

УДК 517.977

О СУБРИМАНОВОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГУРСА

С. В. Агапов

Аннотация. Рассматривается субриманов геодезический поток для распределения Гурса. Найдены поверхности уровня первых интегралов, находящихся в инволюции. Изучены траектории в фазовом пространстве, проекции которых на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.101

Ключевые слова: оптимальное управление, субриманова геометрия, распределение Гурса, геодезический поток.

1. Введение

В работе изучается субриманова задача на группе Гурса. Отвечающая этой задаче гамильтонова система вполне интегрируема. Найдены поверхности уровня первых интегралов, находящихся в инволюции. Кроме того, показано существование экстремальных траекторий, проекции которых на горизонтальную плоскость являются замкнутыми кривыми. Такие траектории интересны тем, что они отвечают движению вдоль «запрещенных» направлений.

Распределение Гурса двумерных плоскостей Δ в \mathbb{R}^n задается векторными полями $f_1(q) = (1, 0, -x_2, \dots, -x_{n-1})$ и $f_2(q) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Определим скалярное произведение в Δ таким образом, чтобы векторы $f_1(q)$, $f_2(q)$ образовывали ортонормированный базис. Так как векторные поля $f_1(q), \dots, f_n(q)$, где $f_k = [f_1, f_{k-1}] = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (1 на k -м месте), $3 \leq k \leq n$, линейно независимы и порождают все \mathbb{R}^n , по теореме Рашевского — Чоу (см. [1]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить кусочно гладкой траекторией системы

$$\dot{q} = u_1 f_1(q) + u_2 f_2(q), \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

при этом $|\dot{q}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Векторные поля $f_1(q), \dots, f_n(q)$ порождают n -мерную нильпотентную алгебру Ли со следующими коммутационными соотношениями:

$$[f_1, f_{k-1}] = f_k, \quad 3 \leq k \leq n, \quad [f_1, f_n] = [f_i, f_j] = 0, \quad 2 \leq i, j \leq n.$$

Эта алгебра Ли называется *алгеброй Гурса*, а отвечающая ей группа Ли на \mathbb{R}^n — *группой Гурса*. При этом $f_1(q), \dots, f_n(q)$ являются левоинвариантными векторными полями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00124-а).

По теореме Филиппова (см. [1]) любые две точки $q_0, q_1 \in \mathbb{R}^n$ можно соединить траекторией системы (1) минимальной длины, т. е. такой траекторией, на которой достигается минимум функционала

$$l = \int_0^T |\dot{q}| dt, \quad (2)$$

где $q(0) = q_0$, $q(T) = q_1$. Такие траектории называются *оптимальными*. Легко показать, что задача минимизации функционала (2) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J = \int_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt. \quad (3)$$

Рассматриваемая задача оптимального управления (1), (2) играет важную роль в робототехнике; в частности, она описывает движение машины с прицепами на плоскости (см. [2]).

Для исследования оптимальных траекторий для функционала (3) воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. [3]). Он заключается в следующем. Если $q(t)$ — оптимальная траектория, то существует такой ковектор $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, что для гамильтониана

$$H(p, q, u) = \langle p, u_1 f_1 + u_2 f_2 \rangle - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}, \quad (4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, выполнено

$$H(p(t), q(t), u(t)) = \max_{\tilde{u} \in \mathbb{R}^2} H(p(t), q(t), \tilde{u}) \quad (5)$$

и, кроме того,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Гамильтоновы системы такого вида, отвечающие субримановой задаче на других группах Ли, изучались, например, в [4–6].

В [7] показано, что решения системы (6) (экстремальные траектории) при $n = 4$ (случай распределения Энгеля) находятся в терминах эллиптических функций. Кроме того, в [7] установлено существование таких экстремальных траекторий, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 являются замкнутыми кривыми либо без самопересечений, либо с одним самопересечением. В [8] доказано, что в общем случае экстремальные траектории распределения Гурса выражаются через гиперэллиптические интегралы.

Гамильтонова система (6) вполне интегрируема (см., например, [8]). Для дальнейшего нам понадобятся ее первые интегралы.

Теорема 1. *Гамильтонова система (6), отвечающая задаче (1), (3), обладает следующими первыми интегралами:*

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - \dots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2),$$

$$F_2 = p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \dots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \dots,$$

$$F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1}x_1 - F_n \frac{x_1^2}{2!}, \quad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \quad F_n = p_n.$$

Интегралы F_i , $i = 1, \dots, n$, почти всюду функционально независимы и находятся в инволюции:

$$\{F_k, F_s\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} - \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial F_s}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Объясним, как устроены поверхности уровней интегралов F_i . Введем отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(x, p) = (F_1(x, p), \dots, F_n(x, p))$.

Теорема 2. Если $C \in \mathbb{R}^n$ — регулярное значение отображения φ , то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо двум экземплярам \mathbb{R}^n , либо s_1 непересекающимся цилиндрам $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $0 \leq s_1 \leq n - 2$.

Если C — критическое значение φ , то $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно либо \mathbb{R}^n , либо объединению $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$, $k \leq n - 2$. Здесь Γ_j гомеоморфны либо \mathbb{R}^{n-1} , либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ — окружность или замкнутая кривая с s самопересечениями (см. ниже).

Система (6) допускает траектории, для которых $x_1(t)$, $x_2(t)$ — периодические функции, а их проекции на плоскость Ox_1x_2 — замкнутые кривые.

Теорема 3. Среди решений системы (6) найдутся такие, что их проекции на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые кривые, симметричные относительно оси Ox_1 .

Поиск траекторий такого вида мотивирован тем, что они отвечают движению вдоль запрещенных направлений, эта проблема естественным образом возникает в различных прикладных задачах, о которых сказано выше.

Автор выражает благодарность А. А. Аграчеву за постановку задачи, а также А. А. Аграчеву и А. Е. Миронову за полезные обсуждения.

2. Доказательства теорем 1–3

Из (5) следует, что $H_{u_1} = H_{u_2} = 0$, т. е. $u_1 = \langle p, f_1 \rangle$, $u_2 = \langle p, f_2 \rangle$. Поэтому

$$H(q, p) = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} = \frac{\langle p, f_1 \rangle^2 + \langle p, f_2 \rangle^2}{2} = \frac{1}{2} ((p_1 - x_2 p_3 - \dots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2).$$

Уравнения (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1 - x_2 p_3 - \dots - x_{n-1} p_n, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{x}_3 = -x_2 \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n = -x_{n-1} \dot{x}_1, \\ \dot{p}_1 &= 0, \quad \dot{p}_2 = p_3 \dot{x}_1, \dots, \dot{p}_{n-1} = p_n \dot{x}_1, \quad \dot{p}_n = 0. \end{aligned}$$

Введем вдоль траектории новый параметр $s(t)$ такой, что $\dot{s} = u_1$, тогда $s(t) = x_1(t)$. Уравнения на импульсы переписуются в следующем виде:

$$p'_1 = 0, \quad p'_2 = p_3, \dots, p'_{n-1} = p_n, \quad p'_n = 0,$$

где $p'_i = \frac{dp_i}{ds}$, $i = 1, \dots, n$. Теперь первые интегралы легко находятся:

$$\begin{aligned} F_n &= p_n, \quad F_{n-1} = p_{n-1} - F_n x_1, \quad F_{n-2} = p_{n-2} - F_{n-1} x_1 - F_n \frac{x_1^2}{2!}, \dots, \\ F_2 &= p_2 - F_3 x_1 - F_4 \frac{x_1^2}{2!} - \dots - F_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

$$F_1 = H = \frac{1}{2}((p_1 - x_2 p_3 - \dots - x_{n-1} p_n)^2 + p_2^2).$$

Заметим, что $F_j = F_j(x_1, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n)$, $1 < j < n$, поэтому все F_j почти всюду функционально независимы и находятся попарно в инволюции. Таким образом, исходная система интегрируема по Лиувиллю. Теорема 1 доказана.

Пусть $(x_1, \dots, x_n, P_1, \dots, P_n)$ — новые координаты в фазовом пространстве, где P_i определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 - x_2 p_3 - x_3 p_4 - \dots - x_{n-1} p_n, & P_n &= p_n, \\ P_{n-1} &= p_{n-1} - P_n x_1, & P_{n-2} &= p_{n-2} - P_{n-1} x_1 - P_n \frac{x_1^2}{2!}, \dots, \\ P_3 &= p_3 - P_4 x_1 - P_5 \frac{x_1^2}{2!} - \dots - P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!}, & P_2 &= p_2. \end{aligned}$$

Заметим, что новые координаты не канонические. Уравнения (6) в новых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_1, \quad \dot{x}_2 = P_2, \quad \dot{x}_3 = -x_2 P_1, \dots, \dot{x}_n = -x_{n-1} P_1, \\ \dot{P}_1 &= -P_2 \left(P_3 + P_4 x_1 + \dots + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!} \right), \quad \dot{P}_2 = P_1 \left(P_3 + P_4 x_1 + \dots + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!} \right), \\ \dot{P}_3 &= 0, \dots, \dot{P}_n = 0. \end{aligned}$$

В новых координатах первые интегралы принимают вид

$$F_1 = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2), \quad F_2 = P_2 - P_3 x_1 - \dots - P_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \quad F_3 = P_3, \dots, F_n = P_n.$$

Выпишем матрицу Якоби $J_{n \times 2n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial P} \right)$ отображения φ в новых координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ w_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -x_1 & -\frac{x_1^2}{2!} & \dots & -\frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_1 & P_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $w_0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -(P_3 + P_4 x_1 + \dots + P_n \frac{x_1^{n-3}}{(n-3)!})$.

Если $P_1 \neq 0$, то ранг матрицы максимален и равен n . Ранг $J_{n \times 2n}$ равняется $n-1$ только в следующих случаях: $P_1 = 0, P_2 = 0$ либо $P_1 = w_0 = 0, P_2 \neq 0$.

Зафиксируем значения первых интегралов: $F_k = C_k, 1 \leq k \leq n$. Тогда

$$P_1^2 + P_2^2 = 2C_1, \tag{7}$$

$$P_2 = C_2 + C_3 x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \tag{8}$$

при этом $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Таким образом, поверхности уровней первых интегралов определяются пересечением двух цилиндров в \mathbb{R}^3 , заданных уравнениями (7) и (8).

Рассмотрим сначала случай, когда $C_3 = \dots = C_n = 0$. Тогда уравнение (8) принимает вид $P_2 = C_2$. Из (7) получаем $P_1 = \pm \sqrt{2C_1 - C_2^2}$. Если $|C_2| < \sqrt{2C_1}$,

то ранг отображения φ равен n и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно двум экземплярам \mathbb{R}^n . Если $|C_2| = \sqrt{2C_1}$, то ранг φ равен $n - 1$ и $\varphi^{-1}(C)$ гомеоморфно \mathbb{R}^n .

Далее предположим, что найдется такое k , $3 \leq k \leq n$, что $C_k \neq 0$. В этом случае пересечение двух цилиндров, заданных в \mathbb{R}^3 уравнениями (7) и (8), состоит из замкнутых кривых, симметричных относительно плоскости OP_2x_1 , и точек их касания.

В регулярном случае, когда в пересечении цилиндров лежат s_1 непересекающихся кривых, гомеоморфных окружностям, где $1 \leq s_1 \leq n - 2$, поверхности уровня устроены как объединение цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. На рис. 1 изображены цилиндры, заданные уравнениями (7), (8), которые пересекаются по двум окружностям, т. е. поверхности уровня первых интегралов в этом случае устроены как объединение двух экземпляров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

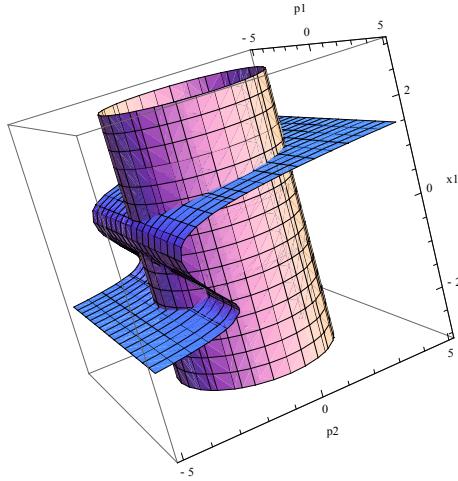


Рис. 1. Пересечение цилиндров, отвечающее регулярному значению интегралов.

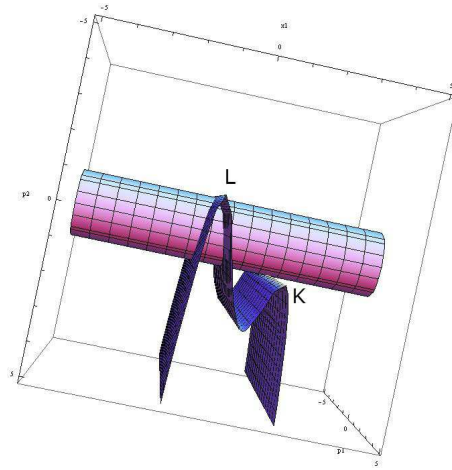


Рис. 2. Пересечение цилиндров, отвечающее критическому значению интегралов.

Критические уровни первых интегралов отвечают точкам касания цилиндров, их число не превосходит $n - 3$; в этом случае поверхности устроены как объединение $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_s$, $1 \leq s \leq n - 2$, где Γ_j гомеоморфны либо \mathbb{R}^{n-1} (этот случай отвечает изолированной точке касания цилиндров), либо $\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma$, где γ либо окружность, либо замкнутая кривая с s_2 самопересечениями, $1 \leq s_2 \leq n - 3$. На рис. 2 изображены два цилиндра, которые касаются в изолированной точке K и пересекаются по двум соприкасающимся в точке L окружностям, т. е. поверхности уровня в этом случае устроены как $\mathbb{R}^{n-1} \cup (\mathbb{R}^{n-1} \times \gamma)$, где γ — замкнутая кривая с одним самопересечением. Теорема 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Нас интересуют такие траектории, для которых $x_1(t)$, $x_2(t)$ — периодические функции. Если $x_1(t)$ — периодическая функция (см. ниже), то из уравнений $\dot{x}_1 = P_1$, $P_2 = C_2 + C_3x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}$ следует, что $P_1(t)$ и $P_2(t)$ также периодические. С учетом $\dot{x}_2 = P_2$ и $2H = (\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 = 2C_1$ имеем

$$\dot{x}_2 = C_2 + C_3x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}, \quad (9)$$

$$(\dot{x}_1)^2 = 2C_1 - \left(C_2 + C_3x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!} \right)^2. \quad (10)$$

Введем обозначения $Q_{n-2}(x_1) = C_2 + C_3x_1 + \dots + C_n \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!}$, $f(x_1) = 2C_1 - Q_{n-2}^2(x_1)$, тогда уравнения (9), (10) примут вид

$$(\dot{x}_1)^2 = f(x_1), \quad \dot{x}_2 = Q_{n-2}(x_1). \quad (11)$$

Пусть α_i — вещественные корни уравнения $Q_{n-2}(x_1) = 0$, а β_j — вещественные корни уравнения $f(x_1) = 0$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Заметим, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} f(x_1) = -\infty.$$

С другой стороны, $f(\alpha_i) = 2C_1 > 0$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому каждый корень α_i расположен внутри некоторого отрезка $[\beta_j, \beta_{j+1}]$, на котором $f(x_1) \geq 0$. На рис. 3 дан пример взаимного расположения корней уравнений $f(x_1) = 0$, $Q_{n-2}(x_1) = 0$, на рис. 4 изображена проекция траектории, отвечающей случаю, показанному на рис. 3, на плоскость Ox_1x_2 .

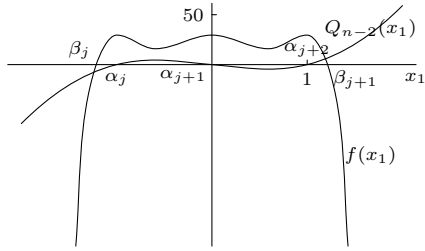


Рис. 3.

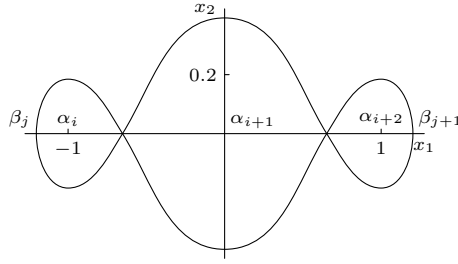


Рис. 4.

Любому такому отрезку $[\beta_j, \beta_{j+1}]$ отвечают периодические решения $x_1(t)$ с некоторым периодом τ . Предположим, что $x_1(0) = \beta_j$. Тогда $x_1(\frac{\tau}{2}) = \beta_{j+1}$, $x_1(\tau) = x_1(0) = \beta_j$. В силу (11) имеем

$$\begin{aligned} dx_1 &= \sqrt{f(x_1)} dt, & dx_2 &= Q_{n-2}(x_1) dt, & t &\in [0, \tau/2], \\ dx_1 &= -\sqrt{f(x_1)} dt, & dx_2 &= Q_{n-2}(x_1) dt, & t &\in [\tau/2, \tau]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$dx_2 = \pm \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}} dx_1. \quad (12)$$

Таким образом, $x_2(t)$ — периодическая функция тогда и только тогда, когда следующий интеграл обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau Q_{n-2}(x_1) dt &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} Q_{n-2}(x_1) dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^\tau Q_{n-2}(x_1) dt \\ &= \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}} dx_1 + \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{-\sqrt{f(x_1)}} dx_1 = 2 \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{Q_{n-2}(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}} dx_1 = 0. \end{aligned}$$

Выберем константы C_2, \dots, C_n так, чтобы полином $Q_{n-2}(x_1)$ имел вид

$$Q_{n-2}(x_1) = x_1(x_1^2 - \alpha_1^2) \dots (x_1^2 - \alpha_k^2).$$

Тогда последнее равенство автоматически выполнено. Положим $x_2(x_1)|_{x_1=\beta_j} = 0$. Тогда траектория будет симметричной относительно оси Ox_1 в плоскости Ox_1x_2 . Теорема 3 доказана.

В заключение приведем примеры траекторий, отвечающих различным значениям констант C_j , проекции которых на плоскость Ox_1x_2 образуют замкнутые симметричные кривые с различным числом самопересечений (рис. 5–8). Они были получены численным интегрированием уравнения (12).

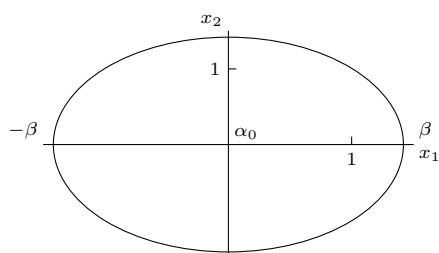


Рис. 5. $Q(x_1)=x_1, C_1=1$.

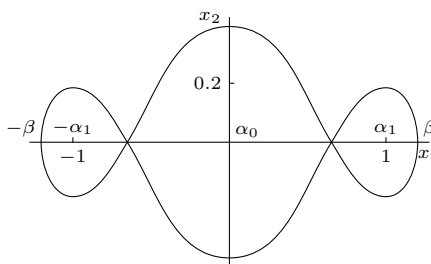


Рис. 6. $Q(x_1)=10x_1(x_1^2-1), C_1=15$.

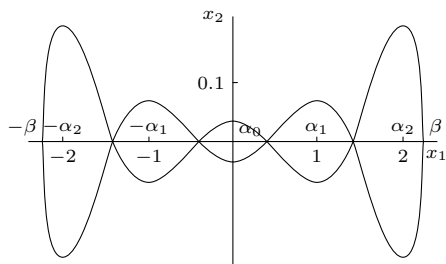


Рис. 7. $Q(x_1)=x_1(x_1^2-1)(x_1^2-4), C_1=42$.

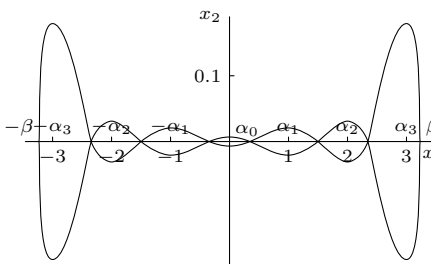


Рис. 8. $Q(x_1)=x_1(x_1^2-1)(x_1^2-4)(x_1^2-9), C_1=40000$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
2. *Robot motion planning and control* (ed. J. P. Laumond). Springer-Verl.: Berlin; Heidelberg, 1998.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
4. Taimanov I. A. Integrable geodesic flows of nonholonomic metrics // *J. Dyn. Control Syst.* 2003. V. 3, N 1. P. 129–147.
5. Мажитова А. Д. Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // *Мат. труды.* 2012. Т. 15, № 1. С. 120–128.
6. Сачков Ю. Л. Теория управления на группах Ли // *Современная математика. Фундаментальные направления.* М.: ВИНТИ, 2007. Т. 26. С. 5–59. (Итоги науки и техники).
7. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // *Мат. сб.* 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
8. Anzaldo-Meneses A., Monroy-Perez F. Goursat distribution and sub-Riemannian structures // *J. Math. Phys.* 2003. V. 44, N 12. P. 6101–6111.

Статья поступила 30 декабря 2014 г.

Агапов Сергей Вадимович
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
 Новосибирский гос. университет,
 ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
 agapov.sergey.v@gmail.com