Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.54

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПОЛНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ГРУППАМИ

А. А. Шлепкин

Аннотация. Доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная полными линейными группами размерности два над конечными полями, изоморфна полной линейной группе размерности два над подходящим локально конечным полем.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.116

Ключевые слова: насыщенность, группы, насыщенные заданным множеством групп.

1. Введение

По определению группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X [1].

В [2] доказано, что произвольная периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $L_2(p^n)$, где p и n не фиксируются, изоморфна $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле. Там же этот результат удалось обобщить на случай, когда группа насыщена группами из множества групп $SL_2(p^n)$. Естественно было рассмотреть случай, когда периодическая группа насыщена группами из множества групп $GL_2(p^n)$. В [3] обсуждалась

Гипотеза. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множеством групп $GL_2(p^n)$, где p, n не фиксируются. Тогда $G \simeq GL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.*

Там же было показано, что данная гипотеза в классе всех периодических групп неверна. Таким образом, возникает задача выделения в периодических группах классов групп, в которых эта гипотеза имеет место.

В [4] гипотеза доказана в классе локально конечных групп. В [3] она доказана в классе периодических групп Шункова при дополнительном ограничении: p фиксируется. В настоящей работе от этого ограничения удается избавиться.

Теорема. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Im$, состоящего из всех групп $GL_2(p^n)$ (здесь p и n не фиксируются), изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы G.

2. Известные факты и определения

Определение 1. Группа G называется *группой Шункова* (*сопряженно бипримитивно конечной группой*), если для любой конечной подгруппы H из G

в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [5].

Определение 2. Пусть группа G насыщена группами из множества групп X и K — подгруппа из G. Через $X(K)$ обозначим множество всех подгрупп из G, содержащих K и изоморфных группам из X. В частности, если 1 — единичная подгруппа G, то $X(1)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из X [6].

Определение 3. *Сплетенной группой* называется сплетение циклической группы и группы порядка два.

Предложение 1. *Пусть G — группа Шункова, a, b — элементы из G такие, что $a^2 = b^p = e$, где p — простое число. Тогда $\langle a, b\rangle$ конечна.*

Доказательство. По определению 1 группа $\langle b, b^a\rangle$ конечна. Так как $a \in N_G(\langle b, b^a\rangle)$, то $\langle b, b^a\rangle\langle a\rangle$ — конечная группа. Поскольку $\langle a, b\rangle \subseteq \langle b, b^a\rangle\langle a\rangle$, то $\langle a, b\rangle$ также конечная группа. Предложение доказано.

Предложение 2 [7, теорема 23.1.1]. *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.*

Предложение 3 [8, с. 206]. *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Предложение 4 [9]. *Периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна.*

Предложение 5 [8, с. 206]. *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Предложение 6 [10]. *Бесконечная 2-группа, насыщенная сплетенными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2.*

Предложение 7 [11]. *Пусть I означает множество индексов, K_α — конечное поле для любого $\alpha \in I$ и $\mathfrak{R} = \{PGL_2(K_\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $PGL_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Предложение 8 [5]. *p-Группа Шункова G, обладающая конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, черниковская.*

Предложение 9. *Пусть G — локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)\}$, где p — нефиксированное простое число, n — нефиксированное натуральное число. Тогда $G \simeq GL_2(P)$, где P — локально конечное поле* [4].

Предложение 10. *Пусть $L = GL_2(2^n)$. Тогда*

1) $L = L_2(2^n) \times Z$, где $Z = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$ — центр группы L, $\alpha \in GF(q)$;

2) $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in GF(2^n) \right\}$ — силовская 2-подгруппа группы L, $N_L(R)$ $= R \leftthreetimes D$, где $D = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\rangle$ — подгруппа диагональных матриц группы L,

$\beta \in GF(2^n)$, $D = Z \times T$, $T = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ и $|Z| = |T| = 2^n - 1$;

3) $PGL_2(p^n) = L/Z = L_2(2^n)$ [12, 13].

Предложение 11. *Пусть $L = GL_2(p^n)$ и p нечетно. Тогда*

1. $|L| = (p^n - 1)^2 p^n (p^n + 1)$.

2. $R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in GF(p^n) \right\}$ *— силовская p-подгруппа группы L, $N_L(R)$ $= R \leftthreetimes D$, где $D = \left\langle \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\rangle$ — подгруппа диагональных матриц группы L и β, γ — ненулевые элементы поля $GF(p^n)$, $D = Z \times T$, $Z = \left\langle \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \right\rangle$, — центр группы L, $T = \left\langle \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $C_L(D) = D$ и $|Z| = |T| = p^n - 1$.*

3. *Любые две различные силовские p-подгруппы группы L пересекаются тривиально.*

4. *Пусть $M = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = k > 2$, — подгруппа L. Тогда k делит $p^n - 1$ и $M^g \subseteq D$ и $N_L(M^g) = N_L(D) = D \leftthreetimes \langle \omega \rangle$ для некоторого $g \in L$, где $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

5. *Пусть a — элемент нечетного порядка из L и $C_L(\langle a \rangle)$ содержит две различные циклические 2-подгруппы одинакового порядка. Тогда $|a|$ делит $p^n - 1$.*

6. *В L нет подгрупп, изоморфных A_4.*

7. *$L = SL_2(p^n) \leftthreetimes T$, где $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $0 \neq \alpha \in GF(p^k)$.*

8. *$L = (SL_2(p^n) \cdot Z) \cdot \langle \upsilon \rangle$, где $\upsilon = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \upsilon^2 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in Z$ и h — элемент поля $GF(p^n)$, из которого не извлекается корень квадратный.*

9. *Если $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, 2^s — это 2-часть числа $q - 1, \xi$ — примитивный корень степени 2^s из 1 в $GF(q)$, то ее силовская 2-подгруппа S порядка 2^{s+1} является сплетением групп Z_{2^s} и Z_2, $S = \left\langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.*

10. *Если $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$, 2^s — это 2-часть числа $q + 1$, ξ — примитивный корень степени 2^{s+1} из 1 в $GF(q^2)$, то ее силовская 2-подгруппа S является полудиэдральной группой порядка 2^{s+2} и $S = \left\langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi + \xi^q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$* [12, 14].

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое множество циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп $L_2(2^m)$. Положим $\mathfrak{X}$=$\{X \times Y\}$, где X принадлежит $\mathfrak{M}$, а Y принадлежит $\mathfrak{N}$.

Предложение 12. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{X}$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики два, а V — локально циклическая группа без инволюций* [15].

Предложение 13. *Пусть T — бесконечная силовская 2-подгруппа периодической группы G, $\mathfrak{M}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, изоморфных T, $\mathfrak{N}_T$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не изоморфных T. Тогда существуют такие $X \in \mathfrak{M}_T$ и $Y \in \mathfrak{N}_T$, что $|X \cap Y| \geq t$, где t — наперед заданное натуральное число* [16, лемма 6].

3. Доказательство теоремы

Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 1. *Пусть периодическая группа R насыщена группами из множества $\Im$. Тогда силовская 2-подгруппа S группы R одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ *— полудиэдральная группа и* $|S| = 2^{n+1}$;

2) $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e, a^w = b, ab = ba\rangle$ *— сплетенная 2-группа и* $|S| = 2^{n+2}$;

3) S *— конечная элементарная абелева 2-группа;*

4) S *— бесконечная элементарная абелева 2-группа;*

5) $S = \widetilde{S}K$, *где* $\widetilde{S}$ *— бесконечная локально циклическая 2-группа,* K *— конечная 2-группа, изоморфная некоторой подгруппе группы диэдра порядка 8;*

6) $S = ((A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle)$, *где* A *— бесконечная локально циклическая 2-группа,* $w^2 = e$ *и* $A^w = B$.

Доказательство. 1. Если в R некоторая S конечна, то она одна из видов 1–3 утверждения леммы. Действительно, это так ввиду предложений 5, 10, 11 (пп. 9, 10). П. 1 доказан.

В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа.

2. Если полная часть $\widetilde{S}$ группы S является единичной группой, то S вида 4 из условия леммы. В этом случае S содержит подгруппу $D = \langle x\rangle \times \langle y\rangle \times \langle z\rangle$, где $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. В силу предложения 3 D вложена в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Если I содержит элемент порядка 4, то $\langle D, b\rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы D_1, где D_1 — одна из следующих групп (предложения 10, 11): D_1 — конечная группа полудиэдра, D_1 — конечная сплетенная 2-группа, D_1 — элементарная абелева 2-группа. Но в первых двух случаях D_1 не может содержать подгруппу D, а в последнем не может содержать элемент b.

Итак, I — элементарная абелева 2-группа, и можно считать I максимальной в указанном смысле ($D \subset I$). Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $v \in S \setminus I \neq \varnothing$. Покажем, что v можно выбрать так, что $vw = wv$ для некоторой инволюции $w \in I$. Если $|v| = 2$, то группа $\langle v, w\rangle$ конечна для любой инволюции w из I. Пусть d — инволюция из $Z(\langle v, w\rangle)$. Если $d \in I$, то положим $w = d$. Если $d \notin I$, то положим $v = d$. Подгруппа $\langle w\rangle \times \langle v\rangle = K_1$, очевидно, не лежит в I и $K_1 \cap I = \langle w\rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq w$. Ясно, что $tw = wt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle w, v, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$(\langle w\rangle \times \langle t\rangle) \subseteq (\langle w, v, t\rangle \cap I).$$

В силу предложения 3 в $\langle w, v, t\rangle$ существует элемент v_1 такой, что $v_1 \in N_G(\langle w\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$ и $v_1^2 \in I$. Тогда $K_2 = \langle v_1, w, t, t_1\rangle$, где $t_1 \in I \setminus (\langle w\rangle \times \langle t\rangle)$, — конечная 2-группа.

По условию насыщенности $K_2 \leq K_3 \in \Im(1)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle w\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, из структуры $\Im$ вытекает, что K_2 — элементарная абелева 2-группа. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что v_1 перестановочен с любой инволюцией из I. Таким образом, $I \times \langle v_1\rangle$ — элементарная абелева 2-группа, что противоречит максимальности I как элементарной абелевой 2-группы.

Пусть $|v| = 4$. Возьмем $x_1 = v^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. В дальнейшем, дословно повторяя рассуждения для случая $|v| = 2$, получим, что $v \in K_2$ — элементарная абелева 2-группа. Противоречие с тем, что $|v| = 4$. П. 2 доказан.

В дальнейшем будем считать, что S не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех. Пусть $\widetilde{S}$ — максимальная полная абелева подгруппа из S.

3. Если ранг $\widetilde{S}$ не меньше двух, то S — группа вида 6 из условия леммы. В этом случае $\widetilde{S} = A \times B$, где A, B — квазициклические группы. Возьмем в $\widetilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R \subset K \in \Im(1)$. Следовательно, $K \simeq GL_2(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_k — силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По предложению 11 (п. 9) $S_k = ((\langle c \rangle \times \langle d \rangle \leftthreetimes \langle w \rangle)$ — сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R \leq (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$ и $R^w = R$. Возьмем в $\widetilde{R} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\widetilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w \rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w \rangle \subset K_1 \in \Im(1)$ и $K_1 \simeq GL_2\big(p_1^{n_1}\big)$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 11 (п. 4) $\langle R_1, y, w \rangle \subset N_{K_1}(R) = ((\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетенная группа. Здесь $|c_1| = |d_1| = \big(p_1^{n_1} - 1\big)^2$ и $c_1^w = d_1$. Кроме того, $C_{K_1}(R) = (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. В частности, отсюда вытекает, что $\langle y^w, y \rangle \leq (\langle c_1 \rangle \times \langle d_1 \rangle)$. Пусть y_1 — другой элемент из $\widetilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1 \rangle \neq \langle y \rangle$. Покажем, что $y_1 y^w = y^w y_1$. Действительно, $\langle R, y, y^w \rangle$ — конечная группа.

По условию насыщенности $\langle R, y_1, y^w \rangle \leq K_2 \in \Im(1)$, $K_2 \simeq GL_2\big(p_2^{n_2}\big)$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 11 (п. 4) $C_{K_2}(R) = (\langle c_2 \rangle \times \langle d_2 \rangle)$, где $|c_2| = |d_2| = (p^{n_2} - 1)^2$. Так как $\langle R, y_1, y^w \rangle < C_{K_2}(R)$, то $y_1 y^w = y^w y_1$, что и требовалось.

Пусть Y — множество элементов из $\widetilde{S} \setminus R$ таких, что $y^2 \in R$ для любого $y \in Y$. Ясно, что Y — конечное множество. Из сказанного выше получаем, что $\langle Y, R \rangle$ — конечная абелева группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w \rangle$ — конечная группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w \rangle \leq K_3 \in \Im(1)$, $K_3 \simeq GL_2\big(p_3^{n_3}\big)$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 11 (п. 4) $N_{K_3}(R) = ((\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle, (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle) = C_{K_3}(R)$ и $R_1 = \widetilde{S} \cap (\langle c_3 \rangle \times \langle d_3 \rangle)$. По построению $R < R_1 = (\langle v_1 \rangle \times \langle u_1 \rangle)$, где $\langle v \rangle < A, \langle u \rangle < B$ и $v_1^w = u_1$. Действуя по описанному выше алгоритму, строим в S цепочку подгрупп $R \subset R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_i \subset \dots$ со следующими свойствами: $R_i = (\langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle)$ и $v_i^w = u_i$. Так как $\widetilde{S}$ — полная 2-группа ранга 2, очевидно, $\bigcup R_i = \widetilde{S}$ и $w \in N(\widetilde{S})$.

Осталось показать, что $\widetilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $N_G(S)/\widetilde{S} = \overline{N}$. Ясно, что в $\overline{N}$ силовская 2-подгруппа конечна, а значит, все силовские 2-подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (предложение 5), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\widetilde{S} \leftthreetimes (\langle w \rangle) \subseteq S$. Из предложения 11 (п. 4) получаем, что $y \in (\widetilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle)$ для любого $y \in S$. Следовательно, $S \subseteq (\widetilde{S} \leftthreetimes \langle \omega_n \rangle)$ и $\widetilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. П. 3 доказан.

4. Если $D_n \subset S$, где $D_n = \langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle \leftthreetimes \langle w_n \rangle$, $|a_n| = |b_n| > 2, a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = e$, то S вида 6 из условия леммы. Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots, \tag{1}$$

то, очевидно, $\bigcup D_n$ насыщена конечными сплетенными 2-группами, по предложению 6 $\widetilde{S}$ ранга 2 и по п. 3 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек типа (1) в S нет. Тогда $\widetilde{S}$ — квазициклическая группа и, очевидно, $\widetilde{S} \subseteq Z(S)$. Пусть D_n — максимальная сплетенная 2-группа из S. Положим $(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) = R_n$.

Пусть s — элемент из $\widetilde{S} \setminus R_n$ такой, что $s^2 \in R_n$. Тогда $\langle R_n, s, \rangle$ — конечная группа и по условию насыщенности $\langle R_n, s, \rangle \subset K \simeq GL_2(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению 11 (п. 4) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $sx = xs$ для любого $x \in C_K(R_n)$. Выберем $x \in C_K(R_n) \setminus S$ так, что $x^2 \in R_n$. Пусть $s_1 \in \widetilde{S}$ и $s_1^2 = s$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_1, x, R_n\rangle \subseteq K_1$ эквивалентна $GL_2(p_1^n)$, для некоторого нечетного простого p_1. Так как $\langle s_1, x, R_n\rangle \subseteq C_{K_1}(R_n)$, по предложению 11 (п. 4) $s_1x = xs_1$. Далее, используя индукцию, получим, что $\widetilde{S} \subset C_G(x)$ и $\langle \widetilde{S}, x\rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\widetilde{S}R_n\langle x\rangle$ — абелева 2-подгруппа, содержащая подгруппу $R_{n_1} = \langle a_{n_1}\rangle \times \langle b_{n_1}\rangle$ со свойством $R_n \subset R_{n_1}$. Действуя подобным образом, строим бесконечную цепочку вложенных друг в друга подгрупп

$$\widetilde{S}R_n \subset \widetilde{S}R_{n_1} \subset \dots \subset \widetilde{S}R_{n_k} \subset \dots .$$

Положим $\widetilde{S}_1 = \bigcup \widetilde{S}R_{n_k}$. Несложно видеть. что $\widetilde{S}_1$ — полная абелева группа ранга 2 и $\omega_n \in N_G(\widetilde{S}_1)$. Положим $S_1 = \widetilde{S}_1 \leftthreetimes \langle \omega_n\rangle$. Тогда S_1 — группа вида 6 из условия леммы. П. 4 доказан.

5. Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n\rangle \times \langle b_n\rangle) \leftthreetimes \langle w_n\rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$. Тогда S вида 5 из условия леммы. Очевидно, в этом случае полная часть $\widetilde{S}$ группы S — квазициклическая 2-группа. Тогда $\overline{S} = S/\widetilde{S}$ — конечная 2-группа, и пусть K — ее минимальный по порядку образ в S. Тем самым $S = \widetilde{S}K$.

Пусть $\widetilde{S}_n$ — конечная подгруппа из $\widetilde{S}$ порядка 2^n. Из условия насыщенности вытекает, что в группе $\widetilde{S}_nK$ найдется абелева нормальная подгруппа K_1 со свойством $|\widetilde{S}_nK : K_1| \le 2$, в частности, $|K : K \cap K_1| \le 2$. Поскольку n можно взять сколь угодно большим, $\widetilde{S}K_1$ — абелева группа. По [2, теорема 9.1.4] $\widetilde{S}K_1 = \widetilde{S} \times \langle k_1\rangle$, где $|k_1| \le 2$ (см. построение группы $\tilde{S}_1$ из п. 4). Так как $|S : \widetilde{S}K_1| \le 2$, $|\widetilde{S}K_1 : \widetilde{S}| \le 2$, то $|S : \widetilde{S}| \le 4$.

Пусть $\overline{S}$ циклическая. Тогда $\overline{S} = \langle s\widetilde{S}\rangle$ для некоторого $s \in S$. Пусть m — наименьшее число, при котором $s^m \in \widetilde{S}$. Возьмем в S элемент x со свойством $x^m = s^m$ (такой найдется в силу полноты $\widetilde{S}$). Тогда $x^{-1}s$ — элемент порядка m. Ясно, что $m \le 4$ и $S = S \leftthreetimes \langle x^{-1}s\rangle$. Взяв в качестве K группу $\langle x^{-1}s\rangle$, получаем требуемое.

Пусть $\overline{S}$ не циклическая. Тогда $\widetilde{S} = \langle s_1\widetilde{S}\rangle \times \langle s_2\widetilde{S}\rangle$, где $s_i^2 \in \widetilde{S}$ и $S_2^2 \in \widetilde{S}$. Следовательно, можно считать, что s_1, s_2, s_1s_2 — инволюции (доказывается точно так же, как и в случае, когда $\overline{S}$ — циклическая группа). Одна из этих инволюций лежит в $C_S(\widetilde{S})$. Пусть для определенности это s_1. Тогда $S = (\widetilde{S} \times \langle s_1\rangle) \leftthreetimes \langle s_2\rangle$. Возьмем в $\widetilde{S}$ инволюцию z, а в качестве K группу $(\langle z\rangle \times \langle s_1\rangle) \leftthreetimes \langle s_2\rangle$. П. 5 доказан.

Завершим доказательство леммы. Если S — конечная группа, то лемма доказана по п. 1. Если S — бесконечная группа и содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то лемма доказана по п. 2. Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то по предложению 8 S обладает нетривиальной полной частью $\widetilde{S}$, и лемма доказана ввиду пп. 3–5. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $K \in \Im(1)$. Тогда $K \simeq GL_2(p^m)$ для некоторого нечетного простого p.*

Доказательство. Предположим обратное. Если $K \simeq GL_2(2^n)$ для любой K из $\Im(1)$, то по предложениям 12, 10 (п. 1) $G \simeq L_2(Q) \times V$, где Q — локально конечное поле характеристики 2, а V — локально циклическая группа без инволюций, и по предложению 9 теорема доказана. В дальнейшем будет предполагаться, что существует такая K из $\Im(1)$, что K не изоморфна $GL_2(2^n)$ ни для какого n. Следовательно, K изоморфна $GL_2(p^n)$, и $p \neq 2$. Зафиксируем K и p. Предположим, что наряду с K найдется $H \in \Im(1)$ такая, что $H \simeq GL_2(2^m)$.

1. Неравенство $m > 2$ невозможно. Предположим обратное. По лемме 1 и предложению 13 в этом случае любая силовская 2-подгруппа из G — элементарная абелева. Тогда $H \simeq GL_2(2^n)$ для любой H из $\Im(1)$, что противоречит выбору K. П. 1 доказан.

2. Равенство $m = 2$ невозможно. Предположим обратное. Тогда $H \simeq L_2(2^2) \times \langle d \rangle$, где d — элемент порядка 3. Так как $L_2(2^2)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4, то G также содержит подгруппу, изоморфную A_4. Пусть это подгруппа $V = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $a^2 = b^2 = d^3 = e$, и $a^d \neq a$. Так как G содержит K, силовская 2-подгруппа S из G, содержащая $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, не элементарная абелева. Возьмем элемент $x \in N_S(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \setminus (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ со свойством $x^2 \in (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$. Фактор-группа $\langle V, x \rangle / (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$ конечна, так как порождается инволюцией и элементом простого порядка (предложение 1). Следовательно, группа $\langle V, x \rangle$ конечна (предложение 2), ее силовская 2-подгруппа не элементарная абелева, и по условию насыщенности $\langle V, x \rangle \subseteq M$, где $M \simeq GL_2(q^m)$ для некоторого нечетного простого q. Ясно, что $V \subseteq M$, а поскольку $V \simeq A_4$, приходим к противоречию с предложением 11 (п. 6). П. 2 доказан.

3. Равенство $m = 1$ невозможно. Предположим обратное. Тогда $H \simeq (\langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $c^3 = d^2 = e$ и $c^d = c^{-1}$. Возьмем инволюцию x из $C_G(d)$ с тем свойством, что $x \neq d$. Ввиду леммы 1 такая инволюция найдется. Тогда $\langle c, c^x, x, d \rangle$ — конечная группа, порядок которой больше $|H|$. По условию насыщенности $\langle c, c^x, x, d \rangle \subseteq M$, где $M \simeq GL_2(q^m)$ для некоторого нечетного простого q. То, что $q \neq 2$, вытекает из разобранных выше случаев и того факта, что $|M| > 6$. Таким образом, в этом случае группа H всегда вкладывается в некоторую большую с требуемым в условии леммы свойством. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что ни множество $\Im(1)$, ни множество $\Im$ не содержат групп диэдра порядка 6. П. 3 доказан. Лемма доказана.

Зафиксируем некоторую группу $K \in \Im(1)$. По лемме 2 $K \simeq PGL_2(p^m)$, где p — простое нечетное число.

Лемма 3. *Для произвольного элемента $a \in K$ порядка p группа $C_G(a)$ содержит одну инволюцию.*

Доказательство. Ясно, что $Z(K)$ содержит инволюцию, а стало быть, и $C_G(a)$ содержит инволюцию. Пусть z и t — две различные инволюции из $C_G(a)$. Без ограничения общности можно считать, что z из центра K. Фактор-группа $\langle a, z, t \rangle / \langle a \rangle$ конечна, так как порождена двумя инволюциями. По предложению 1 группа $\langle a, z, t \rangle$ конечна и по условиям теоремы вложима в некоторую конечную подгруппу $K_1 \in \Im(\langle a, z, t \rangle)$.

1. Для любого $K_1 \in \Im(\langle a, z, t \rangle)$ имеем $K_1 \simeq GL_2(p_1^{m_1})$, где p_1 — простое нечетное число, не равное p. Предположим обратное. Пусть для некоторой группы K_1, $K_1 \simeq GL_2(p^m)$. Тогда элемент a содержится в некоторой силовской p-подгруппе группы K_1 и $C_{K_1}(\langle a \rangle)$ содержит только одну инволюцию (предложение 11 (пп. 1–3)). В этом случае $z = t$ и приходим к противоречию с выбором z и t. П. 1 доказан.

По п. 1 и предложению 11 (пп. 2, 5) $Z(K_1)$ содержит элемент порядка p, а K_1 содержит подгруппу $\langle a \rangle \times \langle c \rangle$ порядка p^2. Рассмотрим в K подгруппу

Фробениуса $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|b| = p-1$. Пусть v — инволюция из $\langle b\rangle$. Ясно, что $a^v = a^{-1}$. По условию насыщенности конечная группа $\langle a, c, c^v, v\rangle$ содержится в K_2, где $K_2 \simeq GL_2\big(p_2^{m_1}\big)$ и p_2 — простое нечетное число (лемма 2).

2. $p_2 \neq p$. Предположим обратное. Возьмем силовскую p-подгруппу S_p из K_2, содержащую $\langle a\rangle\times\langle c\rangle$. По предложению 11 (п. 3), $v \in N_{K_2}(S_p)$ и $x^v = x^{-1}$ для любого $x \in S_p$ (предложение 11, п. 2). В частности, $c^v = c^{-1}$ и $v \in N_G(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$. Возьмем «сплетающую» инволюцию ω из $N_{K_1}(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ (предложение 11, п. 4). Фактор-группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle/(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ конечна, так как порождается двумя инволюциями. Следовательно, по предложению 2 группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle$ конечна. По условию насыщенности конечная группа $\langle(\langle a\rangle \times \langle c\rangle), v, \omega\rangle$ содержится в K_3, где $K_3 \simeq GL_2\big(p_3^{m_3}\big)$. Ясно, что $p_3 \neq p$ (инволюция ω действует нерегулярно на $(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$, и приходим к противоречию с предложением 11 (п. 4). П. 2 доказан.

По п. 2 $(\langle a\rangle \times \langle c\rangle)$ содержит неединичный элемент r из центра K_2 и $r \neq a$. Тогда $\langle a\rangle\times\langle c\rangle = \langle a\rangle\times\langle r\rangle$, $v \in N_{K_2}(\langle a\rangle\times\langle c\rangle)$ и без ограничения общности можно считать, что c совпадает с r, следовательно, $c^v = c$. Поскольку $b \in N_K(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle v\rangle)$, а $c \in C_G(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle v\rangle)$, то $\langle a, v, c, c^b\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle a, v, c, c^b\rangle \subseteq K_4$, где $K_4 \simeq GL_2\big(p_4^m\big)$ для некоторого нечетного простого $p_4 \neq p$. В этом случае $a \notin Z(K_4)$, поскольку $a^v = a^{-1}$. Так как $c^b \in N_{K_4}(\langle c\rangle \times \langle a\rangle)$, то $c^b \in (\langle c\rangle \times \langle a\rangle)$, $b = v$ и $p = 3$ (предложение 11 (п. 4)). Следовательно, $K \simeq GL_2(3^m)$.

3. Неравенство $m > 1$ невозможно. Предположим обратное. Следовательно, в K найдется $\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$ порядка 3^2, и $\big\langle a, a_1, a_1^c\big\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$ — конечная группа, которая по условию насыщенности лежит в K_5, где $K_5 \simeq GL_2\big(p_5^{m_5}\big)$. Так как $c^v = c$, то $p_5 \neq 3$. Поскольку подгруппы $\langle a\rangle \times \langle a_1^c\rangle$ и $\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$ имеют нетривиальное пересечение с центром K_5, они совпадают, значит, $c \in N_G(\langle a\rangle\times\langle a_1\rangle)$, что возможно только в случае, если $c \in C_G(\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle)$. Из последнего вытекает, что либо $c \in (\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle$ и $c^v = c^{-1}$, что не так, либо $(\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle c\rangle)\leftthreetimes\langle v\rangle$ — конечная подгруппа в G. По условию насыщенности $(((\langle a\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle v\rangle) \subseteq K_6$, где $K_6 \simeq GL_2(3^{m_6})$, $m_6 > 2$. Но это невозможно, поскольку $c^v = c$. П. 3 доказан.

Для завершения доказательства леммы осталось доказать следующий пункт.

4. Равенство $m = 1$ невозможно. Предположим обратное. Тогда $K \simeq GL_2(3)$ — конечная разрешимая группа порядка 48 с полудиэдральной силовской 2-подгруппой S_K. Возьмем элемент $d \in C_G(S_K)$ и $|d| > 2$. Тогда $\langle S_K, d\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle S_K, d\rangle \subseteq K_7$, где $K_7 \in \Im(1)$. В этом случае $K_7 \simeq GL_2\big(p_7^{m_7}\big)$. Тогда либо $p_7 = 3$ и $m_7 > 1$, либо $p_7 \neq 3$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $K \notin \Im(1)$, а $GL_2(3) \notin \Im$. Противоречие с выбором K. П. 4 доказан. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для произвольного элемента a порядка p из K все 2-элементы группы $C_G(a)$ порождают локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Если все 2-элементы из $C_G(a)$ являются инволюциями, то утверждение леммы вытекает из леммы 2. Пусть $C_G(a)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $C_G(a)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0\rangle$, $|b_0| = 2^k$ и $k \geq 1$, то она единственна. Пусть в $C_G(\langle a\rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ и $|b| = 2^{k+1}$. Предположим, что существует другая циклическая подгруппа $\langle c\rangle$, лежащая в $C_G(a)$, $\langle c\rangle \neq \langle b\rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c\rangle$. В ней конечная абелева подгруппа $\langle a, b^2\rangle = \langle a, c^2\rangle$ нормальна (равенство $\langle b^2\rangle = \langle c^2\rangle = \langle d\rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a,b,c\rangle/\langle a,d\rangle$ конечна, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, конечной является и группа $\langle a,b,c\rangle$. По условиям теоремы $\langle a,b,c\rangle \subseteq L \in \Im(\langle a,b,c\rangle)$. Если $L \simeq GL_2(p^m)$, то в L существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1}, лежащая в $C_G(\langle a\rangle)$, и она лежит в центре группы L. Противоречие с выбором $\langle c\rangle$. Следовательно, $\langle b\rangle = \langle c\rangle$. Если $L \simeq GL_2\big(p_1^m\big)$, где p_1 — простое нечетное число, не равное p, то по предложению 11 (п. 5) $p|\big(p_1^m-1\big)$ и L содержит абелеву подгруппу D порядка $\big(p_1^m-1\big)^2$ (предложение 11 (п. 2)). Без ограничения общности можно считать, что $\langle a\rangle \subseteq D$ и $C_G(a)$ содержит две различные инволюции. Противоречие с леммой 3. Лемма доказана.

Лемма 5. *Все 2-элементы из $Z(K)$ лежат в центре группы G и порождают в нем единственную локально циклическую 2-подгруппу.*

Доказательство. Обозначим через z инволюцию из центра K.

1. Инволюция z лежит в центре группы G. Предположим обратное. Тогда существует элемент $g \in G$ такой, что $z^g = \upsilon$ и $\upsilon \neq z$. Пусть a — элемент порядка p из K. Группа $\langle a, a^\upsilon\rangle$ конечна по определению 1. Так как $\langle a, a^\upsilon\rangle^\upsilon = \langle a^\upsilon, a\rangle = \langle a, a^\upsilon\rangle$, то $\upsilon \in N_g(\langle a, a^\upsilon\rangle)$. Последнее означает, что группа $\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle$ конечна. По условию насыщенности

$$\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle \subseteq L_1 \in \Im(\langle a^\upsilon, a, \upsilon\rangle).$$

По лемме 3 $z \in Z(L_1)$, значит, $z\upsilon = \upsilon z$, т. е. $z^G = \langle z^g \mid g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G периода 2. Следовательно, $z = \upsilon$. Противоречие с выбором υ. П. 1 доказан.

Предположим, что $Z(K)$ содержит 2-элементы порядка больше 2. В этом случае силовская 2-подгруппа из K является сплетенной группой (предложение 11 (пп. 9, 10)). По лемме 1 силовская 2-подгруппа из G также сплетенная группа (конечная или бесконечная). Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle d\rangle$ порядка 2^k $(k \geq 1)$, то она также содержится в $Z(G)$. Пусть в $Z(K)$ существует циклическая подгруппа $\langle b\rangle$ порядка 2^{k+1}. Покажем, что b лежит в центре группы G. Предположим обратное. Тогда существует $g \in G$ такой, что $b^g = c \neq b$. В силу индуктивного предположения можно считать, что $b^2 = c^2 = d \in Z(G)$. Следовательно, $\langle a,c\rangle$ — конечная группа (предложение 1). По условию насыщенности $\langle a,c\rangle \subseteq L_2 \in \Im(\langle a,c\rangle)$.

2. Порядок $|c|$ не делит $|Z(L_2)|$. Предположим обратное. Тогда по лемме 4 $b \in Z(L_2)$. Следовательно, $b^G = \langle b^g \mid g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G, и, значит, $b = c$. Противоречие с выбором c. П. 2 доказан.

По п. 2 и предложению 11 (пп. 9, 10) $N_{L_2}(\langle c\rangle)$ содержит инволюцию t со свойством $c^t = cw$, где w — инволюция из $\langle c\rangle$ (предложение 11 (пп. 9, 10)). Так как $c = b^g$, то $N_G\langle b\rangle$ содержит инволюцию $t^{g^{-1}}$ со свойством $b^{gtg^{-1}} = bw^{g^{-1}}$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, t^{g^{-1}}, a\rangle$ содержится в L_3 и $b \in C_{L_3}(a)$, где $L_3 \simeq GL_2\big(p_1^m\big)$, и p_1 — простое нечетное число.

3. Равенство $p = p_1$ невозможно. Предположим обратное. Тогда $b \in Z(L_3)$ (предложение 11, п. 2) и инволюция $t^{g^{-1}}$ перестановочна с b; противоречие. П. 3 доказан.

По п. 3 $p \neq p_1$. Тогда либо $p|\big(p_1^m-1\big)^2$, либо $p|\big(p_1^m+1\big)$. В первом случае $C_{L_3}(a)$ содержит две различные инволюции, что противоречит лемме 2. Во втором случае L_3 содержит подгруппу $(\langle b_1\rangle\times\langle a\rangle)\leftthreetimes\langle t\rangle$, где $S_{L_3}=(\langle b_1\rangle\times\langle t\rangle)$ — силовская 2-подгруппа группы L_3 — будет полудиэдральной группой порядка больше 8 ($b_1^{2^k}=t^2=e$ и $b_1^t=b_1^{-1}w^{g^{-1}}$), $a^t=a^{-1}$, $b\in\langle b_1\rangle$, а силовская 2-подгруппа из $Z(L_3)$ совпадает с $\langle w^{g^{-1}}\rangle$. Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из G является сплетенной группой (конечной или бесконечной). Следовательно, в G существует элемент d порядка 4 такой, что $d\in C_G(S_{L_3})$ и $d^2\in\langle b_1\rangle$. Отсюда, в частности, получаем, что d^2 — инволюция из $Z(G)$. Из определения 1 и предложения 1 вытекает, что $\langle b_1,a,a^c\rangle$ и $\langle d,t\rangle$ — конечные группы. Ясно, что $\langle d,t\rangle\in N_G(\langle b_1,a,a^c\rangle)$. Следовательно, $\langle d,t,b_1,a,a^c\rangle$ — конечная группа, которая по условию насыщенности лежит в некоторой $L_4\in\Im(1)$. Легко видеть, что силовская 2-подгруппа из L_4 — сплетенная группа и $|b|\mid|Z(L_4)|$. Но тогда $b\in Z(L_4)$, что не так. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть b — элемент нечетного порядка из $Z(K)$. Тогда в G не существует элемента x такого, что $b^x=b^{-1}$ и $x^2\in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть такой элемент x существует. Так как G — группа Шункова, то $\langle b,x,a\rangle$ — конечная группа. Здесь a — элемент порядка p из K. По условию насыщенности $\langle b,x,a\rangle\subseteq L$, где $L\in\Im(1)$, т. е. $L\simeq GL_2\bigl(p_1^m\bigr)$. Если $p=p_1$, то из предложения 11 (пп. 2, 3, 6) вытекает, что $b\in Z(L)$. Следовательно, $b^x=b$, что противоречит выбору элемента x. Если $p\neq p_1$, то либо $p|\bigl(p_1^m-1\bigr)^2$, либо $p|\bigl(p_1^m+1\bigr)$. В первом случае $C_L(a)$ содержит две различные инволюции (предложение 11 (п. 2)), что противоречит лемме 3. Во втором случае, переходя к фактор-группе $L/Z(L)\simeq PGL_2\bigl(p_1^m\bigr)$, приходим к противоречию со структурой $PGL_2\bigl(p_1^m\bigr)$. Действительно, поскольку b — не центральный элемент из L, то

$$(\langle b\rangle Z(L)/Z(L)\times\langle a\rangle Z(L)/Z(L))\leftthreetimes\langle x\rangle Z(L)/Z(L)$$

— подгруппа из $L/Z(L)$ порядка $2p|b|$, причем инволюция $\langle x\rangle Z(L)/Z(L)$ действует тождественно на циклической группе $\langle a\rangle Z(L)/Z(L)$ и регулярно на циклической группе $\langle b\rangle Z(L)/Z(L)$. Но таких подгрупп в $PGL_2\bigl(p_1^m\bigr)$ нет (предложение 11 (пп. 7, 8)). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $b\in Z(K)$ и $|b|=r$ — простое нечетное число. Тогда $b\in Z(G)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $b\neq b^g$ для некоторого $g\in G$. По условию насыщенности конечная группа $\langle b,b^g\rangle$ содержится в $K_{(1,g)}\in\Im(\langle b,b^g\rangle)$.

1. Существует такой g, что b не принадлежит $Z(K_{(1,g)})$. Действительно, если $b\in Z(K_{(1,g)})$ для любого $g\in G$, то $b^G=\langle b^g\mid g\in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b,g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b,g\rangle\subseteq K_2\in\Im(\langle b,g\rangle)$. Следовательно, $b^{K_2}=\langle b^x\mid x\in K_2\rangle$ — нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 11 (п. 2) $b^{K_2}\subset Z(K_2)$, в частности, $b\in Z(K_2)$, значит, $b^g=b$. Противоречие с выбором g. П. 1 доказан.

Положим $K_{1,g}=K_1$ и зафиксируем группу K_1.

2. $r\in\pi(Z(K_1))$. По предложению 11 (пп. 7, 8)

$$\overline{K}_1=K_1/Z(K_1)=L_1\leftthreetimes\langle v\rangle,$$

где $L_1\simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v|=2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K}_1$ попадают в подгруппу L_1, для некоторой инволюции $\bar t\in\overline{K}_1$, $\bar b^{\bar t}=\bar b^{-1}$. Здесь

$\bar{b}$ — образ b при естественном гомоморфизме K_1 на $\overline{K}_1$. Это означает, что для некоторого 2-элемента $t \in K_1$, $b^t = b^{-1}z$, и $t^2 \in Z(G)$ (лемма 5), где $e \neq z \in Z(K_1)$ (лемма 6). Так как $r = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^r = (b^r)^{-1}z^r = ez^r = z^r$. П. 2 доказан.

Положим $z = d$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$ из K_1. Ясно, что $t \in N_{K_1}(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$, $d^t = d$ и $b^t = b^{-1}d$.

3. В K найдется инволюция υ такая, что $\langle d, b, \upsilon\rangle \subseteq K_3 \in \Im(\langle d, b, \upsilon\rangle)$ — конечная группа и $d \notin Z(K_3)$. Так как $b \in Z(\langle d, b, \upsilon\rangle)$, то $\langle d, b, \upsilon\rangle$ — конечная группа для любой инволюции $\upsilon \in K$ и по условию насыщенности

$$\langle d, b, \upsilon\rangle \subseteq K_3 \in \Im(\langle d, b, \upsilon\rangle).$$

Предположим, что $d \in Z(K_3)$ для любой инволюции $\upsilon \in K$. Так как $K = \langle \upsilon \mid \upsilon \in K, \upsilon^2 = e\rangle$, то $d \in C_G(K)$. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $d \in K$, либо $ad \notin K$. В первом случае $d \in Z(K)$ и по предложению 11 (п. 2) $\langle d\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Во втором случае имеем конечную подгруппу $\langle d\rangle \times K$ и по условию насыщенности

$$(\langle d\rangle \times (\langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle) \subseteq K_4 \simeq GL_2\big(p_1^m\big),$$

где p_1 — нечетное простое число, $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$ — подгруппа порядка r^2 из K, а w — «сплетающая» инволюция из $N_K(\langle b\rangle \times \langle c\rangle)$. Но, с другой стороны, $p_1 \neq r$, и в K_4 нет элементарно абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 11 (пп. 1, 4)); противоречие. Итак, требуемая инволюция υ найдется. П. 3 доказан.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle d\rangle \times \langle b\rangle \subseteq K_3$ и $|\langle d\rangle \times \langle b\rangle| = r^2$, по предложению 11 (п. 4) $(\langle d\rangle \times \langle b\rangle) \cap Z(K_3) = \langle z\rangle \neq e$. Ясно, что $\langle d\rangle \times \langle b\rangle = \langle d\rangle \times \langle z\rangle$. Поскольку $a \notin Z(K_3)$, в фактор-группе $\overline{K}_3 = K_3/Z(K_3)$ найдется такая инволюция $\bar{t}_1$, что $\bar{d}^{\bar{t}_1} = \bar{d}^{-1}$.

Следовательно, в K_3 найдется 2-элемент t_1 такой, что $d^{t_1} = d^{-1}z_1$. По лемме 5 $t_1^2 \in Z(G)$, и по лемме 6 $z_1 \neq e$. Ясно также, что $z_1 \in \langle z\rangle$. Стало быть, $t_1 \in N_{K_3}(\langle d\rangle \times \langle z\rangle)$. Поскольку $(\langle d\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$, то $t_1 \in N_{K_3}(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$. Итак, имеем 2-элементы t и t_1 из $N_G(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)$, нетривиально действующие на $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, такие, что $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$ и t^2, $t_1^2 \in Z(G)$. Так как фактор-группа $\langle((\langle d\rangle \times \langle b\rangle), t_1, t\rangle / \big\langle((\langle d\rangle \times \langle b\rangle), t_1^2, t^2\big\rangle = \langle \overline{t_1}, \bar{t}\rangle$ порождается двумя инволюциями $\overline{t_1}$ и $\bar{t}$, она конечна.

Получили, что $\langle((\langle d\rangle \times \langle b\rangle), t_1, t\rangle = M$ также конечная группа. По условию насыщенности $M \subseteq K_5 \in \Im(M)$. В силу того, что $t_1, t_2 \in \{N_{K_5}(\langle d\rangle \times \langle b\rangle) \backslash C_{K_5}(\langle d\rangle \times \langle b\rangle)\}$, из предложения 11 (п. 4) получаем, что $xt = t_1$ и $d \neq d^{-1}z_1 = d^{t_1} = d^{xt} = d^t = d$ для некоторого $x \in C_{K_5}((\langle d\rangle \times \langle b\rangle))$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $b \in Z(K)$, где $K \in \Im(1)$ и $|b|$ — нечетное число. Тогда $b \in Z(G)$.*

Доказательство. В силу леммы 7 и индукции будем считать, что $|b| = r^n$, где r — простое число, $n > 1$ и $b^r \in Z(G)$. В этом случае группа $\langle b, b^g\rangle$ конечна для любого $g \in G$ (определение 1). По условию насыщенности $\langle b, b^g\rangle \subseteq K_{(1,g)}$ и $K_{(1,g)} \simeq GL_2\big(p_1^m\big)$ для некоторого нечетного простого p_1.

1. Существует такой $g \in G$, что $bb^g \neq b^g b$. Действительно, если $bb^g = b^g b$ для любого $g \in G$, то $b^G = \langle b^g \mid g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G. Следовательно, $\langle b, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b, g\rangle \subseteq$

$K_2 \in \Im(\langle b, g\rangle)$. Значит, $b^{K_2} = \langle b^x \mid x \in K_2\rangle$ — нормальная r-подгруппа в K_2. По предложению 11 (п. 2) $b^{K_2} \subset Z(K_2)$, в частности, $b \in Z(K_2)$, значит, $b^g = b$. Противоречие с выбором g. П. 1 доказан.

Зафиксируем группу $K_1 = K_{(1,g)}$.

2. $r^n||Z(K_1)|$. По предложению 11 (п. 2)

$$\overline{K}_1 = K_1/Z(K_1) = L_2 \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где $L_1 \simeq L_2(p^{n_1})$ и $|v| = 2$. Так как все элементы нечетных порядков из $\overline{K}_1$ попадают в подгруппу L_1, то $\bar{b}^{\bar{t}} = \bar{b}^{-1}$ для некоторой инволюции $\bar{t} \in \overline{K_1}$. Здесь $\bar{b}$ — образ b при естественном гомоморфизме K_1 на $\overline{K}_1$. Это означает, что $b^t = b^{-1}z$ и $t^2 \in Z(G)$ для некоторого 2-элемента $t \in K_1$, где $e \neq z \in Z(K_1)$. Так как $r^n = |b| = |b^t| = |b^{-1}z|$, то $e = (b^{-1}z)^{r^n} = (b^{r^n})^{-1}z^{r^n} = ez^{r^n} = z^{r^n}$. Соотношение $z^{r^{n-1}} \neq e$ вытекает из леммы 6. П. 2 доказан.

Пусть z из п. 2. Положим $z = d$, зафиксируем t и подгруппу $(\langle d\rangle\langle b\rangle)$ из K_1. Ясно, что $t \in N(\langle d\rangle\langle b\rangle)$ и $\langle b^r\rangle = \langle d^r\rangle$ (индуктивное предположение относительно b и предложение 11 (п. 2)).

3. Структура $\langle d\rangle\langle b\rangle$ следующая.
3.1. $\langle d\rangle\langle b\rangle = \langle d\rangle \times \langle b_1\rangle$.
3.2. $b_1 = bd^{-k}$, где $b^r = d^{rk}$ и $(k, r) = 1$.
3.3. $|b_1| = r$.
3.4. $b_1^t = b_1^{-1}d^{1-2k}$.
3.5. $d^t = d$.
3.6. $b^t = b^{-1}d$.
3.7. $b = d^{(r^n-1)/2}\, b_1$.
Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

4. В K найдется инволюция v такая, что конечная группа $\langle d, b, v\rangle$ содержится в $K_3 \in \Im(\langle d, b, v\rangle)$ и $d \notin Z(K_3)$.

Так как $b \in Z(\langle d, b, v\rangle)$, то $\langle d, b, v\rangle$ — конечная группа для любой инволюции $v \in K$ (предложение 1) и по условию насыщенности

$$\langle d, b, v\rangle \subseteq K_3 \in \Im(\langle d, b, v\rangle).$$

Предположим, что $d \in Z(K_3)$ для любой инволюции $v \in K$. Так как $K = \langle v \mid v \in K, v^2 = e\rangle$, то $d \in C_G(K)$. Здесь может быть две взаимно исключающие возможности: либо $d \in K$, либо $d \notin K$. В первом случае $d \in Z(K)$ и по предложению 11 (п. 2) $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Во втором случае имеем конечную подгруппу $\langle d\rangle K$ и по условию насыщенности

$$(\langle d\rangle(\langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle) \subseteq K_4 \simeq GL_2\bigl(p_1^m\bigr),$$

где p_1 — нечетное простое число, $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$ — подгруппа порядка $(r^n)^2$ из K, а w — «сплетающая» инволюция из $N_K(\langle b\rangle \times \langle c\rangle)$. Но тогда $p_1 \neq r$ и в K_3 нет элементарных абелевых подгрупп порядка r^3 (предложение 11 (пп. 1, 4)). С другой стороны, по п. 3 группа $\langle d\rangle\langle b\rangle$ содержит нециклическую абелеву подгруппу порядка r^2, поэтому K_4 содержит элементарную абелеву подгруппу порядка r^3. Противоречие, которое указывает на то, что требуемая инволюция v найдется. П. 4 доказан.

Завершим доказательство леммы. Так как $\langle d\rangle\langle b\rangle \subseteq K_3$ и $\langle d\rangle\langle b\rangle = \langle d\rangle \times \langle b_1\rangle$ (см. п. 3 настоящей леммы), по предложению 11 (п. 4) $(\langle d\rangle\langle b\rangle) \cap Z(K_3) \neq e$.

Пусть z — элемент порядка r из указанного пересечения. Поскольку $b_1 \notin Z(K_3)$, то $\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ — подгруппа порядка r^2 из K_3. Из того факта, что $d \notin Z(K_3)$ и предложения 11 (п. 4) вытекает, что в $N_{K_3}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ найдется инволюция t_1 такая, что $d^{t_1} \neq d$. Тем самым $d^{t_1} = d^{-1}z_1$, где z_1 — элемент порядка r^n из $Z(K_3)$. Меньший порядок элемент z_1 иметь не может в силу леммы 6, так как $\langle d^r\rangle = \langle b^r\rangle$, а $\langle b^r\rangle \subset Z(G)$ по индуктивному предположению. Ясно также, что $z \in \langle z_1\rangle$, $t_1 \in N_{K_3}(\langle d\rangle\langle z_1\rangle)$ и $\langle z_1^r\rangle = \langle d^r\rangle = \langle b^r\rangle$.

Если $\langle z_1\rangle = \langle b\rangle$, то $(\langle d\rangle\langle z_1\rangle) = (\langle d\rangle\langle b\rangle)$ и $t_1 \in N_{K_3}(\langle d\rangle\langle b\rangle)$. Итак, в $N_G(\langle d\rangle\langle b\rangle)$ имеем 2-элемент t ($t^2 \in Z(G)$) и инволюцию t_1, нетривиально действующие на $\langle d\rangle\langle b\rangle$, такие, что $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$. Фактор-группа $\langle(\langle d\rangle\langle b\rangle), t_1, t\rangle/\langle d, b, t^2\rangle = \langle \bar{t}_1, \bar{t}\rangle$ порождается двумя инволюциями $\bar{t}_1$ и $\bar{t}$, стало быть, она конечна. Следовательно, $\langle(\langle d\rangle\langle b\rangle), t_1, t\rangle = M$ также конечная группа. По условию насыщенности $M \subseteq K_5 \in \Im(M)$. Из предложения 11 (п. 4) получаем, что $t_1, t \in \{N_{K_5}(\langle a\rangle\langle b\rangle)\backslash C_{K_5}(\langle d\rangle\langle b\rangle)\}$ и $xt = t_1$, $d \neq d^{-1}z_1 = d^{t_1} = d^{xt} = d^t = d$ для некоторого $x \in C_{K_5}(\langle d\rangle\langle b\rangle)$; противоречие.

Если $\langle z_1\rangle \neq \langle b\rangle$, то из того, что $\langle d, b, t_1\rangle \subseteq N_{K_2}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$, и предложения 11 (п. 4) вытекает, что $b^{t_1} = b^{-1}z_2$, где $\langle z_1\rangle = \langle z_2\rangle$. В этом случае $\langle b\rangle\langle z_1\rangle = \langle z_1\rangle \times \langle b_2\rangle$, $\langle d\rangle\langle z_1\rangle = \langle z_1\rangle \times \langle d_2\rangle$, где b_2, d_2 — элементы порядка r из $N_{K_2}(\langle z\rangle \times \langle b_1\rangle)$ (п. 3 настоящей леммы). Так как $z \in \langle z_1\rangle$, то $\langle z\rangle \times \langle b_2\rangle = \langle z\rangle \times \langle d_2\rangle$, поэтому $\langle z_1\rangle\langle b\rangle = \langle z_1\rangle\langle d\rangle$. Отсюда немедленно вытекает, что $\langle d\rangle\langle b\rangle \subseteq \langle z_1\rangle\langle b\rangle$. Поскольку $\langle d\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle \times \langle b_1\rangle$, то $|\langle d\rangle\langle b\rangle| = |\langle z_1\rangle\langle b\rangle|$. Следовательно, $\langle b\rangle\langle d\rangle = \langle z_1\rangle\langle b\rangle = \langle z_1\rangle\langle d\rangle$ и $t_1 \in N_{K_3}(\langle a\rangle\langle b\rangle)$. Таким образом, инволюции t, t_1 опять попадают в $N_G(\langle d\rangle\langle b\rangle)$, и, как показано выше, $d^t = d$, $d^{t_1} = d^{-1}z_1 \neq d$. Далее, дословно повторяя завершающие рассуждения из случая $\langle z_1\rangle = \langle b\rangle$, приходим к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 9. *$Z(G)$ — локально циклическая группа.*

Доказательство. Пусть $\langle z_1, \dots, z_n\rangle$ — подгруппа из $Z(G)$, порожденная конечным набором элементов. По условию насыщенности $\langle z_1, \dots, z_n,\rangle \subseteq L \in \Im(1)$. По предложению 11 (п. 2) $\langle z_1, \dots, z_n\rangle$ — циклическая группа из $Z(L)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. По лемме 9 $Z(G)$ — локально циклическая группа. Очевидно, фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ — периодическая группа. Покажем, что $\overline{G}$ насыщена группами из множества $\mathfrak{R}$. Пусть $\overline{H}$ — конечная подгруппа из $\overline{G}$ и H — некоторый ее конечный прообраз в G. По условию теоремы $H \subseteq M \subset G$, $M \in \Im(1)$ и $M \simeq GL_2(q^n)$, где q — простое нечетное число (лемма 2). По леммам 5, 8 $Z(M) \subset Z(G)$. Переходя к $\overline{G}$, получим

$$\overline{K} \subseteq \overline{M} \simeq MZ(G)/Z(G) \simeq M/M \cap Z(G) \simeq M/Z(M) \simeq PGL_2(q^n).$$

По предложению 7 $\overline{G}$ — локально конечная группа. По теореме Шмидта (предложение 1) G — локально конечная группа, и по предложению 7 $G \simeq GL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлепкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 363.
2. *Рубашкин А. Г., Филиппов К. А.* О периодических группах, насыщенных группами $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.

3. *Шлепкин А. А., Сабодах И. В.* О группах Шункова, насыщенных $GL_2(p^n)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 734–744.
4. *Шлепкин А. А.* О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$ // Вестн. СибГАУ. 2013. Т. 1. С. 100–108.
5. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 4. С. 484–496.
6. *Кузнецов А. А., Филиппов К. А.* Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 230–246.
7. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
8. *Кузнецов А. А., Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* Группы с условием насыщенности. Красноярск: КрасГАУ, 2010.
9. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.
10. *Шлепкин А. А.* Периодические группы, насыщенные сплетенными группами // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 56–64.
11. *Шлепкин А. А.* О периодических группах, насыщенных проективными линейными группами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. С. 952–957.
12. *Dickson L.* Linear groups. Leipzig: B. C. Neubner–B. G. Teubner, 1901.
13. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.
14. *Harada K., Mong Lung Lang.* Indecomposable Sylow 2-subgroups of simple groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 161–194.
15. *Дуж А. А., Шлепкин А. А.* О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 12. С. 123–126.
16. *Лыткина Д. В.* Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп. II // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1096–1112.

Статья поступила 16 февраля 2015 г.

Шлепкин Алексей Анатольевич
Сибирский федеральный университет,
Институт космических и информационных технологий,
Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
shlyopkin@mail.ru