема согласно утверждению 1 предложения 12.

Тем самым группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2. Следствие доказано.

Доказательство следствия 4. По предложению 3 подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. Покажем, что группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Так как H — ретракт группы A, найдется такая нормальная подгруппа Z группы A, что A — расщепляемое расширение Z при помощи H, т. е. $A = HZ$ и $Z \cap H = 1$. Пусть N — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{K}^*(H)$. Ввиду предложения 2 подгруппа NZ принадлежит семейству $\mathscr{K}^*(A)$. Из соотношения $Z \cap H = 1$ вытекает, что $NZ \cap H \leqslant N$. Следовательно, группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Значит, обобщенное свободное произведение G $\mathscr{K}$-аппроксимируемо в силу теоремы 2. Следствие доказано.

5. Приложение к обобщенным свободным произведениям групп порядка pq

Баумслаг [25] установил, что любое обобщенное свободное произведение двух конечных групп финитно аппроксимируемо. Для конечных p-групп аналогичное утверждение неверно, критерий аппроксимируемости классом $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп свободного произведения двух $\mathscr{F}_p$-групп с объединенной подгруппой был найден Хигманом [27]. Вопрос об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп для некоторого непустого множества простых чисел π оказывается еще более сложным. В предположении, что объединенные подгруппы нормальны в свободных множителях, соответствующий критерий доказан в [17], однако в общем случае проблема остается открытой. В частности, обобщить в данном направлении критерий Хигмана вряд ли возможно, так как в формулировке и доказательстве последнего существенным образом используется нильпотентность конечных p-групп.

Вместе с тем из доказательства результата Баумслага следует, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп аппроксимируется классом $\mathscr{F}_\pi$ для любого множества π, которое содержит все простые числа, не превосходящие некоторого числа, зависящего от порядков свободных множителей. Поэтому можно поставить также следующий вопрос: для какого минимального множества простых чисел π заданное обобщенное свободное произведение является $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группой? Понятно, что условия, необходимые и достаточные для того, чтобы указанное множество совпадало с множеством всех простых делителей порядков свободных множителей, и составляют искомый критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathscr{F}_\pi$-групп.

По-видимому, поиск ответов на поставленные вопросы имеет смысл начинать с самых простых примеров. В связи с этим определенный интерес может представлять

Предложение 13. *Пусть p, q, r — (не обязательно различные) простые числа. Тогда произвольное обобщенное свободное произведение двух групп порядков pq и qr аппроксимируется конечными $\{p, q, r\}$-группами.*

Доказательство. Хорошо известно и нетрудно показать (см., например, [28, § 11.2, 17.1]), что группа порядка uv, где u и v — простые числа, либо абелева, либо представляет собой неабелево расщепляемое расширение циклической группы порядка u при помощи циклической группы порядка v (последнее возможно, лишь если $u \equiv 1 \pmod{v}$). Отсюда следует, что объединенная подгруппа либо нормальна в обоих свободных множителях, либо является ретрактом хотя бы одного из них. Во втором случае утверждение предложения вытекает из теоремы 1, в первом — из следствия теоремы 3 в [17]. Предложение доказано.

6. Заключительные замечания

Ниже приводятся два примера, показывающие, что условия, накладываемые на подгруппу H в теореме 2, в общем случае не являются необходимыми для аппроксимируемости группы G. Первый из них свидетельствует также, что аналогичным образом дело обстоит и с условием $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A из следствия 2.

Пример 1. Пусть p и q — различные простые числа, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, A — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом a, B — свободная группа с базисом $\{b; c\}$, H и K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами a^q и b соответственно, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, переводящий элемент a^q в элемент b, $G = (A * B; H = K, \varphi)$.

Баумслаг [29] доказал, что построенная таким образом группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Очевидно также, что подгруппа K является ретрактом группы B.

В силу предложения 5 $\mathscr{F}_p$-отделимая подгруппа произвольной группы $\{p\}'$-изолирована в этой группе. Заметим, что q является $\{p\}'$-числом и $a^q \in H$, при этом $a \notin H$. Значит, подгруппа H не является $\{p\}'$-изолированной, а потому и $\mathscr{F}_p$-отделимой в группе A.

Покажем, что группа A $\mathscr{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{F}_p^*(H)$. Она порождается элементом a^{qp^n} для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Положим $N = A^{p^n}$. Тогда $N \in \mathscr{F}_p^*(A)$, и так как числа p^n и q взаимно просты, $N \cap H = M$. Значит, группа A $\mathscr{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пример 2. Пусть A — свободная группа с базисом $\{a_i, b_i, c \mid i \in \mathbb{N}\}$, N — нормальное замыкание в группе A множества элементов $\{a_i^2, b_i^2, c^2, [a_i, b_i]c^{-1}, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j], [a_i, c], [b_i, c] \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$. Тогда фактор-группа A/N имеет представление

$$\big\langle a_i, b_i, c;\ a_i^2 = b_i^2 = c^2 = 1,\ [a_i, b_i] = c,$$
$$[a_i, b_j] = [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, c] = [b_i, c] = 1,\ i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j\big\rangle.$$

Известно (см. [20, пример 1.4.3]), что фактор-группа A/N не является финитно аппроксимируемой. Поэтому подгруппа N группы A не обладает свойством финитной отделимости.

Пусть далее H — нормальное замыкание в группе A множества элементов

$$\big\{a_i^2, b_i^2, c, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j] \mid i, j \in \mathbb{N}\big\},$$

K — некоторая изоморфная копия группы H, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, B — прямое произведение группы K и циклической группы порядка 2 с порождающим b, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$.

Тогда свободные множители A и B обобщенного свободного произведения G финитно аппроксимируемы, K — ретракт группы B.

Фактор-группа A/H представляет собой, очевидно, прямое произведение циклических групп порядка 2 и, следовательно, финитно аппроксимируема. Поэтому подгруппа H финитно отделима в группе A.

Легко видеть, что $N \leqslant H$ и образ подгруппы H относительно естественного гомоморфизма группы A на фактор-группу A/N совпадает с конечной циклической подгруппой, порожденной элементом c. Следовательно, $N \in \mathscr{F}^*(H)$, где $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп.

Как отмечено выше, подгруппа N не отделима в классе $\mathscr{F}$. Поэтому в силу предложения 4 группа A не $\mathscr{F}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Покажем, что группа G финитно аппроксимируема.

Обозначим через M нормальное замыкание в группе G подгруппы A. Легко видеть, что подгруппа M порождается подгруппами A и $b^{-1}Ab$. Так как элемент b принадлежит централизатору в группе B подгруппы K, из теоремы Неймана [30, с. 512] следует, что группа M представляет собой свободное произведение подгрупп A и $b^{-1}Ab$ с объединенными подгруппами H и K. Поскольку эти подгруппы объединяются в соответствии с изоморфизмом, являющимся ограничением на H очевидного изоморфизма группы A на группу $b^{-1}Ab$, из утверждения 3 предложения 12 следует, что группа M финитно аппроксимируема.

Таким образом, группа G представляет собой расширение финитно аппроксимируемой группы M при помощи фактор-группы G/M, изоморфной конечной группе B/K. Следовательно, группа G финитно аппроксимируема в силу утверждения 1 того же предложения 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

2. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860. DOI: 10.1080/00927872.2013.851207.

3. *Гольцов Д. В., Яцкин Д. В.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2011. № 2. С. 115–128.

4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.

5. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2012. № 2. С. 86–91.

6. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Т. 6. С. 29–42.

7. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.

8. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 34–41.

9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.

10. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 140–147.

11. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

12. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

13. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Моделирование и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.

14. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra Number Theory Appl. 2010. V. 18, N 2. P. 125–143.

15. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых Иван. гос. ун-та. 2012. С. 3–4.

16. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения: Журн. Иван. мат. о-ва. 2011. Т. 8. С. 101–104.

17. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

18. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2013. № 2. С. 94–102.

19. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

20. *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2012.

21. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discrete Math. 2007. N 4. P. 23–43.

22. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

23. *Boler J., Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37, N 1. P. 50–52.

24. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 4. P. 577–582.

25. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.

26. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

27. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.

28. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 5-е изд. М.: Наука, 1995.

29. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 491–506.

30. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246. P. 503–554.

Статья поступила 12 января 2015 г.

Соколов Евгений Викторович, Туманова Елена Александровна
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru