Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.988.6+517.96

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. Жуковский

Аннотация. В совместных работах Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, С. Е. Жуковского, Е. С. Жуковского исследована задача о липшицевых возмущениях условно накрывающих отображений метрических пространств. Здесь предлагается распространение понятия условного накрывания на векторные отображения, т. е. на отображения, действующие в произведениях метрических пространств. Идея заключается в использовании для описания таких отображений вместо константы накрывания матрицы, состоящей из коэффициентов накрывания компонент векторного отображения по соответствующим аргументам. Получено утверждение о сохранении свойства условного и «безусловного» векторного накрывания при липшицевых возмущениях; основным предположением является ограничение единицей спектрального радиуса произведения матриц накрывания и Липшица. В скалярном случае это предположение равносильно традиционному требованию, чтобы константа накрывания превышала константу Липшица. Доказанное утверждение может использоваться для исследования различных систем уравнений. В статье рассмотрены следующие приложения: получены утверждения о разрешимости систем операторных уравнений специального вида, возникающих в задачах о кратных точках совпадения и о кратных неподвижных точках; получены условия существования периодических решений одного конкретного неявного разностного уравнения.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.206

Ключевые слова: накрывающее отображение в произведениях метрических пространств, возмущение накрывающего отображения, разрешимость системы операторных уравнений.

Доказанный А. В. Арутюновым (см. [1, 2]) принцип точки совпадения отображений положил начало исследованиям накрывающих отображений метрических пространств. В [3] предложено понятие условного накрывания и доказаны теоремы о возмущениях, т. е. о накрывающих свойствах отображения вида $F(x) = \Upsilon(x, x)$, где Υ является условно или безусловно накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму; в [4, 5] получены уточнения теоремы о возмущениях и признаки накрывания оператора суперпозиции в пространствах измеримых функций. Эти результаты стали основой методов исследования различных классов уравнений. В работах [3–5] этими методами изучены вопросы существования и непрерывной зависимости от параметров решений неявных дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений. Применение подобных методов к исследованию систем уравнений (включая краевые задачи,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 15–11–10021).

системы управления, задачи о кратных точках совпадения и кратных неподвижных точках) требует получения утверждений о возмущениях для отображений, действующих в произведениях метрических пространств — векторных отображений. Простейший случай, когда каждая i-я компонента векторного отображения обладает свойством условного накрывания по одной i-й переменной, рассмотрен в [6, 7], полученные результаты применены к краевым задачам и системам управления. В данной работе рассмотрена общая ситуация, в которой компоненты отображения могут обладать свойством накрывания по любым аргументам, определен векторный аналог понятия условного накрывания и получена теорема о возмущениях. Эти результаты применены к исследованию систем уравнений, в частности, получены утверждения о разрешимости систем операторных уравнений специального вида, возникающих в задачах о кратных точках совпадения и о кратных неподвижных точках, и условия существования периодических решений одного конкретного неявного разностного уравнения. Задача о точках совпадения и неподвижных точках кратности 2 (так называемых «двойных точках») однозначных и многозначных отображений рассмотрена в [8].

1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначаем через $\mathbb{R}^m$ m-мерное вещественное пространство, через $\mathbb{R}^m_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, через I_m — единичную $(m \times m)$-матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geq r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}^m_+$; обозначаем через $\min\{r^1, r^2\}$ вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$, компоненты которого определяются формулой $r_j = \min\left\{r^1_j, r^2_j\right\}$, $j = \overline{1,m}$. Напомним, что норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ в $\mathbb{R}^m$ называют *монотонной*, если для $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m_+$, удовлетворяющих неравенству $r^1 \geq r^2$, выполнено $|r^1|_{\mathbb{R}^m} \geq |r^2|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть заданы метрические пространства (X, ρ_X), (Y, ρ_Y). Обозначим через $\mathrm{B}_X(u, r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x, u) \leq r\}$ с центром в точке $u \in X$ радиуса $r \geq 0$ в пространстве X.

Определение 1. Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим* [1], если для любых $r \geq 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r)),$$

и *условно α-накрывающим* [3], если

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \cap \Psi(X) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r)).$$

Здесь число α называют *коэффициентом накрывания*. Говорят, что отображение Ψ *накрывающее* (*условно накрывающее*), если существует такое $\alpha > 0$, что это отображение α-накрывающее (условно α-накрывающее).

Свойство α-накрывания равносильно соотношению

$$\forall u \in X \ \forall y \in Y \ \exists x \in X \ \Psi(x) = y \ \& \ \rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)), \tag{1}$$

а свойство условного α-накрывания — соотношению

$$\forall u \in X \ \forall y \in \Psi(X) \ \exists x \in X \ \Psi(x) = y \ \& \ \rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, \Psi(u)). \tag{2}$$

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Определим их произведения $\overline{X} = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{Y} = \prod\limits_{j=1}^{m} Y_j$ и рассмотрим отображение

$\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$. В приложениях результатов о накрывающих отображениях к системам уравнений (к которым сводятся, например, краевые задачи, задачи о периодических решениях дифференциальных и разностных уравнений, задачи управления) возникают трудности, связанные с определением и изучением накрывающих свойств векторного отображения Ψ. Чтобы исследовать систему уравнений с отображением Ψ методами [1, 2], следует метризовать произведения $\overline{X}, \overline{Y}$, затем сформулировать условия накрывания в полученных метрических пространствах этого отображения в терминах свойств его компонент по каждому аргументу. При этом если исследуемая система содержит еще и липшицево возмущение, то от выбранной метрики зависит соотношение между константами накрывания α и Липшица β. Данное обстоятельство важно, поскольку в утверждениях о возмущениях накрывающих отображений основным требованием является неравенство $\alpha > \beta$. В известных автору публикациях перечисленные проблемы не рассматривались.

Предлагаемый подход не требует введения метрик в произведениях метрических пространств. Вместо метрик в $\overline{X}, \overline{Y}$ используем векторы

$$\bar{\rho}_{\overline{X}} \doteq (\rho_{X_1}, \ldots, \rho_{X_n}), \quad \bar{\rho}_{\overline{Y}} \doteq (\rho_{Y_1}, \ldots, \rho_{Y_m}).$$

Это позволяет, не решая перечисленных проблем, исследовать разрешимость систем и получать покомпонентные оценки их решений. Важно, что даже если бы удалось определить нужные метрики в $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, то утверждения о накрывающих отображениях дали бы оценку расстояния от заданного вектора до решения, что, конечно, менее информативно, чем оценки расстояний между компонентами этих векторов.

Итак, сформулируем векторный аналог определения 1.

Для векторов $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w, r) \doteq \{y \in \overline{Y} : \bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, w) \le r\} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{B}_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично для $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, d) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{X_i}(u_i, d_i).$$

Определение 2. Пусть задана $(n \times m)$-матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно A-накрывающим*, если

$$\forall r \in \mathbb{R}^m_+ \ \forall u \in \overline{X} \ \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)), \tag{3}$$

и *векторно условно A-накрывающим*, если

$$\forall r \in \mathbb{R}^m_+ \ \forall u \in \overline{X} \ \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \cap \Psi(\overline{X}) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)). \tag{4}$$

Здесь A будем называть *матрицей накрывания*. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно накрывающим* (*векторно условно накрывающим*), если существует матрица A с неотрицательными компонентами, для которой справедливо соотношение (3) (соответственно (4)).

Очевидно, что в случае $n = m = 1$ определения 1, 2 равносильны: всякое векторно (условно) A-накрывающее отображение является (условно) α-накрывающим и любое (условно) α-накрывающее отображение является векторно (условно) A-накрывающим, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

Иногда, когда надо будет подчеркнуть, что речь идет о накрывании, а не об условном накрывании, соответствующее отображение будем называть, следуя [3], *безусловно накрывающим.*

Приведем некоторые свойства векторно накрывающих отображений, прямо следующие из определения 2.

Свойство 1. *Отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *векторно* A*-накрывающее тогда и только тогда, когда оно сюръективное и векторно условно* A*-накрывающее.*

Свойство 2. *Отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *векторно* A*-накрывающее тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{X}\ \forall y \in \overline{Y}\ \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x,u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)), \tag{5}$$

и векторно условно A*-накрывающее тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{X}\ \forall y \in \Psi(\overline{X})\ \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x,u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \tag{6}$$

Свойство 3. *Пусть отображения* $\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Y}$ *и* $\Psi_2 : \overline{Y} \to \overline{Z}$ *являются соответственно векторно* A_1*- и* A_2*-накрывающими (здесь* $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ *— произведения метрических пространств). Тогда композиция* $\Psi_2\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Z}$ *есть векторно* A_1A_2*-накрывающее отображение.*

Свойство 4. *Пусть отображение* $\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Y}$ *векторно* A_1*-накрывающее, а отображение* $\Psi_2 : \overline{Y} \to \overline{Z}$ *векторно условно* A_2*-накрывающее. Тогда композиция* $\Psi_2\Psi_1 : \overline{X} \to \overline{Z}$ *есть векторно условно* A_1A_2*-накрывающее отображение.*

В свойстве 4 нельзя ослабить требование безусловного накрывания Ψ_1, заменив его условным накрыванием, что иллюстрирует следующий пример скалярных отображений.

Пример 1. Пусть на множествах $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $Z = \{0, 1\}$ задана «обычная» метрика $\rho(u, v) = |u - v|$; определим отображения $\Psi_1 : X \to X$, $\Psi_2 : X \to Z$ соотношениями $\Psi_1(i) = 2i$ при $i \neq 0$, $\Psi_1(0) = 1$; $\Psi_2(2i) = 0$, $\Psi_2(2i + 1) = 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда отображение Ψ_1 является условно 1-накрывающим, Ψ_2 — безусловно 1-накрывающим, а их композиция — отображение $\Psi_2\Psi_1(i) = 0$ при $i \neq 0$, $\Psi_2\Psi_1(0) = 1$ — не обладает свойством условного накрывания.

Приведем утверждение, описывающее связь между свойствами накрывания и векторного накрывания отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$. Зададим произвольные монотонные нормы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и определим метрики в произведениях $\overline{X}, \overline{Y}$ равенствами

$$\begin{gathered}\rho_{\overline{X}}(x,u) = |\bar{\rho}_{\overline{X}}(x,u)|_{\mathbb{R}^n} = |(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n))|_{\mathbb{R}^n},\\ \rho_{\overline{Y}}(y,w) = |\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y,w)|_{\mathbb{R}^m} = |(\rho_{Y_1}(y_1,w_1), \ldots, \rho_{Y_m}(y_m,w_m))|_{\mathbb{R}^m}.\end{gathered} \tag{7}$$

Свойство 5. *Если отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *векторно (условно) накрывающее, то при любом определении монотонных норм в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *и соответствующем определении (7) метрик в* $\overline{X}$, $\overline{Y}$ *это отображение будет (условно) накрывающим.*

Если относительно некоторых метрик (7) отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *(условно) накрывающее, то это отображение будет векторно (условно) накрывающим.*

Первое утверждение прямо следует из соотношений (5), (6):

$$\begin{aligned}\rho_{\overline{X}}(x,u) = |\bar{\rho}_{\overline{X}}(x,u)|_{\mathbb{R}^n} \leq |A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y,\Psi(u))|_{\mathbb{R}^n} \leq \|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n} |\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y,\Psi(u))|_{\mathbb{R}^m}&\\ = \|A\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n} \rho_{\overline{Y}}(y,\Psi(u)).&\end{aligned}$$

В данном случае $\alpha = \|A\|_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n}{}^{-1}$ (можно, конечно, выбрать и любое $\alpha < \|A\|_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n}{}^{-1}$).

Для доказательства второго утверждения сначала заметим, что все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, следовательно, свойство (условного) накрывания инвариантно относительно норм пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, используемых для определения метрик формулами (7). Это позволяет выбрать, например, $|d|_{\mathbb{R}^n} = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |d_i|$, $|r|_{\mathbb{R}^m} = \sum\limits_{j=1}^{m} |r_j|$. Теперь из соотношений (1) или (2) получаем $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \rho_{X_i}(x_i,u_i) \le \alpha^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_{Y_j}(y_j,\Psi_j(u))$. Таким образом, компоненты матрицы A можно принять равными $a_{ij} = \alpha^{-1}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Хотя, как следует из доказанного свойства 5, векторное накрывание равносильно «классическому», матрица A дает, очевидно, больше информации о накрывающих свойствах отображения $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$, чем число $\alpha = \|A\|_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n}{}^{-1}$.

Приведем примеры векторно условно и безусловно накрывающих отображений.

Пример 2. Пусть каждое отображение $\psi_i : X_i \to Y_i$, $i=\overline{1,n}$, (условно) α_i-накрывающее. Тогда определяемое формулой $H(x) = (\psi_1(x_1),\ldots,\ \psi_n(x_n))$ отображение $H : \overline{X} \to \overline{Y}$ векторно (условно) накрывающее с матрицей

$$A = \operatorname{diag}\left\{\alpha_1^{-1},\ldots,\alpha_n^{-1}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{-1} & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Такие отображения исследованы в [6, 7].

Пример 3. Покажем, что любое линейное отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является условно векторно накрывающим.

Нулевое отображение, очевидно, условно векторно A-накрывающее (причем с любой $(n\times m)$-матрицей A).

Пусть отображение G ненулевое. Будем считать отображение G действующим в свой образ, тогда у него существует правое обратное линейное отображение $G^{-1r} : G(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ (т. е. при любом $y \in G(\mathbb{R}^n)$ выполнено $GG^{-1r}y = y$). Доопределим G^{-1r} до линейного отображения, заданного на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, и пусть $\widehat{G} = (\hat{g}_{ij})_{n\times m}$ — матрица полученного отображения. Для произвольных $u = (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_m) \in G(\mathbb{R}^n)$ имеем $y - G(u) \in G(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, можем положить $x = u + G^{-1r}(y - G(u))$. Для этого элемента выполнены соотношения

$$G(x) = G(u) + GG^{-1r}(y - G(u)) = y,$$

$$|x_i - u_i| = \left|\sum_{j=1}^{m} \hat{g}_{ij}(y_j - G_j(u))\right| \le \sum_{j=1}^{m} |\hat{g}_{ij}||y_j - G_j(u)|, \quad i=\overline{1,n}$$

(здесь символом $G_j(u)$ обозначена j-я компонента вектора $G(u)$). Таким образом, отображение G условно векторно A-накрывающее, где компоненты $(n\times m)$-матрицы A определены равенством $a_{ij} = |\hat{g}_{ij}|$.

Заметим, что линейное отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ векторно накрывающее тогда и только тогда, когда $m \le n$ и это отображение имеет максимальный ранг m. Действительно, так как это отображение векторно условно накрывающее, в силу свойства 1 для безусловного накрывания необходимо и достаточно, чтобы $G(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$.

Пример 4. Пусть заданы α_j-накрывающие отображения $\psi_j : X_j \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, и числа g_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Рассмотрим отображение $F : \overline{X} \to \mathbb{R}^m$, компоненты которого определяются формулой $F_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}\psi_j(x_j)$. Это отображение является композицией $F = GH$ линейного отображения $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G = (g_{ij})$ и векторно накрывающего отображения $H : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$, $H(x) = (\psi_1(x_1), \dots, \psi_n(x_n))$ (матрица накрывания H задается соотношением (8), см. пример 2). В силу свойства 4 отображение F векторно условно накрывающее, а если матрица (g_{ij}) имеет ранг m, то векторно безусловно накрывающее.

Пример 5. Пусть пространства X_j, Y_i банаховы, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, и заданы линейные ограниченные отображения $\psi_{ij} : X_j \to Y_i$ с замкнутыми образами $\psi_{ij}(X_j)$. Определим отображение $\Psi = (\psi_{ij})_{m\times n} : \overline{X} \to \overline{Y}$, т. е. отображение, компоненты которого равны $\Psi_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x_j)$. Выберем произвольные монотонные нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ и зададим нормы в $\overline{X}, \overline{Y}$ равенствами

$$\|x\|_{\overline{X}} = |(\|x_1\|_{X_1}, \dots, \|x_n\|_{X_n})|_{\mathbb{R}^n}, \quad \|y\|_{\overline{Y}} = |(\|y_1\|_{Y_1}, \dots, \|y_m\|_{Y_m})|_{\mathbb{R}^m}. \tag{9}$$

При таком определении нормы пространства $\overline{X}$, $\overline{Y}$ стали банаховыми, а отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ — линейным ограниченным и имеющим замкнутый образ. Следовательно, линейное подпространство $\Psi(\overline{X})$ с нормой (9) банахово. Линейное ограниченное отображение $\Psi : \overline{X} \to \Psi(\overline{X})$ сюръективно, поэтому согласно принципу открытости отображения (см., например, [9, теорема II.2.1]) существует такое $\alpha > 0$, что $\Psi(B_{\overline{X}}(0,1)) \supset B_{\Psi(\overline{X})}(0,\alpha)$. Вследствие линейности Ψ при любом $u \in \overline{X}$ получаем

$$\begin{aligned}\Psi(B_{\overline{X}}(u,1)) = \Psi(B_{\overline{X}}(u,1) - u + u) = \Psi(B_{\overline{X}}(0,1) + u) = \Psi(B_{\overline{X}}(0,1)) + \Psi(u)\\ \supset B_{\Psi(\overline{X})}(0,\alpha) + \Psi(u) = B_{\Psi(\overline{X})}(\Psi(u),\alpha).\end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ условно α-накрывающее, а в силу свойства 5 векторно условно накрывающее.

Требование накрывания во многих задачах оказывается излишне жестким, например, результаты о разрешимости уравнений, о непрерывной зависимости решений от параметров, оценки решений удается получить при менее ограничительных условиях локального накрывания [10] или локального условного накрывания [3–5].

Определим векторный аналог этих понятий.

Итак, пусть заданы множества $W \subseteq \overline{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+$ и $(n \times m)$-матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Определение 3. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$,* если

$$\forall (u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \cap W \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)),$$

и *векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$,* если

$$\forall (u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \cap W \cap \Psi(\overline{X}) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)).$$

Из определения 3 вытекают следующие утверждения.

Свойство 6. *Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда это отображение векторно A-накрывает множество $W \cap \Psi(\overline{X})$ на совокупности $\mathfrak{A}$.*

Свойство 7. *Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \overline{X}\ \forall y \in W \quad (u, \bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))) \in \mathfrak{A} \\ \Longrightarrow \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)),$$

и векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall u \in \overline{X}\ \forall y \in W \cap \Psi(\overline{X}) \quad (u, \bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u))) \in \mathfrak{A} \\ \Longrightarrow \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)).$$

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$, $A = (a_{11})$, определение 3 равносильно предложенному в [4] определению отображения $\Psi : X \to Y$, (условно) α-накрывающего множество $W \subset Y$ на совокупности $\mathfrak{G} \subset X \times \mathbb{R}_+$, где $\mathfrak{G} = \{(x, r) : (x, \alpha^{-1} r) \in \mathfrak{A}\}$, $\alpha = {a_{11}}^{-1}$. В связи с этим отметим, что при соответствующем выборе множеств $W, \mathfrak{G}$ цитируемому определению [4] удовлетворяют различные трактовки понятия накрывания, рассматривавшиеся в литературе. Здесь в качестве $\mathfrak{A}$ будем выбирать множество, определяемое по заданным $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$ и $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$ соотношением

$$\mathfrak{B}(u^0, R, u) = \big\{(u, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ : Ar + \bar{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \leq R\big\}.$$

При таком задании $\mathfrak{A}$ определение 4 означает, что отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall y \in W \cap \Psi(\overline{X})\ A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)) + \bar{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \leq R \\ \Longrightarrow \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \quad (10)$$

Также потребуется множество $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$ при «предельном значении» вектора R, все компоненты R_j которого равны ∞, $j = \overline{1, n}$, т. е. множество

$$\widehat{\mathfrak{B}}(u) = \big\{(u, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+,\ r \geq 0\big\}.$$

Очевидно, что отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно A-накрывающим множество W на совокупности $\widehat{\mathfrak{B}}(u)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall y \in W \cap \Psi(\overline{X})\ \exists x \in \overline{X}\ \Psi(x) = y\ \&\ \bar{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)).$$

2. Возмущения векторно накрывающих отображений

Пусть задан вектор $y \in \overline{Y}$ и определено отображение $\Upsilon : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, обладающее по первому аргументу свойством накрывания (в смысле одного из приведенных выше определений). Интересны условия существования и оценки решения $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{X}$ уравнения

$$\Upsilon(x, x) = y. \quad (11)$$

Это уравнение — векторная запись системы

$$\begin{cases} \Upsilon_1(x_1,\dots,x_n,x_1,\dots,x_n) = y_1, \\ \dots, \\ \Upsilon_m(x_1,\dots,x_n,x_1,\dots,x_n) = y_m. \end{cases}$$

Пусть заданы векторы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$ и вещественные матрицы A, B размеров $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Положим $U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$. Для каждого $u \in U$ определим множество $W(u) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u), d)$. Зададим отображение $F : \overline{X} \to \overline{Y}$ равенством

$$F(x) = \Upsilon(x,x), \quad x \in \overline{X}.$$

Теорема 1. *Пусть метрические пространства X_i, $i = \overline{1,n}$, полные и выполнены следующие условия:*

(a) *при любом $u \in U$ отображение $\Upsilon(\cdot,u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно A-накрывающим множество $W(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0,R,u)$;*

(b) *$\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(v,u),\Upsilon(v,v)) \le B\bar\rho_{\overline{X}}(u,v)$ для любых $v,u \in U$;*

(c) *для произвольной последовательности $\{v^k\} \subset U$ и любого $u \in U$ если имеют место сходимости $\bar\rho_{\overline{X}}(v^k,u) \to 0$, $\bar\rho_{\overline{Y}}(F(v^k),y) \to 0$ (в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ соответственно), то выполнено соотношение $F(u) = y$;*

(d) *$\varrho(BA) < 1$ для спектрального радиуса ϱ квадратной матрицы BA;*

(e) *имеют место неравенства*[1)]

$$r(y) \doteq (I_m - BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y) \le d, \quad Ar(y) \le R;$$

(f) *при любых $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, Ar(y))$ выполнено включение $y \in \Upsilon(U,u)$.*

Тогда существует решение $x = \xi \in \overline{X}$ уравнения (11), удовлетворяющее неравенству

$$\bar\rho_{\overline{X}}(\xi,u^0) \le Ar(y). \tag{12}$$

Доказательство. Вначале приведем необходимую нам оценку матрицы $(I_m - BA)^{-1}$. Эта матрица является суммой ряда $I_m + BA + (BA)^2 + \dots$ (см., например, [11, гл. III, § 2.1]). Из неотрицательности элементов матриц A, B следует

$$(I_m - BA)^{-1} \ge I_m + BA + \dots + (BA)^k, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{13}$$

(неравенство для матриц понимается, естественно, как неравенство для всех соответствующих элементов).

Покажем, что существует последовательность $\{x^k\} \subset \overline{X}$, отвечающая требованиям: $x^0 = u^0$,

$$\Upsilon(x^k,x^{k-1}) = y, \ \bar\rho_{\overline{X}}(x^k,x^{k-1}) \le A(BA)^{k-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y), \quad k = 1,2,\dots. \tag{14}$$

Проверим (14) при $k = 1$. Покажем, что при $u = x^0$, $W = W(x^0)$ для отображения $\Upsilon(\cdot,x^0) : \overline{X} \to \overline{Y}$ выполнено условие импликации (10). Прежде всего в силу неравенства (13) имеем

$$\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y) \le (I_m - BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y),$$

[1)] Так как $\varrho(BA) < 1$, то $(m\times m)$-матрица $I_m - BA$ обратима, что позволяет использовать матрицу $(I_m - BA)^{-1}$ в этих неравенствах.

т. е. согласно предположению (e) выполнено $\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\le d$, $y\in W$. Кроме того, из предположений теоремы следует, что $y\in\Upsilon(U,x^0)$. Наконец, имеет место оценка

$$\begin{aligned}\bar\rho_{\overline{X}}(u^0,u)+A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u,x^0),y)&=A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\\&\le A(I_m-BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\le R.\end{aligned}$$

В силу предположения векторного накрывания отображением $\Upsilon(\cdot,x^0)$ множества $W(x^0)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0,R,x^0)$ согласно (10) существует $x^1\in\overline{X}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\Upsilon(x^1,x^0)=y,\quad \bar\rho_{\overline{X}}(x^1,x^0)\le A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^0,x^0),y)=A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y).$$

Предполагая, что соотношения (14) имеют место при всех $k\le k_0$, докажем их справедливость при $k=k_0+1$. Проверим условие импликации (10) для отображения $\Upsilon(\cdot,x^{k_0}):\overline{X}\to\overline{Y}$ при значениях $u=x^{k_0}$, $W=W(x^{k_0})$. Во-первых, из (14) получаем

$$\begin{aligned}\bar\rho_{\overline{X}}(u^0,x^{k_0})&\le\bar\rho_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\cdots+\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})\\&\le A(I_m+BA+\cdots+(BA)^{k-1})\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\\&\le A(I_m-BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)=Ar(y).\end{aligned}$$

Таким образом, $u=x^{k_0}\in\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0,Ar(y))$, поэтому $y\in\Upsilon(U,x^{k_0})$. Во-вторых, имеем

$$\begin{aligned}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,x^{k_0}),y)&\le\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)+\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,x^0),\Upsilon(u^0,x^{k_0}))\\&\le\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)+B\bar\rho_{\overline{X}}(u^0,x^{k_0})\\&\le\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)+B(\bar\rho_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\cdots+\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0}))\\&\le\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)+B(A+A(BA)+\cdots+A(BA)^{k_0-1})\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\\&=(I_m+BA+\cdots+(BA)^{k_0})\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\\&\le(I_m-BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\le d,\end{aligned}$$

т. е. $y\in W(x^{k_0})$. Наконец, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&\bar\rho_{\overline{X}}(u^0,u)+A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u,x^{k_0}),y)\\&\le\bar\rho_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\cdots+\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u,x^{k_0}),y)\\&=\bar\rho_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\cdots+\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^{k_0},x^{k_0}),\Upsilon(x^{k_0},x^{k_0-1}))\\&\le\bar\rho_{\overline{X}}(x^0,x^1)+\cdots+\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})+AB\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0-1},x^{k_0})\\&\le A(I_m+\cdots+(BA)^{k_0-1}+(BA)^{k_0})\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\\&\le A(I_m-BA)^{-1}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y)\le R.\end{aligned}$$

Вследствие векторного накрывания отображением $\Upsilon(\cdot,x^{k_0})$ множества $W(x^{k_0})$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0,R,x^{k_0})$ существует элемент $x^{k_0+1}\in\overline{X}$, удовлетворяющий равенству $\Upsilon(x^{k_0+1}x^{k_0})=y$ и оценкам

$$\begin{aligned}\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0+1},x^{k_0})&\le A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^{k_0}x^{k_0}),y)=A\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^{k_0}x^{k_0}),\Upsilon(x^{k_0}x^{k_0-1}))\\&\le AB\bar\rho_{\overline{X}}(x^{k_0},x^{k_0-1})\le A(BA)^{k_0}\bar\rho_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0,u^0),y).\end{aligned}$$

Итак, установлено существование последовательности $\{x^k\} \subset \overline{X}$, удовлетворяющей соотношениям (14). Компоненты этих векторов x_i^k при каждом $i = \overline{1,n}$ образуют в X_i фундаментальную последовательность. Действительно, из оценки $\varrho(BA) < 1$ следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m} \to 0$ при $k \to \infty$; таким образом,

$$\bar{\rho}_{\overline{X}}(x^{k+l}, x^k) \le A(BA)^k(I_m + \dots + (BA)^{l-1})\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0, u^0), y)$$
$$\le A(BA)^k(I_m - BA)^{-1}\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0, u^0), y) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,\ l = 1, 2, \dots.$$

Вследствие полноты пространств X_i последовательность $\{x^k\}$ сходится, пусть $\xi \in \overline{X}$ — ее предел. Покажем, что ξ — искомое решение системы (11). Из соотношений

$$\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^k, x^k), y) \le \bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^k, x^k), \Upsilon(x^k, x^{k-1})) + \bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^k, x^{k-1}), y)$$
$$= \bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(x^k, x^k), \Upsilon(x^k, x^{k-1})) \le B\bar{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x^{k-1})$$

вытекает сходимость $\bar{\rho}_{\overline{Y}}(F(x^k), y) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, $F(\xi) = y$. Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство (12) следует из оценки

$$\bar{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x_0) \le A(I_m + \dots + (BA)^{k-1})\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0, u^0), y)$$
$$\le A(I_m - BA)^{-1}\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(u^0, u^0), y). \quad \square$$

Схема приведенного доказательства, состоящая в построении последовательности (14), близка схеме очень краткого и «прозрачного» доказательства теоремы о точке совпадения [1], но нам приходится привлекать более громоздкие рассуждения — это неизбежная плата за ослабление свойства накрывания и рассмотрение пространств с векторными метриками.

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 можно заменить матрицу BA матрицей AB. Действительно, ненулевые собственные значения, а следовательно, и спектральные радиусы этих матриц совпадают (см. [12, гл. 3, § 11.7]). Далее, так как $\rho(AB) = \rho(BA) < 1$, то

$$A(I_m - BA)^{-1} = A(I_m + BA + (BA)^2 + \dots) = A + ABA + ABABA + \dots$$
$$= (I_n + AB + (AB)^2 + \dots)A = (I_n - AB)^{-1}A.$$

Замечание 2. В том случае, когда при любом $u \in U$ отображение $\Upsilon(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно безусловно A-накрывающим множество $W(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$, включение $y \in \Upsilon(U, u)$ выполняется «автоматически» для всех $y \in W(u)$, поэтому условие (f) может быть исключено из предположений теоремы 1. Далее, если $W = \overline{Y}$, то из условия (e) можно удалить первое неравенство, а если $U = \overline{X}$, то лишним предположением становится второе неравенство в (e). Таким образом, если при любом $u \in U$ отображение $\Upsilon(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ векторно условно A-накрывающее, то для утверждения теоремы 1 условие (e) не требуется.

Для скалярного отображения $\Upsilon : X \to Y$, т. е. если $n = m = 1$ и $\overline{X} = X$, $\overline{Y} = Y$ — метрические пространства, теорема 1 совпадает с результатом, полученным в [5]. В этом случае матрица A состоит из единственного элемента α^{-1}, матрица B — из элемента β, поэтому оценка (12) принимает вид

$$\rho_X(\xi, u^0) \le \alpha^{-1}(1 - \beta\alpha^{-1})^{-1}\rho_Y(\Upsilon(u^0, u^0), y) = (\alpha - \beta)^{-1}\rho_Y(\Upsilon(u^0, u^0), y).$$

Теорема 1 позволяет сформулировать следующий признак векторного накрывания отображения $F : \overline{X} \to \overline{Y}$.

Теорема 2. *Пусть метрические пространства X_i, $i=\overline{1,n}$, полные и выполнены предположения: при любом $u\in\overline{X}$ отображение $\Upsilon(\cdot,u):\overline{X}\to\overline{Y}$ является векторно A-накрывающим пространство $\overline{Y}$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{B}}(u)$; для любых $v,u\in\overline{X}$ справедливо неравенство $\bar{\rho}_{\overline{Y}}(\Upsilon(v,u),\Upsilon(v,v))\leq B\bar{\rho}_{\overline{X}}(u,v)$; имеет место оценка $\varrho(BA)<1$; отображение $F:\overline{X}\to\overline{Y}$ замкнуто. Тогда отображение F векторно $A(I_m-BA)^{-1}$-накрывающее.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1, полагая все компоненты векторов R,d бесконечно большими: $R_j=\infty$, $j=\overline{1,n}$, $d_i=\infty$, $i=\overline{1,n}$. На основании теоремы 1 заключаем, что при любых $u^0\in\overline{X}$, $y\in\overline{Y}$ существует решение уравнения (11), отвечающее неравенству (12). Это и означает в силу свойства 2, что отображение F векторно $A(I_m-BA)^{-1}$-накрывающее. $\square$

3. Исследование систем неявных уравнений

Применим теорему 1 к исследованию одной системы специального вида, возникающей в задаче о кратных точках совпадения и кратных неподвижных точках.

Обозначим через $i(n)$ остаток от деления целого числа i на n. Как и выше, символами X_i,Y_i, $i=\overline{1,n}$, обозначаем метрические пространства, первое из которых полное. Пусть при всех $i=\overline{1,n}$ заданы элемент $y_i\in Y_i$ и отображение $\gamma_i:X_{i(n)+1}\times X_i\to Y_i$. Рассмотрим систему

$$\gamma_1(x_2,x_1)=y_1,\ \ldots,\ \gamma_{n-1}(x_n,x_{n-1})=y_{n-1},\ \gamma_n(x_1,x_n)=y_n \tag{15}$$

и ее частный случай при $n=2$:

$$\gamma_1(x_2,x_1)=y_1,\quad \gamma_2(x_1,x_2)=y_2. \tag{16}$$

Пусть определены положительные числа α_i, R_i, d_i, неотрицательное число β_i и элемент $u_i^0\in X_i$, $i=\overline{1,n}$. Положим $R\doteq(R_1,\ldots,R_n)$, $u^0\doteq\big(u_1^0,\ldots,u_n^0\big)$, $U_i\doteq\mathrm{B}_{X_i}\big(u_i^0,R_i\big)$, $U\doteq\prod\limits_{i=1}^{n}U_i$. Имеем $U=\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0,R)$. Для произвольного $u=(u_1,\ldots,u_n)\in U$ положим

$$W_i(u)\doteq\mathrm{B}_{Y_i}\big(\gamma_i\big(u^0_{i(n)+1},u_i\big),d_i\big),$$

$$\mathfrak{B}_i(u^0,R,u)\doteq\big\{(u_{i(n)+1},r)\in X_{i(n)+1}\times\mathbb{R}_+:r/\alpha_i+\rho\big(u_{i(n)+1},\ u^0_{i(n)+1}\big)\leq R_{i(n)+1}\big\}.$$

Будем предполагать, что при всех $i=\overline{1,n}$ и любых $u,v\in U$ справедливо неравенство

$$\bar{\rho}_{Y_i}(\gamma_i(v_{i(n)+1},u_i),\gamma_i(v_{i(n)+1},v_i))\leq\beta_i\rho_{X_i}(u_i,v_i),$$

отображение $\gamma_i(\cdot,u_i):X_{i(n)+1}\to Y_i$ является условно α_i-накрывающим множество $W_i(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}_i(u^0,R,u)$ и $y_i\in\gamma_i(U_{i(n)+1},u_i)$. Далее, предполагаем, что для произвольной последовательности $\{v^k\}\subset U$ если при всех $i=\overline{1,n}$ имеют место сходимости $\rho_{X_i}(v^k{}_i,u_i)\to 0$, $\rho_{Y_i}(\gamma_i(v^k{}_{i(n)+1},v^k{}_i),y_i)\to 0$, то выполнено соотношение $\gamma_i(u_{i(n)+1},u_i)=y_i$, $i=\overline{1,n}$.

Система (15) приводится к виду (11), если определить отображение $\Upsilon:\overline{X}\to\overline{Y}$ равенством

$$\Upsilon(x,u)=(\gamma_1(x_2,u_1),\ldots,\gamma_{n-1}(x_n,u_{n-1}),\gamma_n(x_1,u_n)).$$

Это отображение в силу сделанных предположений удовлетворяет условиям (a), (b), (c), (f) теоремы 1 с «матрицами накрывания и липшицевости», равными

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {\alpha_1}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & {\alpha_{n-1}}^{-1} \\ {\alpha_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Получим условия, которым должны удовлетворять числа α_i, β_i, чтобы выполнялись остальные предположения теоремы 1, для чего определим $\varrho(BA)$ и $r(y)$. Имеем

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & {c_1}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & {c_{n-1}}^{-1} \\ {c_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_i = {\beta_i}^{-1}\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$. Характеристическим многочленом найденной матрицы является $\lambda^n - (c_1 \dots c_{n-1}c_n)^{-1}$, следовательно, ее спектральный радиус равен $\rho(A) = (c_1 \dots c_{n-1}c_n)^{-1/n}$. Оценка $\rho(A) < 1$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\alpha_n > \beta_1 \dots \beta_{n-1}\beta_n. \tag{17}$$

В следующих выкладках для удобства обозначений считаем, что $n \geq 3$. Случай $n = 2$ рассмотрим затем отдельно.

Определим матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n - BA = \begin{pmatrix} 1 & -{c_1}^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & -{c_{n-1}}^{-1} \\ -{c_n}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I_n - BA)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} c_1c_2c_3\dots c_n & c_2c_3\dots c_n & c_3\dots c_n & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2c_3\dots c_nc_1 & c_3\dots c_nc_1 & \cdots & c_nc_1 \\ c_1c_2 & c_2 & c_3\dots c_nc_1c_2 & \cdots & c_nc_1c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_1c_2c_3\dots c_{n-1} & c_2c_3\dots c_{n-1} & c_3\dots c_{n-1} & \cdots & c_nc_1c_2\dots c_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A(I_n - BA)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} {\beta_1}^{-1} & {\beta_1}^{-1}c_2c_3\dots c_n & {\beta_1}^{-1}c_3\dots c_n & \cdots & {\beta_1}^{-1}c_n \\ {\beta_2}^{-1}c_1 & {\beta_2}^{-1} & {\beta_2}^{-1}c_3\dots c_nc_1 & \cdots & {\beta_2}^{-1}c_nc_1 \\ {\beta_3}^{-1}c_1c_2 & {\beta_3}^{-1}c_2 & {\beta_3}^{-1} & \cdots & {\beta_3}^{-1}c_nc_1c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {\beta_n}^{-1}c_1c_2c_3\dots c_{n-1} & {\beta_n}^{-1}c_2c_3\dots c_{n-1} & {\beta_n}^{-1}c_3\dots c_{n-1} & \cdots & {\beta_n}^{-1} \end{pmatrix},$$

здесь $\Delta = c_1c_2\dots c_n - 1$.

Подставляя эти матрицы в неравенства (d), (e), из теоремы 1 получаем условия разрешимости системы (15).

Следствие 1. *Пусть* $n \geq 3$, *выполнена оценка* (17) *и справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\Delta}\Big(c_1c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0, u_1^0\big), y_1\big) + c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_3^0, u_2^0\big), y_2\big) \\ + \dots + c_n\rho_{Y_n}\big(\gamma_n\big(u_1^0, u_n^0\big), y_n\big)\Big) \leq \min\{\alpha_nR_n, d_1\},$$

$$\frac{1}{\Delta}\Big(c_2c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_3^0, u_2^0\big), y_2\big) + c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_3}\big(\gamma_3\big(u_{3(n)+1}^0, u_3^0\big), y_3\big) \\ + \dots + c_1\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0, u_1^0\big), y_1\big)\Big) \leq \min\{\alpha_1R_1, d_2\},$$

$$\dots,$$

$$\frac{1}{\Delta}\big(c_nc_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_n}\big(\gamma_n\big(u_1^0,u_n^0\big),y_n\big)+c_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)$$
$$+\dots+c_{n-1}\rho_{Y_{n-1}}\big(\gamma_{n-1}\big(u_n^0,u_{n-1}^0\big),y_{-1}\big)\big)\le\min\{\alpha_{n-1}R_{n-1},d_n\},$$

где $\Delta=c_1c_2\dots c_n-1$.

Тогда существует решение $x=(\xi_1,\dots\xi_n)\in\overline{X}$ *системы* (15), *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1,u_1^0\big)\le\frac{1}{\beta_1\Delta}\big(\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)+c_2c_3\dots c_n\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_3^0,u_2^0\big),y_2\big)$$
$$+\dots+c_n\rho_{Y_n}\big(\gamma_n\big(u_1^0,u_n^0\big),y_n\big)\big),$$

$$\rho_{X_2}\big(\xi_2,u_2^0\big)\le\frac{1}{\beta_2\Delta}\big(\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_3^0,u_2^0\big),y_2\big)+c_3\dots c_nc_1\rho_{Y_3}\big(\gamma_3\big(u_{3(n)+1}^0,u_3^0\big),y_3\big)$$
$$+\dots+c_1\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)\big),$$

$$\dots,$$

$$\rho_{X_n}\big(\xi_n,u_n^0\big)\le\frac{1}{\beta_n\Delta}\big(\rho_{Y_n}\big(\gamma_n\big(u_1^0,u_n^0\big),y_n\big)+c_1c_2\dots c_{n-1}\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)$$
$$+\dots+c_{n-1}\rho_{Y_{n-1}}\big(\gamma_{n-1}\big(u_n^0,u_{n-1}^0\big),y_{n-1}\big)\big).$$

Аналогично для системы (16) получаем

Следствие 2. *Пусть* $n=2$, *выполнена оценка* $\alpha_1\alpha_2>\beta_1\beta_2$ *и справедливы неравенства*

$$\alpha_1\alpha_2\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)+\alpha_2\beta_1\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_1^0,u_2^0\big),y_2\big)\le(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\min\{\alpha_2R_2,d_1\},$$

$$\alpha_2\alpha_1\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_1^0,u_2^0\big),y_2\big)+\alpha_1\beta_2\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)\le(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\min\{\alpha_1R_1,d_2\}.$$

Тогда существует решение $x=(\xi_1,\xi_2)\in X_1\times X_2$ *системы* (16), *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_{X_1}\big(\xi_1,u_1^0\big)\le\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\big(\beta_2\rho_{Y_1}\big(\gamma_1\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)+\alpha_2\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_1^0,u_2^0\big),y_2\big)\big),$$

$$\rho_{X_2}\big(\xi_2,u_2^0\big)\le\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}\big(\beta_1\rho_{Y_2}\big(\gamma_2\big(u_1^0,u_2^0\big),y_2\big)+\alpha_1\rho_{Y_1}\big(\gamma\big(u_2^0,u_1^0\big),y_1\big)\big).$$

Следующий пример иллюстрирует приложения приведенных результатов к исследованию периодических решений разностных уравнений.

Пример 6. Пусть $y_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots$. Рассмотрим разностное уравнение

$$(i(3)+1){x_{i+1}}^2+x_{i+1}x_i+{x_i}^2=y_i. \tag{18}$$

Решение уравнения (18) — это произвольная числовая последовательность $\{x_i\}$, элементы которой при любом номере i удовлетворяют данному уравнению. Если при некотором натуральном n решение является n-периодической последовательностью, т. е. при любом i выполнено $x_{i+n}=x_i$, то это решение называют *n-периодическим.*

Для каждого $i=1,2,\dots$ определим отображение $\gamma_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ равенством

$$\gamma_i(v,u)=(i(3)+1)v^2+vu+u^2.$$

Положим $u_i^0 \doteq 1$, $y_i^0 \doteq \gamma_i\big(u_{i+1}^0, u_i^0\big) = 3 + i(3)$. Отметим, что последовательность $\big\{y_i^0\big\}$ 3-периодическая.

Покажем, что для любой 3-периодической последовательности $\{y_i\}$, достаточно близкой к $\big\{y_i^0\big\}$, существует 3-периодическое решение уравнения (18), и получим оценки допустимого отклонения y_i от y_i^0 и соответствующего отклонения 3-периодического решения x_i от u_i^0.

Для существования 3-периодического решения уравнения (18) необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система

$$\begin{cases} \gamma_1(x_2, x_1) \doteq 2{x_2}^2 + x_2x_1 + {x_1}^2 = y_1, \\ \gamma_2(x_3, x_2) \doteq 3{x_3}^2 + x_3x_2 + {x_2}^2 = y_2, \\ \gamma_1(x_1, x_3) \doteq {x_1}^2 + x_1x_3 + {x_3}^2 = y_1. \end{cases} \tag{19}$$

Набор (x_1, x_2, x_3) из первых трех членов 3-периодического решения $\{x_i\}$ уравнения (18) является решением системы (19), и, обратно, если вектор (x_1, x_2, x_3) удовлетворяет системе (19), то периодическая последовательность $x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3, \ldots$ будет решением разностного уравнения (18). Этот факт позволяет применить следствие 5 к исследованию периодических решений уравнения (18).

Пусть $R = (R_1, R_2, R_3)$, где $R_1 = R_2 = R_3 = 5^{-1}$. Тогда $U_1 = U_2 = U_3 = \mathrm{B}_{\mathbb{R}}(1, 5^{-1}) = [5^{-1}\cdot 4, 5^{-1}\cdot 6]$. При всех $u, v \in [5^{-1}\cdot 4, 5^{-1}\cdot 6]$ имеем

$$\frac{\partial\gamma_1(v,u)}{\partial v} = 4v + u \geq 4, \quad \frac{\partial\gamma_2(v,u)}{\partial v} = 6v + u \geq \frac{28}{5}, \quad \frac{\partial\gamma_3(v,u)}{\partial v} = 2v + u \geq \frac{12}{5},$$
$$0 \leq \frac{\partial\gamma_i(v,u)}{\partial u} = v + 2u \leq \frac{18}{5}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Учитывая эти неравенства, зададим значения $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 28/5$, $\alpha_3 = 12/5$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{18}{5}$ и положим $d_i = \alpha_i R_i$, т. е. $d_1 = \frac{4}{5}$, $d_2 = \frac{28}{25}$, $d_3 = \frac{12}{25}$.

Для произвольного $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ такого, что $u_i \in U_i$, $i = 1, 2, 3$, определим

$$W_i(u) = \mathrm{B}_{\mathbb{R}}(\gamma_i(1, u_i), d_i),$$
$$\mathfrak{B}_i(u^0, R, u) \doteq \{(u_{i(3)+1}, r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : r/\alpha_i + |u_{i(3)+1} - 1| \leq 1/5\}.$$

Из оценок (20) следует, что отображение $\gamma_i(\cdot, u_i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $W_i(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}_i(u^0, R, u)$, отображение $\gamma_i(u_i, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ β_i-липшицево на множестве U_i, а соответствующие коэффициенты связаны соотношением $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{6720}{125} > \beta_1\beta_2\beta_3 = \frac{5832}{125}$.

Таким образом, применяя следствие 5 к системе (19), получаем следующее утверждение о периодических решениях разностного уравнения (18).

Пусть для правой части уравнения (18) — *периодической последовательности* $(y_1, y_2, y_3, y_1, y_2, y_3, \ldots)$ — *справедливы неравенства*

$$\frac{280}{243}|y_1 - 4| + \frac{28}{27}|y_2 - 5| + \frac{2}{3}|y_3 - 3| \leq \frac{148}{1215},$$
$$\frac{280}{243}|y_2 - 5| + \frac{20}{27}|y_3 - 3| + \frac{10}{9}|y_1 - 4| \leq \frac{148}{1215},$$
$$\frac{280}{243}|y_3 - 3| + \frac{140}{81}|y_1 - 4| + \frac{14}{9}|y_2 - 5| \leq \frac{592}{2025}.$$

Тогда существует 3-периодическое решение $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ *уравнения* (18), *удовлетворяющее оценке*

$$|\xi_1 - 1| \leq \frac{135}{74}\left(|y_1 - 4| + \frac{28}{27}|y_2 - 5| + \frac{2}{3}|y_3 - 3|\right),$$

$$|\xi_2 - 1| \le \frac{135}{74}\left(|y_2 - 5| + \frac{20}{27}|y_3 - 3| + \frac{10}{9}|y_1 - 4|\right),$$

$$|\xi_3 - 1| \le \frac{135}{74}\left(|y_3 - 3| + \frac{140}{81}|y_1 - 4| + \frac{14}{9}|y_2 - 5|\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
2. *Арутюнов А. В.* Точки совпадения двух отображений // Функцион. анализ и его прил. 2014. Т. 48, № 1. С. 89–93.
3. *Аваков Е. Р., Арутюнов А. В., Жуковский Е. С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
4. *Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1523–1537.
5. *Arutyunov A. V., Zhukovskii E. S., Zhukovskii S. E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2012. V. 75. P. 1026–1044.
6. *Жуковский Е. С., Плужникова Е. А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 439–455.
7. *Жуковский Е. С., Плужникова Е. А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. *Арутюнов А. В.* Задача о точках совпадения многозначных отображений и устойчивость по Уламу — Хайерсу // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 4. С. 379–383.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory Appl. 2009. V. 5, N 1. P. 105–127.
11. *Функциональный анализ* / Под общей редакцией С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
12. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука. Физматлит, 1996.

Статья поступила 31 марта 2015 г.

Жуковский Евгений Семенович
Тамбовский гос. университет им. Г. Р. Державина,
ул. Интернациональная, 33, Тамбов 392000;
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198
zukovskys@mail.ru