Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.54

О $\mathscr{M}_p$–ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Б. Гао, Ц. Танг, Л. Мяо

Аннотация. Подгруппа K группы G называется *$\mathscr{M}_p$-добавляемой в G*, если существует подгруппа B в G такая, что $G = KB$ и $TB < G$ для каждой максимальной подгруппы T в K такой, что $|K : T| = p^\alpha$. Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения. Пусть p — простой делитель $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Тогда G p-нильпотентна, если и только если всякая подгруппа T в H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — p-группа.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.103

Ключевые слова: p-нильпотентная подгруппа, композиционный фактор, $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа, конечная группа.

1. Введение

Все подгруппы в статье конечны. Большая часть обозначений стандартна (см. [1–3]). Пусть π — множество простых чисел. Неединичная подгруппа H в группе G называется *$\mathscr{M}_\pi$-добавляемой в G* [4], если существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для каждой максимальной подгруппы H_1 в H со свойством $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. Если $\pi = \{p\}$, то H называется *$\mathscr{M}_p$-добавляемой подгруппой*. Если $\pi = \pi(G)$, то H — $\mathscr{M}$-добавляемая подгруппа. С использованием определения $\mathscr{M}_p$-добавляемой подгруппы в [4] получены следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

Теорема 2. *Пусть G — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

В [5] обобщены два приведенных выше утверждения следующим образом.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G, где p — наименьший простой делитель $|G|$. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа T в H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

This research is supported by NSFC (Grant #11271016) and Qing Lan project of Jiangsu Province and High-level personnel of support program of Yangzhou University. Long Miao is the corresponding author.

Теорема 4. *Пусть G — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \ldots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$, и пусть H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа T в H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G p-сверхразрешима.*

В конце работы [4] авторы делают следующее

Замечание. В простой группе $G = A_5$ силовская 5-подгруппа $\mathscr{M}$-добавляема в G. Поэтому ограничения на простое число p в теоремах 1 и 2 существенны.

Напомним, что подгруппа H в группе G называется *дополняемой в* G, если существует подгруппа K в G такая, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$. В 1937 г. в [6] Холл установил, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа в G дополняема в G. Более того, в 1982 г. в [7] Арад и Уорд доказали, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда ее силовские 2- и 3-подгруппы дополняемы в G. Простые числа 2 и 3 удовлетворяют ограничениям теорем 1 и 2 соответственно. В продолжение этих работ мы устанавливаем следующий структурный результат.

Теорема 5. *Пусть H — 5-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую 5-подгруппу P в G. Предположим, что в H имеется подгруппа D со свойством $D_5 \neq 1$ и $|H : D| = 5^\alpha$. Если всякая подгруппа T группы H такова, что $|T| = |D|$ и $\mathscr{M}_5$-добавляема в G, то каждый композиционный фактор E/K группы G удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *E/K — циклическая группа порядка 5;*

(2) *E/K — $5'$-подгруппа;*

(3) *группа E/K изоморфна группе A_5.*

Теорема 5.8 из [8] утверждает, что G разрешима, если $(|G|, 15) = 1$. Из теоремы 5 немедленно вытекает

Следствие 6. *Пусть $\pi = \{3, 5\}$. Для каждого $p \in \pi$ пусть P — силовская p-подгруппа группы G и H — p-нильпотентная подгруппа в G, содержащая P. Если в H имеется подгруппа D со свойством $D_p \neq 1$, $|H : D| = p^\alpha$, и всякая подгруппа T в H такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то G разрешима.*

Далее, известная теорема Фробениуса [3, теорема 5.8] утверждает, что группа G p-нильпотентна, если $N_G(U)/C_G(U)$ — p-группа для каждой p-подгруппы U в G. В настоящей работе мы заменяем некоторые условия теоремы Фробениуса и получаем следующий основной результат.

Теорема 7. *Пусть p — простой делитель $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы G. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Тогда G p-нильпотентна в том и только том случае, когда всякая подгруппа T группы H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — p-группа.*

2. Предварительные сведения

Для удобства читателя приведем результаты, используемые ниже.

Лемма 2.1 [4, леммы 2, 3]. *Пусть H — подгруппа группы G и p — простой делитель $|G|$. Если подгруппа H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G, то справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq M \leq G$, то H также $\mathscr{M}_p$-добавляема в M.*

(2) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то подгруппа H/N $\mathscr{M}_p$-добавляема в G/N.*

(3) *Если K — нормальная p'-подгруппа, то подгруппа HK/K $\mathscr{M}_p$-добавляема в G/K.*

Лемма 2.2 [4, лемма 4]. *Пусть H — $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа группы G, и пусть B — $\mathscr{M}_p$-добавление к H. Если H_1 — максимальная подгруппа в H и $p \mid |H : H_1|$, то $|G : H_1B| = |H : H_1|$.*

Лемма 2.3 [2, теорема 1.8.17]. *Пусть N — разрешимая нормальная подгруппа группы G. Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то $F(N)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G, содержащихся в N.*

Лемма 2.4 [9, теорема 4.5]. *Пусть G — группа и H — подгруппа в G. Если $|G : H| = n$, то $G/H_G \hookrightarrow S_n$.*

Лемма 2.5 [2, лемма 3.6.10]. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и P — p-подгруппа в G, где p — простой делитель $|G|$. Тогда $N_{G/K}(PK/K) = N_G(P_1)K/K$, где P_1 — силовская p-подгруппа группы PK.*

Лемма 2.6. *Пусть H — 5-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую 5-подгруппу P группы G. Если подгруппа H $\mathscr{M}_5$-добавляема в G, то каждый композиционный фактор E/K группы G удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *группа E/K циклическая порядка 5;*

(2) *E/K — $5'$-подгруппа;*

(3) *группа E/K изоморфна A_5.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и G — контрпример наименьшего порядка. Тогда G не 5-разрешима. В силу теорем 1 и 2 из [4] получаем, что $2 \mid |G|$ и $3 \mid |G|$. Если $5 \nmid |G|$, то каждый композиционный фактор группы G является $5'$-группой. Поэтому $15 \mid |G|$. По предположению существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы H_i в H такой, что $|H : H_i| = 5$. Пусть $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $H_i = P_iH_{5'}$, где P_i — максимальная подгруппа в P. Кроме того, по лемме 2.2 имеем $|G : H_iB| = |H : H_i| = 5$, и тогда по лемме 2.4 группа $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_5. Если $(H_iB)_G = 1$ для некоторого i, то группа G изоморфна подгруппе симметрической группы S_5. Поэтому в силу строения группы S_5 порядок $|G|$ равен 120 или 60, т. е. каждый композиционный фактор группы G является 2-подгруппой или изоморфен группе A_5; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $(H_iB)_G \neq 1$ для любого i. Согласно структуре группы S_5 порядок $|G/(H_iB)_G|$ равен 120, 60, 20, 10 или 5 и потому каждый композиционный фактор группы $G/(H_iB)_G$ является циклической группой порядка 5, $5'$-подгруппой или изоморфен A_5.

Если $H(H_iB)_G < G$ для некоторого i, то подгруппа $H(H_iB)_G$ удовлетворяет условиям теоремы в силу леммы 2.1(1). Поэтому теорема остается верной для $(H_iB)_G$, поскольку $1 < (H_iB)_G \trianglelefteq H(H_iB)_G$. Следовательно, каждый композиционный фактор группы G есть циклическая группа порядка 5 или $5'$-подгруппа, или он изоморфен A_5; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $H(H_iB)_G = G$ для каждого i. Так как группа H 5-нильпотентна, группа $G/(H_iB)_G$ тоже 5-нильпотентна. Поэтому группа $G/\bigcap\limits_{i=1}^{n}(H_iB)_G$ 5-нильпотентна.

Очевидно, $P \cap (H_i B)_G = P_i$ для каждой подгруппы H_i группы H. Имеем

$$P \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (H_i B)_G \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (P \cap (H_i B)_G) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i = \Phi(P),$$

поэтому группа $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (H_i B)_G$ 5-нильпотентна по теореме Тейта [3, IV.4.7]. Значит, группа G 5-разрешима; противоречие.

Итоговое противоречие завершает наше доказательство.

Лемма 2.7. *Пусть p — простой делитель $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Предположим, что в H имеется подгруппа D со свойством $|H : D| = p^{n-1}$, где $|P| = p^n$. Если всякая подгруппа T в H такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — p-группа, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Пусть T — подгруппа группы H такая, что $|T| = |D|$. По предположению существует подгруппа B в G такая, что $G = TB$ и $T_{p'}B < G$. Это значит, что всякая подгруппа порядка p в P $\mathscr{M}$-добавляема в G. Так как G не p-нильпотентна, в G имеется минимальная не p-нильпотентная подгруппа A вида $A = A_p \rtimes Q$, где Q — силовская q-подгруппа группы A. Допустим, что $A < G$. Если $|A_p| = p$, то $A_p \leq C_A(A_p)$, поскольку

$$N_A(A_p)/C_A(A_p) \cong (N_G(A_p) \cap A)C_G(A_p)/C_G(A_p) \leq N_G(A_p)/C_G(A_p)$$

является p-группой. Поэтому $N_A(A_p) = C_A(A_p)$ и, значит, группа A p-нильпотентна; противоречие. Если $|A_p| > p$, то по лемме 2.1(1) A удовлетворяет условиям теоремы. Тем самым из минимальности G следует, что A p-нильпотентна; противоречие. Следовательно, можно утверждать, что $G = A = P \rtimes Q$. По теореме IV5.4 из [5] $G = p^a q^b$ и группа Q циклическая. Если $p < q$, то группа G p-нильпотентна по теореме 3; противоречие. Если $p < q$, то в силу теоремы 4 группа G p-сверхразрешима и потому сверхразрешима. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G порядка p. По предположению L $\mathscr{M}$-добавляема в G. Так как всякая собственная подгруппа в G нильпотентна, G p-нильпотентна; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

Лемма 2.8. *Пусть p — простой делитель $|G|$ и H — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу P группы G. Тогда G p-нильпотентна, если и только если H $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что утверждение неверно и G — контрпример наименьшего порядка. Подгруппа P не является абелевой силовской подгруппой, иначе $N_G(P) = C_G(P)$, поскольку $N_G(P)/C_G(P)$ — p-группа. Поэтому G — p-нильпотентная группа по теорема Бернсайда; противоречие.

Пусть P — силовская p-подгруппа в H, и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — все максимальные подгруппы в P. Так как H p-нильпотентна, H содержит максимальную подгруппу $H_i = P_i H_{p'}$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. По предположению существует подгруппа B в G такая, что $G = HB$ и $H_i B < G$ для всякой максимальной подгруппы H_i в H. По лемме 2.2 $|G : H_i B| = |H : H_i| = p$, и тогда группа $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_p по лемме 2.4. Если $(H_iB)_G = 1$ для некоторого i, то $|G_p| = p$; противоречие. Поэтому $(H_iB)_G \neq 1$ для всех $(H_iB)_G$. Ясно, что $P \cap (H_iB)_G = P_i$, тем самым

$$P \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n}(H_iB)_G\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(P \cap (H_iB)_G) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i = \Phi(P).$$

Если $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(H_iB)_G = 1$, то $\Phi(P) = 1$; противоречие. Поэтому группа $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(H_iB)_G$ p-нильпотентна по теореме Тейта. Пусть S — нормальная холлова p'-подгруппа. Если $s \neq 1$, то G/S удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности G следует, что G/S — p-нильпотентна и потому G тоже p-нильпотентна. Поэтому $\bigcap\limits_{i=1}^{n}(H_iB)_G = \Phi(P)$ и, следовательно, G p-нильпотентна; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 5. Допустим, что утверждение неверно и G — контрпример наименьшего порядка. Прежде всего получаем, что $2 \mid |G|$ и $3 \mid |G|$ по теоремам 3.3 и 3.5 из [5]. Если $5 \nmid |G|$, то каждый композиционный фактор группы G является $5'$-группой; противоречие. Поэтому $15 \mid |G|$. Пусть T — подгруппа группы H такая, что $|T| = |D|$. Если $D_p = P$, то в силу леммы 2.8 каждый композиционный фактор группы G является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой или изоморфен A_5; противоречие. Поэтому можно утверждать, что $|H : D| \neq 1$.

По условию теоремы существует подгруппа B группы G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы T_i в T со свойством $|T : T_i| = 5$. Далее, по леммам 2.2 и 2.4 $|G : T_iB| = |T : T_i| = 5$ и группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_5. Если $(T_iB)_G = 1$ для некоторого i, то G изоморфна подгруппе симметрической группы S_5. Поэтому $|G|$ равен 120 или 60 в силу структуры S_5. Значит, каждый композиционный фактор группы G есть 2-подгруппа или изоморфен A_5; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $(T_iB)_G \neq 1$ для каждого i.

Если $H(T_iB)_G < G$ для некоторого i, то $H(T_iB)_G$ удовлетворяет условиям теоремы по лемме 2.1. Поэтому каждый композиционный фактор группы $H(T_iB)_G$ циклический порядка 5 или является $5'$-подгруппой, или изоморфен A_5, поэтому $(T_iB)_G$, так как $1 < (T_iB)_G \trianglelefteq H(T_iB)_G$. В силу структуры группы S_5 каждый композиционный фактор группы G является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой, или изоморфен A_5; противоречие.

Стало быть, можно утверждать, что $H(T_iB)_G = G$. Так как H 5-нильпотентна, группа $G/(T_iB)_G$ 5-нильпотентна, поэтому $|G/(T_iB)_G| = 5$ в силу структуры S_5, т. е. $T_iB = (T_iB)_G \trianglelefteq G$ для каждой подгруппы T_i в T со свойством $|T : T_i| = 5$. Пусть $P_1 = P \cap T_iB$. Тогда P_1 — силовская подгруппа группы T_iB, а также максимальная подгруппа в P. Тем самым $H_1 = P_1H_{5'}$ — 5-нильпотентная подгруппа в T_iB, содержащая силовскую 5-подгруппу группы T_iB.

Если $|H : D| = 5$, то по лемме 2.1(1) H_1 $\mathscr{M}_p$-добавляема в T_iB. Поэтому по лемме 2.6 T_iB удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, является композиционным фактором группы G; противоречие. Если $|H : D| > 5$, то T_iB удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому каждый композиционный фактор группы T_iB является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой или изоморфен A_5 и является композиционным фактором группы G; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

Доказательство теоремы 7. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что утверждение неверно и G — контрпример наименьшего порядка. Получим противоречие из следующих шагов.

Шаг 1. $O_{p'}(G) = 1$.

Допустим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $G/O_{p'}(G)$. По леммам 2.1(3) и 2.5 $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы, и из минимальности выбора G следует, что группа $G/O_{p'}(G)$ p-нильпотентна. Поэтому группа G p-нильпотентна; противоречие. Значит, $O_{p'}(G) = 1$.

Шаг 2. G не является неабелевой простой группой.

Пусть T — подгруппа группы H такая, что $|T| = |D|$. По предположению существует подгруппа B в G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для каждой максимальной подгруппы T_i в H такой, что $|T : T_i| = p$. Из леммы 2.2 следует, что $|G : T_iB| = |T : T_i| = p$. Поэтому группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_p. Если $(T_iB)_G = 1$ для некоторого i, то G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p; противоречие.

Шаг 3. $|D_p| \neq |P| > p$ и $|D_p| \neq p$.

Если $|D_p| = |P|$, то G p-нильпотентна по лемме 2.8; противоречие. Если $|P| = p$, то $|D_p| = |P|$ в силу выбора D; противоречие. Если $|D_p| = p$, то всякая подгруппа T в H со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G и $|T_p| = p$. Поэтому G p-нильпотентна по лемме 2.7; противоречие.

Шаг 4. $O_p(G) \neq 1$.

Пусть $O_p(G) = 1$. В силу шага 2 в G имеется минимальная нормальная подгруппа, скажем L. Рассмотрим LH. Если $LH < G$, то всякая подгруппа T группы H такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в LH по лемме 2.1(1). Кроме того,

$$N_{LH}(T_p)/C_{LH}(T_p) \cong (N_G(T_p) \cap LH)C_G(T_p)/C_G(T_p) \leq N_G(T_p)/C_G(T_p)$$

— p-группа. Поэтому группа LH удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности группы G следует, что группа LH p-нильпотентна и L также p-нильпотентна. Из шага 1 вытекает, что $1 \neq L \leq O_p(G)$; противоречие. Поэтому можно утверждать, что $LH = G$ для всякой минимальной нормальной подгруппы L в G. Тогда $G/L = LH/L \cong H/H \cap L$ p-нильпотентна. Стало быть, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $L \nleq \Phi(G)$.

Пусть T — подгруппа группы H такая, что $|T| = |D|$. По условию существует подгруппа B группы G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы T_i группы T. В силу леммы 2.2 $|G : T_iB| = |T : T_i| = p$, и потому группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы S_p по лемме 2.4. Если существует $(T_iB)_G$ такая, что $(T_iB)_G = 1$, то $G \hookrightarrow S_p$, поэтому $|P| = p$, что противоречит шагу 3. Тем самым можно утверждать, что $(T_iB)_G \neq 1$ и $L \leq (T_iB)_G$ для каждой T_iB. Если $|H : D| = p$, то положим $N = (T_iB)_p$. Ясно, что N — максимальная подгруппа группы P и $NH_{p'}$ — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую подгруппу N группы T_iB. В силу леммы 2.1(1) группа $NH_{p'}$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в T_iB. Кроме того,

$$N_{T_iB}(N)/C_{T_iB}(N) \cong (N_G(N) \cap T_iB)C_G(N)/C_G(N) \leq N_G(N)/C_G(N)$$

— p-группа. Поэтому из леммы 2.8 следует, что T_iB p-нильпотентна и, значит, L тоже p-нильпотентна. В силу шага 1 L — p-группа и $O_p(G) \neq 1$; противоречие. Следовательно, можно утверждать, что $|H : D| > p$. Пусть $X = H \cap T_iB$. Тогда

$$|G : T_iB| = |HT_iB : T_iB| = |H : H \cap T_iB| = |H : X| = p.$$

Если $X = 1$, то $|P| = p$, что противоречит шагу 3. Поэтому $X \neq 1$, $|D| < |X|$ и X — p-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p-подгруппу группы T_iB. Кроме того, по предположению и лемме 2.1(1) каждая подгруппа S группы X со свойством $|S| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в T_iB. С другой стороны,

$$N_{T_iB}(S_p)/C_{T_iB}(S_p) \cong (N_G(S_p) \cap T_iB)C_G(S_p)/C_G(S_p) \leq N_G(S_p)/C_G(S_p)$$

— p-группа. Из минимальности G следует, что T_iB p-нильпотентна и L тоже нильпотентна. Из шага 1 следует, что $1 \neq L \leq O_p(G)$; противоречие.

Шаг 5. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $O_p(G)$. Тогда $|D_p| > |N|$.

Если $|D_p| = |N|$, то в силу предположения $T = NH_{p'}$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в G. Существует подгруппа B в G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы T_i группы T такой, что $|T : T_i| = p$. Очевидно, что $N \cap T_iB = 1$. По лемме 2.2 $p = |G : T_iB| = |NT_iB : T_iB| = |N|$. Поэтому $|D_p| = |N| = p$, что противоречит шагу 3. Если $|D_p| < |N|$, то выберем собственную подгруппу L в N такую, что $|D_p| = |L|$. Пусть $T = LH_{p'}$. По предположению существует подгруппа B группы G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы T_i в T со свойством $|T : T_i| = p$. Ясно, что $G = N(T_iB) = L(T_iB)$ и $N \cap T_iB = 1$. Поэтому $|N(T_iB)| = |L(T_iB)|$ и, значит, $|N||(T_iB)| = |L||(T_iB)|$, т. е. $|N| = |L|$; противоречие.

Шаг 6. Группа G/N p-нильпотентна, где N — минимальная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в $O_p(G)$.

В силу шага 5 $|D_p| > |N|$ и потому всякая подгруппа T/N $\mathscr{M}_p$-добавляема в G/N по лемме 2.1(2). С другой стороны, $C_G(T_p)N/N \leq C_{G/N}(T_p/N)$, стало быть,

$$|N_{G/N}(T_p/N)/C_{G/N}(T_p/N)| \leq |(N_G(T_p)/N)/(C_G(T_p)N/N)|.$$

Так как

$$(N_G(T_p)/N)/(C_G(T_p)N/N) \cong N_G(T_p)/C_G(T_p)N \cong (N_G(T_p)/C_G(T_p))/(C_G(T_p)N/C_G(T_p)),$$

то $N_{G/N}(T_p/N)/C_{G/N}(T_p/N)$ — p-группа. Тем самым G/N удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности G следует, что группа G/N p-нильпотентна, поэтому $O_p(G) = N$.

Шаг 7. Итоговое противоречие.

В силу шага 6 получаем, что группа G p-разрешима, откуда $C_G(N) = N$ по шагу 1 и лемме 2.4. Так как $|N| < |D_p|$, выберем подгруппу T в H такую, что $N < T_p$ и $|T| = |D|$. Тогда в силу предположения существует подгруппа B в G такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для любой максимальной подгруппы T_i в T со свойством $|T : T_i| = p$. Поскольку $N \nleq \Phi(G)$, то $N \nleq \Phi(T_p)$ и существует максимальная подгруппа S в T_p такая, что $T_p = NS$. Пусть $T_1 = ST_{p'}$. Имеем $p = |G : T_1B| = |NT_1B : T_1B|$ по лемме 2.2, т. е. $|N| = p$. Ясно, что $G/C_G(N) = G/N \hookrightarrow \mathrm{Aut}(N)$. Поэтому $P \leq C_G(N) = N$, что противоречит шагу 3.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение статьи и предложения, улучшившие оригинальную версию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Beijing; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; New York: Springer-Verl., 1967.
4. *Монахов В. С., Шныпарков А. В.* О p-сверхразрешимости конечной группы с μ-добавляемой силовской p-подгруппой // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 858–865.
5. *Tang J., Miao L.* On $\mathscr{M}_p$-supplemented subgroups of finite groups // Commun. Algebra. 2013. V. 41, N 5. P. 1913–1922.
6. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 3. P. 198–200.
7. *Arad Z., Ward M. B.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. V. 77. P. 234–246.
8. *Chen Z.* Inner outer Σ-group and minimal non-Σ-group. Chongqing: Westsouth Normal Univ. Press, 1988.
9. *Xu M.* An introduction to finite groups. Beijing: Sci. Press, 1999. (in Chinese).

Статья поступила 26 января 2015 г.

Baijun Gao (Байцзюнь Гао), Long Miao (Мяо Лун)
School of Mathematical Sciences, Yangzhou University,
Yangzhou 225002, People's Republic of China
lmiao@yzu.edu.cn

Juping Tang (Тан Цзюйпин)
Wuxi Institute of Technology,
Wuxi 214121, People's Republic of China