Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 517.54

МЁБИУС–БИЛИПШИЦЕВО ОДНОРОДНЫЕ ДУГИ НА ПЛОСКОСТИ

В. В. Асеев

Аннотация. *Мёбиус-билипшицевым* называется η-квазимёбиусово отображение с линейной функцией искажения $\eta(t) = Kt$. Показано, что если открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с различными концами a, b однородна относительно семейства $\mathscr{F}_K$ мёбиус-билипшицевых автоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с заданным K, то она имеет ограниченное искривление по Рикману $RT(\gamma)$ и, следовательно, является квазиконформным образом прямолинейного отрезка. Однородность γ относительно $\mathscr{F}_K$ означает, что для любых $x, y \in \gamma \setminus \{a, b\}$ существует $f \in \mathscr{F}_K$, у которого $f(\gamma) = \gamma$ и $f(x) = y$. Для получения верхней оценки рикманова искривления $RT(\gamma)$ вводится условие $BR(\delta)$ ограниченного вращения жордановой дуги γ, и тогда эта оценка выражается явно через K и δ.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.302

Ключевые слова: билипшицева однородность, квазиконформная однородность, квазиконформное отображение, билипшицево отображение, квазимёбиусово вложение, мёбиус-билипшицево отображение, мёбиус-билипшицева однородность, ограниченное искривление.

§ 1. Введение

Описание строения топологически однородных пространств (т. е. пространств с транзитивно действующей группой гомеоморфизмов) и, в частности, однородных континуумов — одна из актуальных задач общей топологии, с которой связаны классические работы Мазуркевича, Бинга, Джонса, Хагопиана, Роджерса (см., например, библиографию в [1]). Развитие теории билипшицевых и квазиконформных отображений и смещение основной проблематики в область метрической топологии возобновило интерес к изучению метрических свойств континуумов, однородных относительно заданного класса отображений (квазиконформных, билипшицевых, квазисимметрических, квазимёбиусовых). В теории квазиконформных отображений известны результаты Геринга, Палки (1976) и Сарваса (1985) о квазиконформно однородных областях в $\mathbb{R}^n$, работы Эркама и Брехнера о квазиконформно однородных кривых (1977) и континуумах (1979) на плоскости, исследования МакМануса, Ньякки и Палка (1998, 1999) о плоских квазиконформно однородных компактах. Особый интерес представляет исследование билипшицево однородных жордановых кривых, выполненное в работах Майера, Гамсари, Херрона, Бишопа и Фримана в период 1995–2012 гг.

В [2, теорема 1.1] показано, что орбита однопараметрической группы L-билипшицевых автоморфизмов евклидовой плоскости имеет слабо квазиоднородную параметризацию. В [3, теорема A] получена константа ограниченного искривления (bounded turning) для жордановой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, однородной относительно семейства $BL_K(\mathbb{R}^2)$ всех K-билипшицевых автоморфизмов плоскости, переводящих γ в себя. В [4, теорема 1.1] доказана ограниченность искривления жордановой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, однородной относительно билипшицевых автоморфизмов этой кривой (но без указания константы ограниченного искривления). В [5, теорема B] показано, что в произвольном метрическом пространстве однородность жордановой кривой γ относительно билипшицевых автоморфизмов γ равносильна существованию слабо квазиоднородной параметризации этой кривой. В изучении билипшицево однородных жордановых кривых важную роль играет хордо-дуговое свойство CA^α (при $\alpha = 1$ свойство CA известно как регулярность по Лаврентьеву). Связь между билипшицевой однородностью, хордо-дуговым свойством и регулярностью по Альфорсу жордановых кривых в $\mathbb{R}^n$ исследована в [6]. Для более общего случая жордановых кривых $\Gamma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ с ограниченным искривлением в хордовой метрике в [7] установлено, что обобщенное хордо-дуговое свойство (в терминах калиброванной меры Хаусдорфа) равносильно тому, что при любом мёбиусовом преобразовании μ пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ кривая $\mu(\Gamma) \cap \mathbb{R}^n$ является L-билипшицево однородной в евклидовой метрике. В [8, следствие 1.3] для жордановой кривой Γ в $\mathbb{R}^n$ показано, что ограниченность искривления в соединении с регулярностью по Альфорсу эквивалентна наличию такой точки $p \in \Gamma$, что кривая Γ и ее «образ» при инверсировании метрики относительно этой точки L-билипшицево однородны в соответствующих метриках (евклидовой и инверсированной). Кроме того, в упомянутых работах имеется богатый набор интересных примеров и контрпримеров.

В данной статье для открытой жордановой дуги $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}$ с различными концами a, b изучается следующее свойство *однородности*: существует константа K такая, что для любой пары точек $x, y \in \gamma \setminus \{a, b\}$ найдется η-квазимёбиусов автоморфизм f сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с линейной функцией искажения $\eta(t) = Kt$ (так называемое *K-мёбиус-билипшицево* отображение, введенное в [9] под названием «конформно K-билипшицево отображение») такой, что $f(\gamma) = \gamma$ и $f(x) = y$. Мы доказываем, что такая дуга γ имеет ограниченное искривление по Риману (т. е. является квазиконформным образом прямолинейного отрезка), и указываем верхнюю оценку рикманова искривления, зависящую лишь от K и константы δ в условии $BR(\delta)$ ограниченного вращения дуги γ.

Терминология и обозначения. Множество γ в топологическом пространстве X называется *жордановой дугой*, если существует гомеоморфизм f отрезка $[0, 1]$ числовой прямой на γ. Точки $f(0) = a$, $f(1) = b$ называют *концами* дуги γ. При этом используются обозначения: $\gamma[a, b]$ — (компактная) жорданова дуга с концами a, b и $\gamma(a, b) = \gamma[a, b] \setminus \{a, b\}$ — (*открытая жорданова дуга* с концами a, b). *Жордановой кривой* называется гомеоморфный образ окружности $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Множество $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ называем *некомпактной жордановой кривой*, если $\gamma \cup \{\infty\}$ — жорданова кривая в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Жорданова дуга γ в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ имеет *ограниченное искривление* с константой C, если для любой пары точек $x, y \in \gamma$

$$\operatorname{diam}_{\mathscr{M}} \gamma[x, y] \le C|x - y|_{\mathscr{M}}. \tag{1.1}$$

Множество $\gamma \subset \mathscr{X}$ называется *однородным* относительно заданного семейства T гомеоморфизмов пространства $\mathscr{X}$ на себя, если для любой пары точек $x, y \in \gamma$ существует такой гомеоморфизм $f \in T$, что $f(\gamma) = \gamma$ и $f(x) = y$.

Отображение $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ метрических пространств называется *K-липшицевым* (с $K > 0$), если $|f(x) - f(y)|_{\mathscr{M}'} \le K|x - y|_{\mathscr{M}}$ для любых $x, y \in \mathscr{M}$. Если обратное отображение $f^{-1} : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ существует и также K-липшицево, то f называется K-*билипшицевым отображением.* При $K = 1$ такое отображение *изометрическое.*

§ 2. Билипшицево однородные некомпактные жордановы кривые

В семействе $BL(\mathbf{C}; K)$ всех K-билипшицевых автоморфизмов комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (с евклидовой метрикой) рассмотрим подсемейство $BL^*(\gamma \subset \mathbf{C}; K)$ всех тех отображений, которые сохраняют ориентацию в $\mathbf{C}$ и переводят заданную некомпактную жорданову дугу γ в себя с сохранением направления на γ.

В [3, теорема A] установлено, что *компактная жорданова кривая* $\gamma \subset \mathbf{C}$, *однородная относительно* $BL(\mathbf{C}; K)$, *имеет ограниченное искривление с константой* $1 + 2K^2$. Используя схему доказательства этой теоремы (с небольшими изменениями и уточнениями), получим такой же результат для некомпактной жордановой кривой.

Теорема 2.1. *Если некомпактная жорданова кривая* $\gamma \subset \mathbf{C}$ *однородна относительно семейства* $BL^*(\gamma \subset \mathbf{C}; K)$ *с заданным* $K \geq 1$, *то она имеет ограниченное искривление с константой* $1 + 2K^2$.

Доказательство. Пусть точки $a, b \in \gamma$ таковы, что прямолинейный отрезок $L = L(a, b)$ лежит в области G — одной из компонент множества $\mathbf{C} \setminus \gamma$. Внутреннее расстояние на множестве $G \cup \gamma$ вводится формулой $\rho(x, y) := \inf\limits_{\lambda} \mathscr{H}^1(\lambda)$, где inf берется по всем континуумам $\lambda \subset G \cup \gamma$, содержащим точки x и y, а $\mathscr{H}^1(\lambda)$ — одномерная мера Хаусдорфа множества λ. Покажем, что $M = \sup\{\rho(x, L) : x \in \gamma[a, b]\} < \infty$.

Допустив противное, найдем такую последовательность $x_n \in \gamma[a, b]$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, c) = \infty$, где $c = (a + b)/2$. В силу компактности $\gamma[a, b]$ можно считать, что $x_n \to x_0 \in \gamma[a, b]$. Для каждого n возьмем $f_n \in BL^*(\gamma \subset \mathbf{C}; K)$ такое, что $f_n(a) = x_n$. Ввиду K-билипшицевости f_n для любого $R > 0$ имеем включение $f_n(\overline{B}(a, R)) \subset \overline{B}(x_n, KR) \subset \overline{B}(a, KR + \operatorname{diam} \gamma[a, b])$, поэтому семейство $\{f_n\}$ равностепенно непрерывно (в силу K-билипшицевости) и равномерно ограничено на любом компакте в $\mathbf{C}$. Воспользовавшись теоремой Арцела — Асколи и перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что имеется равномерная на компактах в $\mathbf{C}$ сходимость $f_n \rightrightarrows g$, где $g \in BL^*(\gamma \subset \mathbf{C}; K)$ и $g(a) = x_0$. Так как $c' := g^{-1}(c) \in G$, то $d := \rho(c, c') < +\infty$. В силу сходимости $c'_n := f_n^{-1}(c) \to g^{-1}(c) = c'$ при всех достаточно больших n выполняются неравенство $\rho(c, c'_n) \leq 2d < +\infty$ и оценка

$$\rho(x_n, c) \leq \rho(f_n(a), f_n(c'_n)) \leq K\rho(a, c'_n) \leq K(\rho(a, c) + \rho(c, c'_n)) \leq K(|a - b|/2 + 2d),$$

противоречащая сходимости $\rho(x_n, c) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, $M < +\infty$.

Для $\delta > 0$ найдем $x \in \gamma[a, b]$ и $f \in BL^*(\gamma \subset \mathbf{C}; K)$ такие, что $\rho(x, L) > M - \delta$ и $f(a) = x$. Тогда $f(L)$ — открытая спрямляемая дуга с концами $x, f(b) \in \gamma$ и $f(L) \subset G$.

В случае, когда $f(L) \cap L \neq \varnothing$, имеем

$$M - \delta < \rho(x, L) \leq \mathscr{H}^1(f(L)) \leq K|a - b|,$$

т. е.

$$M \leq K|a - b| + \delta. \tag{2.1.1}$$

Если $f(L) \cap L = \varnothing$, то $f(\gamma[a,b]) \subset \gamma[a,b]$. При этом открытая дуга $f(L)$ лежит в области Δ, ограниченной отрезком L и дугой $\gamma[a,b]$ (напомним, что f сохраняет ориентацию на плоскости и направление на γ). Так как $f(x) \in \gamma[a,b]$, то $\rho(f(x), L) \leq M$ и, следовательно, найдется спрямляемая дуга $\tau \subset G \cup \gamma$ с концами $f(x)$ и $z \in L$, для которой $\mathscr{H}^1(\tau) < M + \delta$. Поскольку $\tau \cap f(L) \neq \varnothing$, на τ имеются поддуги $\tau_1 \subset \bar{\Delta}$ с концами $z_0 \in L$, $z_1 \in f(L)$ и $\tau_2 \subset f(\bar{\Delta})$ с концами $f(x)$, $z_2 \in f(L)$. Из оценок $\mathscr{H}^1(\tau_2) \geq (1/K)\rho(x, L) \geq (1/K)(M - \delta)$ и $\mathscr{H}^1(\tau_1) + \mathscr{H}^1(\tau_2) \leq \mathscr{H}^1(\tau) < M + \delta$ следует, что $\mathscr{H}^1(\tau_1) \leq M + \delta - (1/K)(M - \delta)$. Используя неравенство

$$M - \delta < \rho(x, L) \leq \mathscr{H}^1(f(L) \cup \tau_1) \leq \mathscr{H}^1(f(L)) + \mathscr{H}^1(\tau_1) \leq K|a-b| + \mathscr{H}^1(\tau_1),$$

получаем соотношение $M - \delta \leq K|a-b| + M + \delta - (1/K)(M-\delta)$, означающее, что

$$M \leq K^2|a-b| + (1+2K)\delta. \tag{2.1.2}$$

Учитывая (2.1.1), видим, что в обоих возможных случаях верна оценка (2.1.2). В силу произвольности $\delta > 0$ это означает, что $M \leq K^2|a-b|$.

Таким образом, если дуга $\gamma(a,b)$ не пересекается со своей хордой $L[a,b]$, то для любой точки $x \in \gamma[a,b]$ верна оценка

$$\operatorname{dist}(x, L[a,b]) \leq \rho(x, L[a,b]) \leq M \leq K^2|a-b|. \tag{2.1.3}$$

В общем случае для произвольно заданной пары точек $p, q \in \gamma$ рассмотрим поддугу $\gamma[p,q] \subset \gamma$ с концами в точках p, q и прямолинейный отрезок $L[p,q]$ с концами в тех же точках. Если $x \in M := \gamma[p,q] \cap L[p,q]$, то $\operatorname{dist}(x, L[p,q]) = 0$. Если $x \in \gamma[p,q] \setminus M$, то содержащая точку x компонента множества $\gamma[p,q] \setminus M$ является открытой поддугой $\gamma(a,b) \subset \gamma[p,q]$ с концами $a, b \in M$, которая не пересекается с M, а следовательно, и с прямолинейным отрезком $L[a,b]$, соединяющим ее концы. Тогда, используя оценку (2.1.3) для дуги $\gamma(a,b)$ и ее хорды $L[a,b] \subset L[p,q]$, получаем оценку

$$\operatorname{dist}(x, L[p,q]) \leq \operatorname{dist}(x, L[a,b]) \leq K^2|a-b| \leq K^2|p-q|.$$

Таким образом, $\operatorname{dist}(x, L[p,q]) \leq K^2|p-q|$ для всех точек $x \in \gamma[p,q]$. Значит, для любой пары точек $x, y \in \gamma[p,q]$ имеем оценку

$$|x-y| \leq \operatorname{dist}(x, L[p,q]) + |p-q| + \operatorname{dist}(y, L[p,q]) \leq (1+2K^2)|p-q|,$$

т. е. $\operatorname{diam} \gamma[p,q] \leq (1+2K^2)|p-q|$.

Теорема доказана.

Замечание. Любое отображение из $BL(\mathbf{C}; K)$ K^2-квазиконформно. Поэтому, как отмечено в [3], ограниченность искривления K-билипшицево однородной компактной жордановой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ непосредственно вытекает из основной теоремы в [10], хотя и без конкретной оценки для константы C. В случае некомпактной жордановой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ ее квазиконформная однородность в $\mathbf{C}$ не дает квазиконформной однородности жордановой кривой $\gamma \cup \{\infty\}$, так как все отображения из $BL(\mathbf{C}; K)$, продолженные на $\overline{\mathbb{C}}$, имеют неподвижную точку ∞. Поэтому ограниченность искривления некомпактной жордановой кривой в условиях теоремы 2.1 не выводится непосредственно из теоремы Эркама [10].

§ 3. Условие ограниченного вращения

По общему определению гиперболической метрики в $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus \overline{\mathbb{R}}^k$ $(0 \le k < n)$ (см. [11, 2.4]) в случае $n = 2$, $k = 0$ для *гиперболического расстояния* $H(a, b)$ между точками a, b в проколотой плоскости $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ имеем формулу

$$H(a,b) = \inf_{\lambda} \int\limits_{w \in \lambda} \frac{|dz|}{|z|}, \tag{3.0}$$

где инфимум берется по всем спрямляемым дугам $\lambda \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$ с концами a и b. В дальнейшем $\mathscr{C}$ обозначает проколотую плоскость $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ с метрикой (3.0), $B_H(a, r)$ — открытый круг в $\mathscr{C}$ с центром a и гиперболическим радиусом r, $\operatorname{diam}_H(A)$ — гиперболический диаметр множества $A \subset \mathscr{C}$. Для жордановой дуги $\gamma[a, b] \subset \mathscr{C}$ через $\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, b]$ обозначаем приращение аргумента точки z, пробегающей эту дугу от a до b.

Определение 3.1. Открытая жорданова дуга $\gamma = \gamma(0, \infty) \subset \mathbf{C}$ с концами $0, \infty$ *удовлетворяет условию* $BR(\delta)$ (*ограниченного вращения*) с константой $\delta \in (0, 1/2)$, если для любых точек $a, b \in \gamma$ с гиперболическим расстоянием $H(a, b) \le \delta$ поддуга $\gamma[a, b] \subset \gamma$ гомотопна в $\mathscr{C}$ кратчайшей гиперболической геодезической $\lambda[a, b]$ с концами a и b, что эквивалентно равенству

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, b] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, b]. \tag{3.1.1}$$

(О гомотопности кривых на плоскости см., например, [12, гл. 2, § 4.16].)

Утверждение 3.2. *Пусть жорданова дуга $\gamma = \gamma(0, \infty)$ с концами $0, \infty$ удовлетворяет условию $BR(\delta)$ с константой $\delta \in (0, 1/2]$. Тогда для любой ее поддуги $\gamma[a, b] \subset \gamma$ с концами a, b и кратчайшей гиперболической геодезической $\lambda[a, b]$ с теми же концами a, b*

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, b] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, b] + 2\pi k \tag{3.2.1}$$

с целым k таким, что $|k| \le H(a, b)/\delta$.

Доказательство. Так как равенство (3.2.1) с некоторым целым k выполняется в любом случае, доказательство сводится к получению верхней оценки для $|k|$. Упорядочим точки дуги $\lambda[a, b]$ направлением от a к b и положим $T = \lambda[a, b] \cap \gamma[a, b]$.

Если $H(a, b) \le \delta$, то по условию $BR(\delta)$ в равенстве (3.2.1) $k = 0$. Пусть $H(a, b) > \delta$. Построим точку $c \in T \cap \overline{B}_H(a, \delta)$, наиболее удаленную от a (возможно, что $c = a$), и точку $a_1 \in T \setminus B(a, \delta)$, ближайшую к a (возможно, что $a_1 = b$). Так как $\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, c] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, c]$ (в силу $BR(\delta)$), имеем

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, a_1] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, c] + \Delta \operatorname{Arg} \gamma[c, a_1]. \tag{3.2.2}$$

Если $c = a_1$, то $\Delta \operatorname{Arg} \gamma[c, a_1] = 0 = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[c, a_1]$. Если $c \ne a_1$, то $\gamma[a, b]$ не пересекается с $\lambda(c, a_1)$ и жорданова кривая $\gamma[c, a_1] \cup \lambda(c, a_1)$ служит границей односвязной области. Поэтому

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[c, a_1] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[c, a_1] + 2\pi q_1$$

с целым $q_1 \in \{-1, 0, +1\}$ и (3.2.2) дает равенство

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, a_1] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, a_1] + 2\pi q_1.$$

Положим $a = a_0$. Если $H(a_1, b) < \delta$, то построение закончим. В противном случае, применив то же рассуждение к дуге $\gamma[a_1, b]$, построим точку $a_2 \in T$, для которой $a_0 < a_1 < a_2$, $H(a_1, a_2) \geq \delta$ и

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a_1, a_2] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a_1, a_2] + 2\pi q_2$$

с целым $q_2 \in \{-1, 0, +1\}$.

Продолжая этот процесс, получим в итоге конечную последовательность точек $a_0 < a_1 < \dots < a_m \leq b$ из множества T, для которых $H(a_m, b) < \delta$ и $\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a_{j-1}, a_j] = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a_{j-1}, a_j] + 2\pi q_j$ с целыми $q_j \in \{-1, 0, +1\}$ при всех $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, b] = \sum_{j=1}^{m} \Delta \operatorname{Arg} \gamma[a_{j-1}, a_j] + \Delta \operatorname{Arg} \gamma[a_m, b]$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a_{j-1}, a_j] + \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a_m, b] + 2\pi \sum_{j=1}^{m} q_j = \Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, b] + 2\pi k,$$

где $k = q_1 + \dots + q_m$ и $|k| \leq m$. Так как $H(a, b) \geq \sum\limits_{j=1}^{m} H(a_{j-1}, a_j) \geq m\delta$, то $m \leq H(a, b)/\delta$, следовательно, $|k| \leq m \leq H(a, b)/\delta$. Утверждение доказано.

Утверждение 3.3. *Пусть открытая жорданова дуга $\gamma = \gamma(0, \infty)$ в $\mathscr{C}$ однородна относительно семейства $BL_H(\gamma; K)$ K-билипшицевых в метрике H автоморфизмов γ. Тогда γ имеет ограниченное вращение $BR(\delta)$ с некоторым $\delta \in (0, 1/2]$.*

Доказательство. Фиксируем точку $e \in \gamma$ с $|e| = 1$. Пусть γ_0 — компонента связности пересечения $B_H(e, 1/K) \cap \gamma$, содержащая e. Тогда $d = \operatorname{dist}_H(e, \gamma \setminus \gamma_0) > 0$ и, положив $\delta_0 = \min\{1/2K, d/2\}$, можно утверждать, что для любого $z \in \gamma \cap \overline{B}_H(e, \delta_0)$ верно включение $\gamma[e, z] \subset \gamma_0 \subset B_H(e, 1/K)$.

Если $a, b \in \gamma$ и $H(a, b) \leq \delta_0/K$, то по условию однородности существует такое $f \in BL_H(\gamma; K)$, что $f(a) = e$. В силу гиперболической K-билипшицевости отображения f

$$f(\gamma \cap \overline{B}_H(a, \delta_0/K)) \subset \gamma \cap \overline{B}_H(e, \delta_0).$$

Следовательно, $f(\gamma[a, b]) \subset \gamma_0 \subset B_H(e, 1/K)$. Но тогда $\gamma[a, b] \subset B_H(a, 1)$. Так как $B_H(a, 1)$ — односвязная область на плоскости, не содержащая точку 0, в ней любые две дуги с общими концами гомотопны. В частности, дуга $\gamma[a, b]$ гомотопна в $\mathscr{C}$ дуге $\lambda[a, b]$ — кратчайшей геодезической с концами a и b. Это означает, что γ удовлетворяет условию $BR(\delta)$ с константой $\delta = \delta_0/K$. Утверждение доказано.

§ 4. Ограниченность искривления в гиперболической метрике

В $\mathscr{C}$ рассматриваем семейство $BL_H(\mathscr{C}; K)$ всех K-билипшицевых в гиперболической метрике автоморфизмов пространства $\mathscr{C}$, подсемейство $BL_{H+}(\mathscr{C}; K)$ отображений, сохраняющих ориентацию на плоскости, и подсемейство $BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K) \subset BL_{H+}(\mathscr{C}; K)$ отображений, переводящих заданную открытую жорданову дугу $\gamma \subset \mathscr{C}$ в себя с сохранением направления на ней.

Отображение $\exp : \mathbf{C} \to \mathscr{C}$, заданное формулой $z = e^w$, является локальной изометрией и осуществляет неразветвленное безграничное накрытие над $\mathscr{C}$ (см.

[13, гл. 1, 4.12(c)]). Любой автоморфизм $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ имеет *поднятие* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (см. [13, гл. 1, предложение 4.17]), т. е. является таким гомеоморфизмом, что $F(w+2\pi i) = F(w)+2\pi i$ и $e^{F(w)} = f(e^w)$ при всех $w \in \mathbf{C}$. Любые поднятия F_1 и F_2 гомеоморфизма f связаны тождеством $F_1(w) \equiv F_2(w)+2k\pi i$ с некоторым целым k, поэтому для заданной пары точек $w_0, w_1 \in \mathbf{C}$ с равенством $e^{w_1} = f(e^{w_0})$ существует единственное поднятие F, удовлетворяющее условию $F(w_0) = w_1$.

Любая жорданова дуга $\lambda \subset \mathscr{C}$ имеет поднятие $\Lambda \subset \mathbf{C}$ (см. [13, гл. 1, предложение 4.14]), являющееся жордановой дугой в $\mathbf{C}$, определенной единственным образом заданием пары точек $z_0 \in \lambda$ и $w_0 \in \exp^{-1}(z_0)$ с условием $w_0 \in \Lambda$.

Утверждение 4.1. *Пусть открытая жорданова дуга $\gamma = \gamma(0,\infty)$ с концами $0,\infty$ однородна относительно семейства $BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K)$. Тогда любое ее поднятие $\Gamma \subset \mathbf{C}$ является некомпактной жордановой кривой в $\mathbf{C}$, однородной относительно семейства $BL^*(\Gamma \subset \mathbf{C}; K)$.*

Доказательство. Пусть сохраняющий ориентацию гиперболически K-билипшицев гомеоморфизм $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ переводит γ в себя с сохранением направления на γ. Покажем, что любое его поднятие $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ будет K-билипшицевым в евклидовой метрике. В силу выпуклости $\mathbf{C}$ для этого достаточно доказать локальную K-билипшицевость гомеоморфизма F.

Пусть $w_1 \in \mathbf{C}$ и $w_2 = F(w_1)$. Тогда найдется такая окрестность V_2 точки w_2, что ограничение $g_2 = \exp|V_2$ осуществляет изометрию $g_2 : V_2 \to \exp(V_2) \subset \mathscr{C}$. Имеется такая окрестность V_1 точки z_1, что $F(V_1) \subset V_2$ и ограничение $g_1 = \exp|V_1$ осуществляет изометрию $g_1 : V_1 \to \exp(V_1) \subset \mathscr{C}$. Так как F — поднятие отображения f, имеем тождество $e^{F(w)} \equiv f(e^w)$, означающее, что $g_2 \circ F = f \circ g_1$ для всех $w \in V_1$, т. е. $F|V_1 = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$. В силу изометричности отображений g_1, g_2^{-1} и гиперболической K-билипшицевости отображения f отображение $F|V_1$ будет K-билипшицевым в евклидовой метрике. Таким образом, гомеоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ является локально K-билипшицевым и, следовательно, (глобально) K-билипшицевым на $\mathbf{C}$. Так как изометрии g_1 и g_2 сохраняют ориентацию, композиция $g_2^{-1} \circ f \circ g_1$ также сохраняет ориентацию. Следовательно, гомеоморфизм F сохраняет ориентацию в плоскости $\mathbf{C}$.

Если Γ — поднятие дуги γ, то ограничение $g = \exp|\Gamma$ является гомеоморфизмом $g : \Gamma \to \gamma$. Для любого $w \in \Gamma$ имеем равенство $g(F(w)) = f(g(w)) \in \gamma$. Поэтому $F(w) = g^{-1}(f(g(w))) \in \Gamma$. Значит, гомеоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ сохраняет некомпактную жорданову кривую Γ.

Напомним, что направление на жордановой дуге (компактной или открытой) задается указанием одного из двух классов гомотопных параметризаций этой дуги. Гомеоморфизм $F : \Gamma \to \Gamma$ переводит каждую параметризацию $\varphi : (0,1) \to \Gamma$ дуги Γ в параметризацию $F \circ \varphi$ этой дуги, и требуется показать, что эти параметризации гомотопны, т. е. $\varphi \sim F \circ \varphi$. Так как по условию гомеоморфизм f сохраняет направление на γ, параметризации $g \circ \varphi$ и $f \circ g \circ \varphi$ дуги γ гомотопны, т. е. $g \circ \varphi \sim f \circ g \circ \varphi$. Гомеоморфизм $g^{-1} : \Gamma \to \gamma$ сохраняет отношение гомотопности параметризаций, поэтому

$$\varphi = g^{-1} \circ g \circ \varphi \sim g^{-1} \circ f \circ g \circ \varphi = F \circ \varphi,$$

т. е. $F \circ \varphi \sim \varphi$. Это и означает, что $F : \Gamma \to \Gamma$ сохраняет направление на Γ.

Таким образом, для любого $f \in BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K)$ его поднятие F принадлежит классу $BL^*(\Gamma \subset \mathbf{C}; K)$. Для любой пары точек $a, b \in \Gamma$ существует такое $f \in BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K)$, что $f(g^{-1}(a)) = g^{-1}(b)$. Тогда $F(a) = g \circ f \circ g^{-1}(a) =$

$g \circ g^{-1}(b) = b$, что и означает однородность Γ относительно семейства $BL^*(\Gamma \subset \mathbf{C}; K)$. Утверждение доказано.

Теорема 4.2. *Пусть открытая жорданова дуга $\gamma \subset \mathscr{C}$ с концами $0, \infty$ имеет ограниченное вращение $BR(\delta)$ и однородна относительно семейства $BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K)$. Тогда γ имеет ограниченное искривление в гиперболической метрике с константой $C \leq (1 + 2K^2)(1 + 2\pi/\delta)$.*

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь поднятие $\Gamma \subset \mathbf{C}$ дуги γ. В силу утверждения 4.1 некомпактная жорданова кривая Γ однородна относительно семейства $BL^*(\Gamma \subset \mathbf{C}; K)$ и по теореме 2.1 имеет ограниченное евклидово искривление с константой $1 + 2K^2$. Рассмотрим гомеоморфизм $g = \exp|\Gamma : \Gamma \to \gamma$. Для дуги $\gamma[a, b]$ с концами $a, b \in \gamma$ и ее поднятия $g^{-1}(\gamma[a, b]) = \Gamma[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ имеем оценку

$$\operatorname{diam} g^{-1}(\gamma[a, b]) \leq (1 + 2K^2)|g^{-1}(a) - g^{-1}(b)|. \tag{4.2.1}$$

В силу локальной изометричности отображение $\exp : \mathbf{C} \to \mathscr{C}$ 1-липшицево, поэтому $\operatorname{diam}_H \gamma[a, b] \leq \operatorname{diam} \Gamma[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$. С учетом (4.2.1) нужно получить оценку для $|g^{-1}(a) - g^{-1}b|$. Пусть $\lambda[a, b]$ — кратчайшая геодезическая с концами a, b и $\Lambda[g^{-1}(a), b^*]$ — ее поднятие, $\exp(b^*) = b$. Из условия $BR(\delta)$ и утверждения 3.2 вытекает равенство

$$\begin{aligned} g^{-1}(b) - g^{-1}(a) &= \operatorname{Ln} \frac{|b|}{|a|} + i(\Delta \operatorname{Arg} \gamma[a, b]) \\ &= \operatorname{Ln} \frac{|b|}{|a|} + i(\Delta \operatorname{Arg} \lambda[a, b] + 2\pi k) = b^* - g^{-1}(a) + 2\pi k i, \end{aligned}$$

где $|k| \leq H(a, b)/\delta$. Следовательно,

$$|g^{-1}(b) - g^{-1}(a)| \leq |b^* - g^{-1}(a)| + 2\pi H(a, b)/\delta = H(a, b)(1 + 2\pi/\delta).$$

Тогда из (4.2.1) следует требуемая оценка гиперболического диаметра дуги $\gamma[a, b]$:

$$\operatorname{diam}_H \gamma[a, b] \leq (1 + 2K^2)(1 + 2\pi/\delta)H(a, b).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть открытая жорданова дуга $\gamma \subset \mathscr{C}$ с концами $0, \infty$ однородна относительно семейства $BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; K)$. Тогда γ имеет ограниченное искривление в гиперболической метрике с некоторой константой C, которая в общем случае зависит от γ.*

Доказательство. По утверждению 3.3 жорданова дуга γ имеет ограниченное вращение $BR(\delta)$ с некоторой константой $\delta > 0$, зависящей от γ. Требуемое утверждение непосредственно вытекает из теоремы 4.2.

Пример. Логарифмическая спираль

$$\gamma = \{z(t) = e^{(1+ki)t} : -\infty < t < +\infty\}$$

с произвольно большим параметром $k > 0$ однородна относительно семейства $BL^*_H(\gamma \subset \mathscr{C}; 1)$ гиперболических изометрий и имеет ограниченное искривление в гиперболической метрике, которое, однако, существенно зависит от параметра k. Этот пример показывает, что не существует такого C^*, зависящего лишь от K, чтобы любая открытая дуга, удовлетворяющая условиям теоремы 4.3, имела в гиперболической метрике ограниченное искривление с константой $\leq C^*$.

§ 5. Мёбиус-билипшицевы отображения

В этом параграфе вместо гиперболически билипшицевых автоморфизмов мы используем отображения, введенные в [9, § 5] под названием «конформно билипшицевы отображения».

Напомним (см. [14]), что гомеоморфизм $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ метрических пространств называется *η-квазимёбиусовым*, если для любой четверки попарно различных точек (*тетрады*) $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathscr{M}$ выполняется неравенство

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|_{\mathscr{M}'} |f(x_3) - f(x_4)|_{\mathscr{M}'}}{|f(x_1) - f(x_3)|_{\mathscr{M}'} |f(x_2) - f(x_4)|_{\mathscr{M}'}} \le \eta\left(\frac{|x_1 - x_2|_{\mathscr{M}} |x_3 - x_4|_{\mathscr{M}}}{|x_1 - x_3|_{\mathscr{M}} |x_2 - x_4|_{\mathscr{M}}}\right), \tag{5.0}$$

где *оценка искажения* η — заданный гомеоморфизм числовой полуоси $[0, +\infty)$ на себя. В частном случае, когда $\eta(t) = Kt$ с $K \ge 1$, такое отображение будем называть *K-мёбиус-билипшицевым.* При $K = 1$ это будут мёбиусовы отображения (отображения, сохраняющие абсолютное двойное отношение). Семейство $MBL(\mathscr{M}; K)$ всех K-мёбиус-билипшицевых автоморфизмов пространства $\mathscr{M}$ инвариантно относительно композиций с мёбиусовыми автоморфизмами. В дальнейшем наделяем пространство $\overline{\mathbb{R}}^n$ хордовым расстоянием (см. [11, (1.15)]) $\sigma(x, y)$ и отождествляем $\overline{\mathbb{R}}^2$ с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$.

Утверждение 5.1. *Пусть гомеоморфизм $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ имеет неподвижные точки* 0 *и* ∞.

(1) *Если $f \in MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; K)$, то для любых $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

$$\frac{1}{K} \frac{|x - y|}{|x|} \le \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)|} \le K \frac{|x - y|}{|x|}. \tag{5.1.1}$$

(2) *Если* (5.1.1) *выполняется для любой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $f \in MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; K^4)$.*

Доказательство. Пусть $f \in MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; K)$ и $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Применив (5.0) к тетраде $x, y, 0, \infty$, получим правую часть оценки (5.1.1):

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)|} = \frac{\sigma(f(x), f(y) \cdot \sigma(f(0), f(\infty)))}{\sigma(f(x), f(0)) \cdot \sigma(f(y), f(\infty))} \le K \frac{\sigma(x, y) \cdot \sigma(0, \infty)}{\sigma(x, 0) \cdot \sigma(y, \infty)} = K \frac{|x - y|}{|x|}.$$

Такое же вычисление для тетрады $x, 0, y, \infty$ приводит к левой части оценки (5.1.1).

Пусть оценка (5.1.1) выполняется для всех $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Для произвольной тетрады $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, записав неравенства

$$|f(a) - f(b)| \le K|a - b| \frac{|f(a)|}{|a|}, \quad |f(c) - f(d)| \le K|c - d| \frac{|f(d)|}{|d|}$$

и

$$|f(a) - f(c)| \ge (1/K)|a - c| \frac{|f(a)|}{|a|}, \quad |f(b) - f(d)| \ge (1/K)|b - d| \frac{|f(d)|}{|d|},$$

получим требуемую оценку

$$\frac{\sigma(f(a), f(b)) \cdot \sigma(f(c), f(d))}{\sigma(f(a), f(c)) \cdot \sigma(f(b), f(d))} = \frac{|f(a) - f(b)| \cdot |f(c) - f(d)|}{|f(a) - f(c)| \cdot |f(b) - f(d)|} \le K^4 \frac{|a - b| \cdot |c - d|}{|a - c| \cdot |b - d|} = K^4 \frac{\sigma(a, b) \cdot \sigma(c, d)}{\sigma(a, c) \cdot \sigma(b, d)}.$$

В случае, когда одна из точек тетрады есть 0 (или ∞), заменяем ее переменной точкой $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, используем полученную оценку для конечных тетрад в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и переходим к пределу при $x \to 0$ (или при $x \to \infty$). В силу непрерывности абсолютного двойного отношения в $\overline{\mathbb{R}}^n$, придем в пределе к требуемой оценке для исходной тетрады. Утверждение доказано.

Утверждение 5.2. *В пространстве* $\overline{\mathbb{R}}^n$

$$\bigcup_{K\geq 1} MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; K) = \bigcup_{K'\geq 1} BL(\overline{\mathbb{R}}^n; K'). \tag{5.2.1}$$

Доказательство. Пусть $f \in BL(\overline{\mathbb{R}}^n; K')$ с некоторым $K' \geq 1$. Тогда $(1/K')\sigma(x,y) \leq \sigma(f(x), f(y)) \leq K' \cdot \sigma(x,y)$ для всех $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^n$, поэтому для любой тетрады $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{R}}^n$

$$\frac{\sigma(f(z_1), f(z_2)) \cdot \sigma(f(z_3), f(z_4))}{\sigma(f(z_1), f(z_3)) \cdot \sigma(f(z_2), f(z_4))} \leq (K')^4 \frac{\sigma(z_1, z_2) \cdot \sigma(z_3, z_4)}{\sigma(z_1, z_3) \cdot \sigma(z_2, z_4)},$$

т. е. $BL(\overline{\mathbb{R}}^n; K') \subset MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; (K')^4)$ при любом $K' \geq 1$.

Пусть $f \in MBL(\overline{\mathbb{R}}^n; K)$. Для мёбиусова преобразования $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, переводящего точки $f(0), f(e), f(\infty)$ (где $|e| = 1$) соответственно в точки $0, e, \infty$, композиция $g := \mu \circ f$ является K-мёбиус-билипшицевым отображением с неподвижными точками $0, e, \infty$. Для любой точки $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ рассмотрим тетраду $0, a, e, \infty$ и получим оценку

$$|g(a)| = \frac{\sigma(0, g(a)) \cdot \sigma(e, \infty)}{\sigma(0, e) \cdot \sigma(g(a), \infty)} \leq K \frac{\sigma(0, a) \cdot \sigma(e, \infty)}{\sigma(0, e) \cdot \sigma(a, \infty)} = K|a|. \tag{5.2.2}$$

Для различных точек $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ с учетом утверждения 5.1(1) и оценки (5.2.2) получаем неравенство

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y| \frac{|g(x)|}{|x|} \leq K^2 |x - y|.$$

Применив то же рассуждение к обратному гомеоморфизму g^{-1}, получим оценку $|g(x) - g(y)| \geq (1/K^2)|x - y|$. Таким образом, отображение g K^2-билипшицево на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в евклидовой метрике. В силу непрерывности расстояния оно K^2-билипшицево в евклидовой метрике на всем $\mathbb{R}^n$. Тогда g K^4-билипшицево в хордовой метрике на $\overline{\mathbb{R}}^n$. Действительно, для любой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполняются неравенства $|g(x)| \geq (1/K)|x|$, $|g(y)| \geq (1/K)|y|$. Поэтому

$$\frac{\sigma(g(x), g(y))}{\sigma(x, y)} = \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \sqrt{\frac{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}{(1 + |g(x)|^2)(1 + |g(y)|^2)}}$$

$$\leq K^2 \sqrt{\frac{(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)}{K^{-4}(K^2 + |x|^2)(K^2 + |y|^2)}} \leq K^4.$$

Любое мёбиусово преобразование μ $L(\mu)$-билипшицево в хордовой метрике на $\overline{\mathbb{R}}^n$, однако не существует единой верхней оценки для $L(\mu)$, не зависящей от выбора μ. Поэтому композиция $f = \mu^{-1} \circ g$ является K'-билипшицевым гомеоморфизмом в хордовой метрике на $\overline{\mathbb{R}}^n$ с $K' = K^4 L(\mu^{-1})$, но не существует единой верхней оценки для K', зависящей только от K. Тем не менее $f \in BL(\overline{\mathbb{R}}^n; K')$, и, следовательно, равенство (5.2.1) доказано.

Таким образом, в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$ семейство мёбиус-билипшицевых отображений совпадает с семейством билипшицевых отображений, но имеет иное (мёбиусово-инвариантное) определение коэффициента билипшицевости.

Лемма 5.3. *Любой K-мёбиус-билипшицев автоморфизм f сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $0, \infty$ K-билипшицев в гиперболической метрике на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Пусть заданы произвольно малое $\varepsilon > 0$ и точка z_0. Тогда найдется связная открытая окрестность U точки z_0 такая, что

(1) любая кратчайшая гиперболическая геодезическая с концами из U содержится в U (выпуклость U в гиперболической метрике);

(2) при любом $z \in U$ выполняется оценка $(1+\varepsilon)^{-1} \le |z|/|z_0| \le (1+\varepsilon)$.

Рассмотрев тетраду $0, z, z_0, \infty$, получим для любого $z \in U$ неравенство

$$\frac{|f(z)|}{|f(z_0)|} = \frac{\sigma(0, f(z)) \cdot \sigma(f(z_0), \infty)}{\sigma(0, f(z_0)) \cdot \sigma(f(z), \infty)} \le K \frac{\sigma(0, z) \cdot \sigma(z_0, \infty)}{\sigma(0, z_0) \cdot \sigma(z, \infty)} = K \frac{|z|}{|z_0|} \le 1 + \varepsilon. \quad (5.3.1)$$

Такое же вычисление для тетрады $0, z_0, z, \infty$ приводит к оценке

$$\frac{|f(z_0)|}{|f(z)|} \le 1 + \varepsilon. \quad (5.3.2)$$

Если $x, y \in U$, то (5.1.1) и (5.3.1) приводят к оценке

$$|f(x) - f(y)| \le K \frac{|f(x)|}{|x|}|x - y| = K \frac{|f(x)|}{|f(z_0)|} \cdot \frac{|z_0|}{|x|} \cdot \frac{|f(z_0)|}{|z_0|}|x - y|$$
$$\le K(1+\varepsilon)^2 \frac{|f(z_0)|}{|z_0|}|x - y|. \quad (5.3.3)$$

Это означает, что отображение $f|U$ липшицево в евклидовой метрике с константой $L := K(1+\varepsilon)^2 |f(z_0)|/|z_0|$ и, следовательно, переводит спрямляемые кривые в спрямляемые кривые. Тогда для любой спрямляемой дуги $\lambda \subset U$ с концами $x, y \in U$ имеем оценку (используем (5.3.2), L-липшицевость отображения $f|U$ и (5.3.1))

$$H(f(x), f(y)) \le \int_{z \in f(\lambda)} \frac{|dz|}{|z|} \le \int_{z \in f(\lambda)} |dz| \cdot \frac{(1+\varepsilon)}{|f(z_0)|} = \frac{(1+\varepsilon)}{|f(z_0)|} \mathscr{H}^1(f(\lambda))$$
$$\le K \frac{(1+\varepsilon)^3}{|z_0|} \int_{z \in \lambda} |dz| = K(1+\varepsilon)^4 \int_{z \in \lambda} \frac{|dz|}{|z|}.$$

Взяв в правой части этого неравенства инфимум по всем спрямляемым дугам λ с концами x и y, приходим к оценке

$$H(f(x), f(y)) \le K(1+\varepsilon)^4 H(x, y).$$

В силу произвольности выбора точки z_0 получаем гиперболическую локальную $K(1+\varepsilon)^4$-липшицевость гомеоморфизма $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, из которой следует глобальная $K(1+\varepsilon)^4$-липшицевость f на $\mathscr{C}$. Ввиду произвольного задания $\varepsilon > 0$ это означает K-липшицевость отображения f в гиперболической метрике на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Такой же вывод верен и для обратного гомеоморфизма f^{-1}, т. е. $f \in BL(\mathscr{C}; K)$. Лемма доказана.

Следующее утверждение — частный случай общей теоремы о сходимости последовательностей μ-квазимёбиусовых отображений (см. [15, теоремы 2.3.9(1), 2.3.2]).

Утверждение 5.4. *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность* K*-мёбиус-билипшицевых автоморфизмов римановой сферы* $\overline{\mathbb{C}}$ *с неподвижными различными точками* $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$. *Если имеется точка* $c \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$ *такая, что* $f_n(c) \to c^* \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$, *то существует подпоследовательность* $\{f_{n.k}\} \subset \{f_n\}$, *сходящаяся равномерно в хордовой метрике на* $\overline{\mathbb{C}}$ *к* K*-мёбиус-билипшицеву автоморфизму* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. *При этом если все отображения* f_n *сохраняют (обращают) ориентацию на сфере, то и предельное отображение сохраняет (соответственно обращает) ориентацию на* $\overline{\mathbb{C}}$.

§ 6. Мёбиус-билипшицево однородные дуги

Следующая лемма является мёбиус-билипшицевым аналогом утверждений [3, лемма 2.5] и [4, лемма 2.1], схема доказательства которых переносится на рассматриваемую ситуацию.

Лемма 6.1. *Пусть* $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ — *открытая жорданова дуга с концами* 0, ∞. *Пусть* $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ — *семейство всех таких* K*-мёбиус-билипшицевых автоморфизмов сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, *у которых* $f(\gamma) = \gamma$, *и подсемейство* $MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K) \subset MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ *состоит из тех автоморфизмов сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, *у которых* $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$.

Если γ *однородна относительно семейства* $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, *то она однородна*

(1) *относительно семейства* $MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$,

(2) *относительно семейства* $MBL^0_+(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^4)$ *всех тех* $f \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^4)$, *которые сохраняют ориентацию на сфере* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. (1) Пусть $p \in \gamma$ и L — множество всех точек $x \in \gamma$, для которых не существует отображения $f \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ такого, что $f(p) = x$. Если $L = \varnothing$, то для любой пары точек $x, y \in \gamma$ существуют такие $f_1, f_2 \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, что $x = f_1(p)$, $y = f_2(p)$. Тогда $f = f_2 \circ f_1^{-1} \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$, $f(x) = y$, т. е. в этом случае утверждение (1) истинно.

Если $L \neq \varnothing$, то, будучи собственным подмножеством ($p \notin L$) связного множества γ, L имеет в нем непустую границу ∂L [16, § 46.1, теорема 1]). Значит, найдутся $q \in \partial L$ и последовательность $\{q_n\} \subset \gamma \setminus L$, сходящаяся к q. Для каждого q_n существует $f_n \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ такое, что $f(p) = q_n$. В силу утверждения 5.4 можно считать, перейдя при необходимости к подпоследовательности, что $\{f_n\}$ сходится равномерно в хордовой метрике на $\overline{\mathbb{C}}$ к автоморфизму $f \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, у которого $f(p) = q$. Стало быть, $q \notin L$, поэтому имеется последовательность точек $\{w_n\} \subset L$, сходящаяся к q, при этом для каждой точки w_n существует $g_n \in MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ такое, что $g_n(0) = \infty$, $g_n(\infty) = 0$ и $g_n(p) = w_n$. Воспользовавшись утверждением 5.4 и перейдя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{g_n\}$ равномерно на $\overline{\mathbb{C}}$ сходится к отображению $g \in MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ такому, что $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$ и $g(p) = q$.

Для произвольно заданной точки $y \in \gamma$ возьмем отображение $\varphi \in MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ такое, что $\varphi(q) = y$. Если $\varphi \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, то положим $h = \varphi \circ f$. Если $\varphi(0) = \infty$ и $\varphi(\infty) = 0$, то полагаем $h = \varphi \circ g$. В обоих случаях $h \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$ и $h(p) = y$. В силу произвольного задания точек $p, y \in \gamma$ получаем однородность γ относительно семейства $MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$. Таким образом, утверждение (1) в этой лемме доказано.

Утверждение (2) доказывается аналогичным рассуждением с заменой исходного семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ на $MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$. Лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2. *Пусть открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с концами $0, \infty$ однородна относительно семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$. Тогда для любой поддуги $\tau \subset \gamma$ с концами $a, b \in \{z : 0 < r \le |z| \le R < +\infty\}$ выполняется включение*

$$\tau \subset \{z : r/K^2 \le |z| \le K^2 R\}. \tag{6.2.1}$$

Доказательство. Пусть концы дуги τ помечены так, что точки $0, a, b, \infty$ расположены последовательно на дуге γ. На поддуге $\gamma(0, b]$ выберем точку b^* так, что $|b^*| = \max\{|z|; z \in \gamma[0, b]\}$. По лемме 6.1 существует отображение $f \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$, у которого $f(b) = b^*$. Тогда $f(\gamma(0, b]) = \gamma(0, b^*] \subset \overline{B}(0, |b^*|)$. В частности, $|f(b^*)| \le |b^*|$. Применив к тетраде $0, b, b^*, \infty$ условие K^2-мёбиус-билипшицевости отображения f, получим неравенство

$$1 \le \frac{|b^*|}{|f(b^*)|} = \frac{|f(b)|}{|f(b^*)|} \le K^2 \frac{|b|}{|b^*|},$$

означающее, что $|b^*| \le K^2 |b| \le K^2 R$. Следовательно, $\tau \subset \overline{B}(0, K^2 R)$.

Выберем точку $a^* \in \gamma[a, \infty)$ такую, что $|a^*| = \min\{|z| : z \in \gamma[a, \infty)\}$. Тогда $\tau \subset \mathbf{C} \setminus B(0, |a^*|)$. По лемме 6.1 существует $f \in MBL^0(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K^2)$, у которого $f(a) = a^*$. Тогда $f(\gamma[a, \infty)) = \gamma[a^*, \infty)$ и, в частности, $|f(a^*)| \ge |a^*|$. Применив к тетраде $0, a, a^*, \infty$ условие K^2-мёбиус-билипшицевости отображения f^{-1}, получим неравенство

$$\frac{|a|}{|a^*|} \le K^2 \frac{|f(a)|}{|f(a*)|} = K^2 \frac{|a^*|}{|f(a^*)|} \le K^2,$$

из которого следует, что $|a^*| \ge |a|/K^2 \ge r/K^2$. Поэтому $\tau \subset \mathbf{C} \setminus B(0, r/K^2)$. Таким образом, требуемое включение (6.2.1) доказано.

Теорема 6.3. *Если открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с концами $0, \infty$ имеет ограниченное вращение $BR(\delta)$ и однородна относительно семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, то для евклидова диаметра любой поддуги $\gamma[a, b] \subset \gamma$ справедлива оценка*

$$\operatorname{diam} \gamma[a, b] \le 32K^4(1 + 2K^8)(1 + 2\pi/\delta)|a - b|.$$

Доказательство. Шаг 1. Если поддуга $\tau \subset \gamma$ имеет концы a, b, удовлетворяющие условию $2|a| \le |b|$, то для ее евклидова диаметра верна оценка

$$\operatorname{diam} \tau \le 4K^2 |a - b|. \tag{6.3.1}$$

Действительно, концы дуги τ лежат в кольце $\{z : |b|/2 \le |z| \le |b|\}$. Тогда по лемме 6.2, дуга τ лежит в круге $\overline{B}(0, K^2|b|)$, поэтому $\operatorname{diam} \tau \le 2K^2|b|$. Так как $|b - a| \ge |b| - |a| \ge |b|/2$, то $\operatorname{diam} \tau \le 4K^2|b - a|$.

Шаг 2. Пусть поддуга $\tau \subset \gamma$ с концами p, q не удовлетворяет условию, рассмотренному на шаге 1, т. е. $(1/2)|p| < |q| < 2|p|$. Покажем, что тогда для евклидова диаметра этой дуги справедлива оценка

$$\operatorname{diam} \tau \le 4K^4(1 + 2K^8)(1 + 2\pi/\delta)|p - q|. \tag{6.3.2}$$

Действительно, по лемме 6.2 дуга τ лежит в кольце $T := \{z : |p|/2K^2 \le |z| \le 2K^2|p|\}$. Для любой спрямляемой дуги $\lambda \subset T$ ее евклидова длина $\operatorname{length} \lambda$ и ее длина $\operatorname{length}_H \lambda$ в гиперболической метрике связаны неравенствами

$$\frac{1}{2K^2|p|} \operatorname{length} \lambda \le \operatorname{length}_H \lambda \le \frac{2K^2}{|p|} \operatorname{length} \lambda. \tag{6.3.3}$$

Для любой пары точек $x, y \in \tau$, используя левую часть оценки (6.3.3), получаем неравенство

$$|x-y| \le 2K^2|p|H(x,y) \le 2K^2|p|\operatorname{diam}_H \tau.$$

Так как это неравенство верно для всех $x, y \in \tau$, то $\operatorname{diam}\tau \le 2K^2|p|\operatorname{diam}_H \tau$.

Используя лемму 6.1(2) и теорему 4.2, приходим к оценке

$$\operatorname{diam}\tau \le 2K^2|p|(1+2K^8)(1+2\pi/\delta)H(p,q). \tag{6.3.4}$$

Случай (a). Пусть $|p-q| \le |p|/2$. Из правой части оценки (6.3.3), примененной к прямолинейному отрезку L с концами p, q ($L \subset T$ благодаря условию $|q-p| \le |p|/2$), выводим неравенство $H(p,q) \le 2K^2|p-q|/|p|$. Поэтому из (6.3.4) вытекает оценка

$$\operatorname{diam}\tau \le 4K^4(1+2K^8)(1+2\pi/\delta)|p-q|. \tag{6.3.5}$$

Случай (b). Пусть $|p-q| > |p|/2$. Так как $H(p,q) \le \pi + \operatorname{Ln} 4$, то (6.3.4) и неравенство $|p| < 2|p-q|$ дают оценку

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\tau &\le 2K^2(1+2K^8)|p|(\pi+\operatorname{Ln}4)(1+2\pi/\delta)\\ &\le 4K^2(1+2K^8)(\pi+\operatorname{Ln}4)|p-q|(1+2\pi/\delta)\\ &< 32K^2(1+2K^8)(1+2\pi/\delta)|p-q|. \end{aligned}\tag{6.3.6}$$

Соединяя (6.3.1), (6.3.5) и (6.3.6), получаем оценку $\operatorname{diam}\tau \le C|p-q|$ с константой

$$\begin{aligned}C = \max\{4K^2, 4K^4(1+2K^8)(1+2\pi/\delta), 32K^2(1+2K^8)(1+2\pi/\delta)\}\\ \le 32K^4(1+2K^8)(1+2\pi/\delta).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 6.4. *Если открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с концами $0, \infty$ однородна относительно семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, то она имеет ограниченное искривление с некоторой константой C, зависящей в общем случае от γ.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 5.3, утверждения 3.3 и теоремы 6.3.

§ 7. Ограниченное искривление дуг по Рикману

Недостаток используемого в § 5 понятия ограниченного искривления в том, что константа C в его определении (1.1) не инвариантна при мёбиусовых преобразованиях пространства. Свойством мёбиусовой инвариантности обладает характеристика ограниченного искривления дуги (или кривой) по Рикману, введенная в [17].

Жорданова дуга или жорданова кривая $\gamma \subset \mathscr{M}$ в метрическом пространстве имеет *ограниченное искривление по Рикману*, если существует такая константа $RT(\gamma) \ge 1$, что для любой четверки x_1, x_2, x_3, x_4 попарно различных точек, расположенных последовательно на γ, выполняется оценка

$$\frac{|x_1-x_2|_{\mathscr{M}}|x_3-x_4|_{\mathscr{M}} + |x_1-x_4|_{\mathscr{M}}|x_2-x_3|_{\mathscr{M}}}{|x_1-x_3|_{\mathscr{M}}|x_2-x_4|_{\mathscr{M}}} \le RT(\gamma). \tag{7.0}$$

Из свойств рикманова искривления дуги или кривой $\gamma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ отметим следующие:

(1) рикманова характеристика искривления $RT(\gamma)$ не меняется при мёбиусовых преобразованиях $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, т. е. $RT(\mu(\gamma)) = RT(\gamma)$;

(2) если дуга или кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ имеет ограниченное евклидово искривление с константой C, то она имеет ограниченное рикманово искривление $RT(\gamma) \leq 4C^2$ (см. [18, утверждения 2.2.2, 2.2.3]);

(3) равенство $RT(\gamma) = 1$ равносильно тому, что жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ является дугой окружности (соответственно жорданова кривая $\gamma \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ является окружностью) — это известная теорема Птолемея;

(4) для любой жордановой дуги $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с ограниченным рикмановым искривлением $RT(\gamma)$ существует квазиконформный гомеоморфизм $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, переводящий γ в дугу окружности, с верхней оценкой для коэффициента квазиконформности $K[f]$, зависящей только от $RT(\gamma)$ (см. [17]).

Условие ограниченного вращения, введенное в § 3, сформулируем в мёбиусово-инвариантной форме.

Определение 7.1. Открытая жорданова дуга $\gamma(a, b) \subset \overline{\mathbb{C}}$ с различными концами a, b *удовлетворяет условию* $BR(\delta)$ с константой $\delta \in (0, 1/2]$ (используем запись $\gamma(a, b) \in BR(\delta)$), если любая ее поддуга $\gamma[p, q] \subset \gamma(a, b)$, концы которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{\sigma(p, q) \cdot \sigma(a, b)}{\sigma(a, p) \cdot \sigma(b, q)} \leq \delta, \tag{7.1.1}$$

гомотопна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$ некоторой дуге $\lambda[p, q]$, у которой для любой точки $z \in \lambda[p, q]$ выполняется оценка

$$\frac{\sigma(p, z) \cdot \sigma(a, b)}{\sigma(a, p) \cdot \sigma(z, q)} \leq \delta. \tag{7.1.2}$$

Из инвариантности абсолютного двойного отношения относительно мёбиусовых автоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$ следует, что для любого мёбиусова преобразования μ из $\gamma(a, b) \in BR(\delta)$ вытекает $\mu(\gamma(a, b)) \in BR(\delta)$.

Теорема 7.2. *Если открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с различными концами удовлетворяет условию $BR(\delta)$ с $0 < \delta \leq 1/2$ и однородна относительно семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ мёбиус-билипшицевых автоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$, то она имеет ограниченное искривление по Рикману с константой*

$$RT(\gamma) \leq 4(32K^4(1 + 2K^8)(1 + 2\pi/\delta))^2. \tag{7.2.1}$$

Доказательство. Построим какое-нибудь мёбиусово преобразование $\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, переводящее концы дуги γ в точки 0 и ∞. В силу свойства (2) достаточно доказать, что дуга $\tau = \mu(\gamma)$ имеет ограниченное евклидово искривление с константой

$$C \leq 32K^4(1 + 2K^8)(1 + 2\pi/\delta). \tag{7.2.2}$$

Покажем, что τ удовлетворяет условию $BR(\delta)$ в определении 3.1. Пусть $a, b \in \tau$, $H(a, b) \leq \delta$ и λ — кратчайшая гиперболическая геодезическая с концами a, b. Не ограничивая общности, можно считать, что $|a| \leq |b|$. Тогда

$$H(a, b) = \int\limits_{z \in \lambda_0} |dz|/|z| \geq \frac{\operatorname{length} \lambda_0}{|b|} \geq \frac{|a - b|}{|b|}.$$

Таким образом, $|a - b|/|b| \leq \delta$ и в силу условия $BR(\delta)$ дуга $\tau[a, b]$ гомотопна в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ некоторой дуге $\lambda'[a, b]$, у которой $|z - b|/|b| \leq \delta$ для любого $z \in \lambda'[a, b]$.

Так как $\delta \le 1/2$, то $\lambda'[a,b] \subset \overline{B}(b,|b|/2)$ и, следовательно, $\lambda'[a,b]$ гомотопна в $\mathscr{C}$ дуге $\lambda[a,b]$ — кратчайшей гиперболической геодезической с концами a, b. Стало быть, $\tau[a,b] \sim \lambda[a,b]$ в $\mathscr{C}$.

Поскольку $\tau = \mu(\gamma)$ однородна относительно семейства $MBL(\tau \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ и, как показано выше, имеет ограниченное вращение $BR(\delta)$ в смысле определения 3.1, по теореме 6.3 она имеет ограниченное евклидово искривление с требуемой константой (7.2.2). Теорема доказана.

Следствие 7.3. *Если открытая жорданова дуга $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ с различными концами однородна относительно семейства $MBL(\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$ мёбиус-билипшицевых автоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$, то она имеет ограниченное искривление по Рикману.*

Доказательство. Построив мёбиусово преобразование $\mu : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, переводящее концы дуги γ в точки 0 и ∞, рассмотрим дугу $\tau = \mu(\gamma)$ с концами $0, \infty$. Так как τ однородна относительно семейства $MBL(\tau \subset \overline{\mathbb{C}}; K)$, по следствию 6.4 она имеет ограниченное евклидово искривление. Тогда по свойству (2) дуга τ, а значит, и дуга $\gamma = \mu^{-1}(\tau)$ имеют ограниченное рикманово искривление. Следствие доказано.

Заметим, что в условиях следствия 7.3, не имея верхней оценки для ограниченного вращения дуги γ, мы не можем указать верхнюю оценку для $RT(\gamma)$, зависящую только от K.

Автор чрезвычайно признателен рецензенту за сделанные им замечания, с учетом которых удалось значительно улучшить текст этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rogers J. T.* Homogeneous continua // Topology Proc. 1983. V. 8. P. 213–233.
2. *Mayer V.* Trajectories de groupes a 1-parametre de quasi-isometries // Revista Mat. Iberoam. 1995. V. 11, N 1. P. 143–164.
3. *Ghamsari M., Herron D.* Bilipschitz homogeneous Jordan curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351, N 8. P. 3197–3216.
4. *Bishop Ch. J.* Bi-Lipschitz homogeneous curves in $\mathbb{R}^2$ are quasicircles // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353, N 7. P. 2655–2663.
5. *Herron D. A., Mayer V.* Bilipschitz group actions and homogeneous Jordan curves // Illinois J. Math. 1999. V. 43, N 4. P. 770–792.
6. *Ghamsari M., Herron D.* Higher dimensional Ahlfors regular sets and chordarc curves in $\mathbb{R}^n$ // Rocky Mount. J. Math. 1998. V. 28, N 1. P. 191–222.
7. *Freeman D. M.* Bilipschitz homogeneous Jordan curves, Möbius maps, and dimensions // Illinois J. Math. 2010. V. 54, N 2. P. 753–770.
8. *Freeman D. M.* Inversion invariant bilipschitz homogeneity // Michigan Math. J. 2012. V. 61. P. 415–430.
9. *Асеев В. В.* О метризации пространства областей с помощью коэффициентов искажения // Групповые и метрические свойства отображений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1995. С. 97–105.
10. *Erkama T.* Quasiconformally homogeneous curves // Michigan Math. J. 1977. V. 24, N 2. P. 157–159.
11. *Tukia P., Väisälä J.* Lipschitz and quasiconformal approximation and extension // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 1981. V. 6, N 2. P. 303–342.
12. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
13. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
14. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
15. *Aseev V. V.* Quasisymmetric embeddings // J. Math. Sci. (NY). 2002. V. 108, N 3. P. 375–410.
16. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
17. *Rickman S.* Characterization of quasi-conformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 1996. V. 395. P. 1–30.

18. *Асеев В. В.* Условие мёбиусовых середин как признак квазиконформности и квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 38–46.

Статья поступила 10 января 2014 г., окончательный вариант — 29 мая 2015 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru