Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 519.46+514.763+512.81+519.9+517.911

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППЕ ЛИ $SL(2)$

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

Аннотация. Найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела и сопряженные множества левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ при условии, что метрика правоинвариантна относительно подгруппы Ли $SO(2) \subset SL(2)$ (другими словами, инвариантной субримановой метрики на слабо симметрическом пространстве $(SL(2) \times SO(2))/SO(2)$).

DOI 10.17377/smzh.2016.57.304

Ключевые слова: алгебра Ли, геодезическая, геодезически орбитальное пространство, группа Ли, инвариантная субриманова метрика, кратчайшая, множество раздела, слабо симметрическое пространство, сопряженное множество.

Введение

В статье с помощью общих методов из [1] изучается группа $SL(2)$ с левоинвариантной субримановой метрикой, инвариантной относительно правых сдвигов на элементы подгруппы Ли $SO(2) \subset SL(2)$. Найдены геодезические, кратчайшие множества раздела и сопряженные множества этой метрики. Формула, аналогичная (5), и результаты теоремы 3 со ссылками на некоторые источники даны без доказательства в [2]; там же доказаны утверждения теоремы 4, но мы применяем другие методы и подробно доказываем все результаты.

Аналогичные результаты получены в [3, 4] для специальных левоинвариантных субримановых метрик d на группах Ли $SO_0(2,1) = SL(2)/\{\pm e\}$ и $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm e\}$. В этих статьях наряду с аналогами формулы (5) и теоремы 3 для поиска геодезических и кратчайших используются их геометрическая интерпретация как параллельных единичных векторных полей вдоль геодезических и изопериметриксов (решений изопериметрической задачи Дидоны) на плоскости Лобачевского L^2 и единичной евклидовой сферы S^2, являющихся кривыми постоянной геодезической кривизны, и теоремы Гаусса — Бонне для L^2 и S^2. В данной статье для этого приходится напрямую применять теорему 3.

Необходимо особо отметить, что все субримановы многообразия, рассматриваемые в этой статье и в [3, 4], *геодезически орбитальны*, т. е. каждая их геодезическая — орбита некоторой 1-параметрической группы изометрий. Это тесно связано с тем, что такие многообразия можно рассматривать соответственно

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029), гранта РФФИ (код проекта 14–01–00068–а) и государственной программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–2263.2014.10).

как *слабо симметрические пространства* $(SL(2)\times SO(2))/SO(2)$, $(SO_0(2,1)\times SO(2))/SO(2)$, $(SO(3)\times SO(2))/SO(2)$ с инвариантной субримановой метрикой. Слабо симметрические римановы пространства ввел Сельберг в [5], где в качестве единственного (несимметрического) примера таких пространств он привел $(SL(2)\times SO(2))/SO(2)$. О. С. Якимова в [6] дает классификацию (односвязных) слабо симметрических римановых многообразий с редуктивной группой изометрий; в строке 8 табл. 1 этой статьи приведено и третье из указанных выше пространств. Хорошо известно, что всякое слабо симметрическое риманово многообразие с инвариантной римановой метрикой геодезически орбитально. Поскольку всякая инвариантная субриманова метрика на слабо симметрическом пространстве является пределом последовательности инвариантных римановых метрик, должен быть верен общий факт, что слабо симметрическое пространство с инвариантной нормальной субримановой метрикой геодезически орбитально. В связи с этим заметим, что симметрические пространства не допускают инвариантных субримановых метрик [7, 8].

1. Предварительные сведения

Группа Ли $GL(n)$ состоит из всех вещественных $(n\times n)$-матриц $g=(g_{ij})$, $i,j=1,\dots,n$, таких, что $\det g\neq 0$, а подгруппа $GL_0(n)$ (связная компонента единицы e) определяется условием $\det g>0$. Обе подгруппы естественно рассматривать как открытые подмногообразия в $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами g_{ij}, $i,j=1,\dots,n$.

Их алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)=GL(n)_e:=GL_0(n)_e=\mathbb{R}^{n^2}$ есть векторное пространство всех вещественных $(n\times n)$-матриц со скобкой Ли

$$[a,b]=ab-ba,\quad a,b\in\mathfrak{gl}(n).$$

Через $e_{ij}\in\mathfrak{gl}(n)$, $i,j=1,\dots,n$, будем обозначать матрицу, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. $\mathrm{Lin}(a,b)$ обозначает линейную оболочку векторов a, b. Как вспомогательное средство будет использоваться стандартное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)=\mathbb{R}^{n^2}$ при $n=2$.

Группа Ли $SL(n)\subset GL(n)$ вещественных $(n\times n)$-матриц с определителем 1 является замкнутой связной подгруппой Ли группы Ли $GL_0(n)$ с алгеброй Ли

$$\mathfrak{sl}(n)=\left\{a\in\mathfrak{gl}(n):\mathrm{trace}(a)=\sum_{l=1}^{n}a_{ll}=0\right\}. \tag{1}$$

В случае левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли каждая геодезическая является левым сдвигом некоторой геодезической с началом в единице. Поэтому далее рассматриваются только геодезические с началом в единице. Из теоремы 5 в [1] следует

Теорема 1. *Пусть G — связная подгруппа Ли группы $GL(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, D — вполне неголономное левоинвариантное распределение на G, скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$ пропорционально ограничению скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ (на $D(e)$). Тогда параметризованная длиной дуги нормальная геодезическая (т. е. локально кратчайшая) $\gamma=\gamma(t)$, $t\in(-a,a)\subset\mathbb{R}$, $\gamma(0)=e$, на (G,d) с левоинвариантной субримановой метрикой d, определяемой распределением D и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $D(e)$, удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot\gamma(t)=\gamma(t)u(t),\quad u(t)\in D(e)\subset\mathfrak{g},\quad \langle u(t),u(t)\rangle\equiv 1, \tag{2}$$

$$pr_{\mathfrak{g}}([u(t)^T, u(t)] + [u(t)^T, v(t)]) = \dot{u}(t) + \dot{v}(t), \tag{3}$$

где $u = u(t)$, $v = v(t) \in \mathfrak{g}$, $(v(t), D(e)) \equiv 0$, $t \in (-a, a) \subset \mathbb{R}$, *— некоторые вещественно-аналитические вектор-функции.*

Из уравнений (2), (3) вытекает

Следствие 1. *Каждая параметризованная длиной дуги геодезическая в* (G, d) *является частью единственной параметризованной длиной дуги геодезической* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *в* (G, d).

2. Поиск геодезических на $(SL(2), \delta)$

Нас интересует группа Ли $SL(2)$. Вследствие (1) матрицы

$$p_1 = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad p_2 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad k = \frac{1}{2}(e_{21} - e_{12}) \tag{4}$$

образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Теорема 2. *Пусть задан базис (4) алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2)$, $D(e) = \mathrm{Lin}(p_1, p_2)$ *и на* $D(e)$ *задано скалярное произведение* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *с ортонормированным базисом* p_1, p_2. *Тогда левоинвариантное распределение* D *на группе Ли* $SL(2)$ *с данным* $D(e)$ *вполне неголономно и пара* $(D(e), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *определяет левоинвариантную субриманову метрику* δ *на* $SL(2)$. *При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *в* $(SL(2), \delta)$ *с условием* $\gamma(0) = e$ *есть произведение двух 1-параметрических подгрупп:*

$$\gamma(t) = \gamma(\beta, \phi; t) = \exp(t(\cos\phi p_1 + \sin\phi p_2 + \beta k)) \exp(-t\beta k), \tag{5}$$

где ϕ, β *— некоторые произвольные постоянные.*

Доказательство. Из (4) следует, что $[p_1, p_2] = -k$, $[p_1, k] = -p_2$, $[p_2, k] = p_1$. Отсюда вытекает первое утверждение теоремы 2.

Нетрудно понять, что $\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}(\cdot, \cdot)$ на $D(e)$. Вследствие теоремы 3 в [1] каждая геодезическая на трехмерной группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой нормальна. Тогда из теоремы 1 следует, что для поиска геодезических $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $(SL(2), \delta)$ можно применить ОДУ (2), (3).

Ясно, что

$$u(t) = \cos\phi(t) p_1 + \sin\phi(t) p_2, \quad v(t) = -\beta(t) k \tag{6}$$

и тождество (3) записывается в виде

$$[\cos\phi(t)p_1 + \sin\phi(t)p_2, -\beta(t)k] = \dot{\phi}(t)(-\sin\phi(t)p_1 + \cos\phi(t)p_2) - \dot{\beta}(t)k.$$

Ввиду (4) выражение в левой части последнего равенства равно $\beta(t)(\cos\phi(t)p_2 - \sin\phi(t)p_1)$. Получаем тождества $\dot{\beta}(t) = 0$, $\dot{\phi}(t) = \beta(t)$. Тем самым

$$\beta = \beta(t) = \mathrm{const}, \quad \phi(t) = \phi + \beta t. \tag{7}$$

Вследствие (2), (6) и (7) должно быть

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t)(\cos(\beta t + \phi)p_1 + \sin(\beta t + \phi)p_2). \tag{8}$$

Докажем, что (5) является решением ОДУ (8). Действительно,

$$\exp(-t\beta k) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta t}{2} & \sin\frac{\beta t}{2} \\ -\sin\frac{\beta t}{2} & \cos\frac{\beta t}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot\gamma(t) &= \exp(t(\cos\phi p_1+\sin\phi p_2+\beta k))(\cos\phi p_1+\sin\phi p_2+\beta k)\exp(-t\beta k)\\ &+\gamma(t)(-\beta k) = \gamma(t)\exp(t\beta k)(\cos\phi p_1+\sin\phi p_2+\beta k)\exp(-t\beta k)+\gamma(t)(-\beta k)\\ &= \gamma(t)\exp(t\beta k)(\cos\phi p_1+\sin\phi p_2)\exp(-t\beta k)+\gamma(t)(\beta k)+\gamma(t)(-\beta k)\\ &= \gamma(t)\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta t}{2} & -\sin\frac{\beta t}{2}\\ \sin\frac{\beta t}{2} & \cos\frac{\beta t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12\cos\phi & \frac12\sin\phi\\ \frac12\sin\phi & -\frac12\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta t}{2} & \sin\frac{\beta t}{2}\\ -\sin\frac{\beta t}{2} & \cos\frac{\beta t}{2}\end{pmatrix}\\ &= \gamma(t)(\cos(\beta t+\phi)p_1+\sin(\beta t+\phi)p_2) = \gamma(t)u(t). \quad \square\end{aligned}$$

Замечание 1. При $\beta\neq 0$ обе 1-параметрические подгруппы из формулы (5) нигде не касаются распределения D, поэтому каждый их интервал имеет бесконечную длину в метрике δ.

Замечание 2. Изменение знака у β в (5) равносильно изменению знака у t и замене угла ϕ углом $\phi\pm\pi$.

Предложение 1. *Для каждой матрицы $B\in SO(2)=\exp(\mathbb{R}k)$ отображение $l_B\circ r_{B^{-1}}$, где l_B — умножение слева на B, $r_{B^{-1}}$ — умножение справа на B^{-1}, является одновременно изоморфизмом $\operatorname{Ad}B$ алгебры Ли $(\mathfrak{sl}(2),[\cdot,\cdot])$, сохраняющим $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и изоморфизмом группы Ли $SL(2)$, сохраняющим распределение D и метрику d. В частности,*

$$\operatorname{Ad}B(p_1+\beta k)=\cos\phi p_1+\sin\phi p_2+\beta k, \tag{9}$$

если

$$B=\exp(\phi k)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\phi}{2} & -\sin\frac{\phi}{2}\\ \sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Как следствие, метрика δ на $SL(2)$ инвариантна относительно правых сдвигов на элементы подгруппы $SO(2)\subset SL(2)$.

Предложение 2. *Пространство $(SL(2),\delta)$ геодезически орбитально, т. е. каждая его геодезическая является орбитой некоторой 1-параметрической подгруппы движений в $(SL(2),\delta)$.*

Доказательство. Вследствие левой инвариантности метрики δ достаточно доказать утверждение для геодезической, определяемой формулой (5). На основании последнего утверждения предложения 1 отображения

$$\Phi(s)=l_{\exp(s(\cos\phi p_1+\sin\phi p_2+\beta k))}\circ r_{\exp(-s\beta k)},\quad s\in\mathbb{R},$$

образуют 1-параметрическую подгруппу движений в $(SL(2),\delta)$. При этом ввиду свойств матричной экспоненты $\Phi(s)(\gamma(t))=\gamma(t+s)$. $\square$

Следствие 2. *Если $\gamma(t)$, $t_0\le t\le t_0+T$, $t_0\in\mathbb{R}$, $T>0$, — кратчайшая, то $\gamma(t)$, $t_1\le t\le t_1+T$, — кратчайшая для любого числа $t_1\in\mathbb{R}$.*

Лемма 1. *Пусть $x=(x_{ij})\in\mathfrak{sl}(2)$,*

$$\det(x):=-x_{11}^2-x_{12}x_{21},\quad \alpha:=\sqrt{|\det(x)|}.$$

Тогда

$$\exp(x)=e+x,\quad \textit{если } \det(x)=0, \tag{11}$$

$$\exp(x)=\operatorname{ch}\alpha\cdot e+\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}x,\quad \textit{если } \det(x)<0, \tag{12}$$

$$\exp(x) = \cos\alpha \cdot e + \frac{\sin\alpha}{\alpha}x, \quad \textit{если } \det(x) > 0. \tag{13}$$

Доказательство. Характеристический многочлен матрицы x равен

$$P(\lambda) = |x - \lambda e| = \begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} \\ x_{21} & -x_{11} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \det(x).$$

По теореме Гамильтона — Кэли (см. [9]) матрица x является корнем многочлена $P(\lambda)$, т. е. $x^2 = -(\det(x))e$. Отсюда сразу следует (11) и

$$x^{2n+1} = \alpha^{2n}x, \quad x^{2n} = \alpha^{2n}e, \quad \text{если } \det(x) < 0,\ n \geq 1,$$
$$x^{2n+1} = (-1)^n\alpha^{2n}x, \quad x^{2n} = (-1)^n\alpha^{2n}e, \quad \text{если } \det(x) > 0,\ n \geq 1.$$

Поэтому при $\det(x) < 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \frac{x}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и (12) выполнено. Аналогично при $\det(x) > 0$

$$\exp(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!} + \frac{x}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и (13) выполнено. □

Теорема 3. *Пусть*

$$m = \frac{t}{2}, \quad n = 1, \quad \textit{если } \beta^2 = 1, \tag{14}$$

$$m = \frac{\operatorname{sh}\frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad n = \operatorname{ch}\frac{t\sqrt{1-\beta^2}}{2}, \quad \textit{если } \beta^2 < 1, \tag{15}$$

$$m = \frac{\sin\frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad n = \cos\frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}, \quad \textit{если } \beta^2 > 1. \tag{16}$$

Тогда геодезическая $\gamma(t) = \gamma(\beta, \phi; t)$ левоинвариантной субримановой метрики δ на $SL(2)$ (см. теорему 2) равна

$$\begin{pmatrix} n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) & n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) - \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) \\ -n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) & n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(-\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right) + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\phi = 0$. Тогда (5) примет вид

$$\gamma(t)|_{\phi=0} = \exp(t(p_1 + \beta k))\exp(-t\beta k).$$

Используя (4) и лемму 1, получаем

$$\exp(t(p_1 + \beta k)) = \exp\left(\frac{t}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+m & -\beta m \\ \beta m & n-m \end{pmatrix}.$$

В силу (10) матрицы $B = \exp(\phi k)$ и $\exp(t\beta k)$ коммутируют. Отсюда, из (5) и предложения 1 следует, что

$$\gamma(t) = B \cdot \gamma(t)|_{\phi=0} \cdot B^{-1} = B\exp(t(p_1 + \beta k))B^{-1}\exp(-t\beta k)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & -\sin\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+m & -\beta m \\ \beta m & n-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta t}{2} + \frac{\phi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\beta t}{2} + \frac{\phi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\beta t}{2} + \frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta t}{2} + \frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Вычисление произведения этих матриц завершает доказательство теоремы 3. □

Следствие 3. *Если $\phi = 0$, то в обозначениях* (14)–(16)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(\cos\frac{\beta t}{2} + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) & n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\frac{\beta t}{2} - \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) \\ -n\sin\frac{\beta t}{2} + m\left(\sin\frac{\beta t}{2} + \beta\cos\frac{\beta t}{2}\right) & n\cos\frac{\beta t}{2} + m\left(-\cos\frac{\beta t}{2} + \beta\sin\frac{\beta t}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

3. Множество симметричных матриц в $SL(2)$

Следующее предложение доказывается прямыми вычислениями.

Предложение 3. *Числа* $\operatorname{trace}(c) = c_{11} + c_{22}$,

$$m(c) := \frac{\sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + (c_{12} + c_{21})^2}}{2} \tag{19}$$

и свойство симметричности для (2×2)-матрицы $c = (c_{ij})$ сохраняются при ее сопряжении матрицами из группы $SO(2)$. Если $c_{12} = c_{21}$, то

$$\left(\frac{\operatorname{trace}(c)}{2}\right)^2 = \det(c) + (m(c))^2 = 1 + (m(c))^2. \tag{20}$$

Очевидно

Предложение 4. *Матрица c принадлежит $SO(2)$ тогда и только тогда, когда $c \in SL(2)$ и $m(c) = 0$.*

Предложение 5. 1. *Множество* Sim *всех симметричных матриц из* $SL(2)$ *представляется в виде* $\operatorname{Sim} = \operatorname{Sim}^+ \cup \operatorname{Sim}^-$, *где*

$$\operatorname{Sim}^+ = \{c \in \operatorname{Sim} \mid \operatorname{trace}(c) > 0\}, \quad \operatorname{Sim}^- = (-e)\operatorname{Sim}^+,$$

причем

$$\operatorname{Sim}^+ = \{c \in \operatorname{Sim} \mid \operatorname{trace}(c) \geq 2\}, \tag{21}$$

$$\operatorname{Sim}^- = (-e)\operatorname{Sim}^+ = \{c \in \operatorname{Sim} \mid \operatorname{trace}(c) \leq -2\}. \tag{22}$$

2. *Имеет место равенство $c = \pm e$ тогда и только тогда, когда $c \in \operatorname{Sim}$ и $m(c) = 0$.*

3. *Множества* $\operatorname{Sim}^+, \operatorname{Sim}^-, \operatorname{Sim}$ *инвариантны относительно сопряжения матрицами из подгруппы $SO(2) \subset SL(2)$.*

4. *Для каждой матрицы $c \in \operatorname{Sim}^+$, $c \neq e$,*

$$\operatorname{trace}(c)/2 = \sqrt{1 + m(c)^2}. \tag{23}$$

5. *Соотношения $c \in \operatorname{Sim}^+$ и $c \neq e$ выполнены тогда и только тогда, когда*

$$c = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a + \cos 2b \operatorname{sh} a & \sin 2b \operatorname{sh} a \\ \sin 2b \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a - \cos 2b \operatorname{sh} a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{trace}(c)/2, \quad \operatorname{sh} a = m(c), \quad \cos 2b = (c_{11} - c_{22})/2m(c), \quad \sin 2b = c_{12}/m(c). \tag{25}$$

Доказательство. 1. Если $c \in \operatorname{Sim}$, то $c_{11}c_{22} = 1 + c_{12}^2 \geq 1 > 0$, следовательно, $c \in \operatorname{Sim}^+$ или $c \in \operatorname{Sim}^-$. Если $c \in \operatorname{Sim}^+$, то

$$\frac{\operatorname{trace}(c)}{2} = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} \geq \sqrt{c_{11}c_{22}} = \sqrt{1 + c_{12}^2} \geq 1. \tag{26}$$

Из (26) получаем (21) и (22).

Утверждения 2–4 следуют соответственно из предложений 4, 3 и (20).

5. Достаточность очевидна. Представление любой матрицы $c \in \operatorname{Sim}^+ - \{e\}$ в виде (24) гарантируют утверждение 2 и формулы (21), (23), (25). $\square$

Следствие 4. *Для каждого числа $m_0 \geq 0$ существует единственная с точностью до сопряжения матрицами из $SO(2) \subset SL(2)$ матрица $c \in \mathrm{Sim}^+$ с условием $m(c) = m_0$. При этом выполняется формула* (23).

Из теорем 2, 3 и предложения 5 вытекает

Следствие 5. *Матрица c принадлежит $\mathrm{Sim}^+ - \{e\}$ тогда и только тогда, когда $c = \gamma(0, \phi; t)$, где*

$$\mathrm{sh}(t/2) = m(c), \quad \cos\phi = (c_{11} - c_{22})/2m(c), \quad \sin\phi = c_{12}/m(c). \tag{27}$$

Как следствие, $\mathrm{Sim}^+ = \exp(D(e))$.

4. Множества раздела и сопряженные множества в $(SL(2), \delta)$

Для субриманова многообразия (M, d) без анормальных геодезических (как в случае $(SL(2), \delta)$) в отличие от римановых многообразий экспоненциальное отображение Exp_x, $x \in M$, определено не на T_xM, а на $D(x) \times \mathrm{Ann}(D(x))$, где D — *распределение* на M, участвующее в определении метрики d, а

$$\mathrm{Ann}(D(x)) = \{\psi \in T_x^*M : \langle\psi, D(x)\rangle = 0\}$$

(см. [10]). В остальном множества раздела и сопряженные множества для субриманова многообразия определяются так же, как для риманова [11].

Определение 1. Множество раздела $C(x)$ (соответственно (первое) сопряженное множество $S(x)$ $(S_1(x))$) для точки x субриманова многообразия M (без анормальных геодезических) есть множество всех концов $y \in M$ не продолжаемых за y кратчайших, соединяющих точку x с точкой y (соответственно образ множества (первых) критических значений (вдоль геодезических с началом в x) отображения Exp_x относительно Exp_x).

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 4. *Для любого элемента $g \in (SL(2), \delta)$ имеют место равенства $C(g) = gC(e)$ и $S(g) = gS(e)$, причем*

$$C(e) = K(e) \cup S_1(e), \tag{28}$$

где

$$K(e) = \mathrm{Sim}^- = \{c \in SL(2) \mid c^T = c, \mathrm{trace}(c) \leq -2\}, \tag{29}$$

$$S_1(e) = SO(2) - \{e\}. \tag{30}$$

Кроме того, $K(e)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, $S_1(e)$ диффеоморфно $\mathbb{R}$, $S_1(e) \cap K(e) = \{-e\}$.

Предложение 6. *Если $\beta = 0$, то каждый отрезок $\gamma(t) = \gamma(0, \phi; t)$, $0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая.*

Доказательство. Известно, что группа Ли $SL(2)/\{\pm e\}$ изоморфна группе Ли всех сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Лобачевского секционной кривизны -1, а последняя изоморфна группе Ли $SO_0(2,1)$ — компоненте связности единицы группы Лоренца $SO(2,1)$ (см., например, [3]). По теореме 1 из [3] существует локально изоморфный эпиморфизм групп Ли

$$L : SL(2) \to SL(2)/\{\pm e\} \cong SO_0(2,1)$$

такой, что в обозначениях этой статьи и [3]

$$dL(e)(p_1) = a, \quad dL(e)(p_2) = b, \quad dL(e)(k) = c.$$

Вследствие этого отображение $L : (SL(2), \delta) \to (SO_0(2,1), d)$ — субметрия [12], сохраняющая длины кривых. Следовательно, $L(\gamma(t))$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая и одновременно 1-параметрическая подгруппа в $(SO_0(2,1), d)$, причем по лемме 2 из [3] каждый ее отрезок — кратчайшая. Тогда то же верно для γ. $\square$

Из следствия 5 и предложения 6 непосредственно вытекает

Предложение 7. $C(e) \cap \mathrm{Sim}^+ = \varnothing$.

Следующее предложение доказано в [13] (см. следствие 1 в [13]).

Предложение 8. *Если в трехмерной группе Ли G с левоинвариантной субримановой метрикой d две точки соединяются двумя различными параметризованными длиной дуги геодезическими одинаковой длины, то каждая из этих геодезических либо не является кратчайшей, либо не может быть частью более длинной кратчайшей.*

Предложение 9. *Если отрезок $\gamma(t)$, $0 \le t \le t_0$, геодезической* (9) *является кратчайшей и $\beta^2 > 1$, то $t_0 \le \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$.*

Доказательство. Вследствие (16) $m = 0$ и $n = -1$ при $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$. Подставляя найденные значения m и n в (17), получаем, что

$$\gamma\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} & -\sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \\ \sin\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} & -\cos\frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} \end{pmatrix} \tag{31}$$

не зависит от ϕ. Остается применить предложение 8. $\square$

Предложение 10. *Имеет место соотношение*

$$K(e) \cup SO(2) - \{e\} \subset C(e). \tag{32}$$

Доказательство. Обозначим через $c = (c_{ij})$ матрицу (17). Легко видеть, что

$$c_{11} + c_{22} = 2n\cos\frac{\beta t}{2} + 2\beta m \sin\frac{\beta t}{2}, \quad c_{12} - c_{21} = 2n\sin\frac{\beta t}{2} - 2\beta m\cos\frac{\beta t}{2}, \tag{33}$$

$$c_{11} - c_{22} = 2m\cos\left(\frac{\beta t}{2} + \phi\right), \quad c_{12} + c_{21} = 2m\sin\left(\frac{\beta t}{2} + \phi\right). \tag{34}$$

Заметим, что система равенств (33), (34) равносильна (17).

Из (34) и (14)–(16), (19) вытекает, что если $\beta^2 \le 1$ и $t \ge 0$ или $\beta^2 > 1$ и $0 \le t \le \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$, как в предложении 9, то

$$m = m(c). \tag{35}$$

Если $c \in SO(2) - \{e\}$, то $m(c) = 0$ на основании предложения 4, и так как $(SL(2), \delta)$ — локально компактное полное пространство с внутренней метрикой, вследствие теоремы Кон-Фоссена [14] о существовании кратчайших существует кратчайший отрезок $\gamma(\beta, \phi_0; t)$, $0 \le t \le T$, соединяющий e и c. В силу (35) должно быть $m(T) = m(c) = 0$. Тогда $\beta^2 > 1$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$ на основании формул (14)–(16) и $\gamma(\beta,\phi;T) = \gamma(\beta,\phi_0;T)$ при всех ϕ. Значит, $c \in S(e) \cap C(e)$.

Пусть $c \in K(e)$. Ввиду теоремы Кон-Фоссена существует кратчайший отрезок $\gamma(\beta,\phi_0;t)$, $0 \le t \le T$, соединяющий e и c. Так как $\mathrm{trace}(c) \le -2$ на основании формулы (29), из следствия 5 вытекает, что $\beta \neq 0$. Теперь вследствие равенств $c_{12} = c_{21}$ и (17), четности функций n и $\cos$, нечетности функций m и $\sin$ имеем $\gamma(\beta,\phi_0;T) = \gamma(\beta,\phi_1;-T)$, где $\phi_1 = \beta T + \phi_0 + \pi$. Поэтому из предложения 8 вытекает, что $c \in C(e)$. $\square$

Предложение 11. *Справедливы соотношения*

$$S(e) = (S_1(e) = SO(2) - \{e\}) \\ \cup \left\{\gamma(\beta,\phi;t) \,|\, \mathrm{tg}\left(\frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}\right) = \frac{t\sqrt{\beta^2-1}}{2}, \quad \beta^2 > 1,\ t \neq 0\right\};$$

$$C \cap S(e) = C \cap S_1(e) = SO(2) - \{e\}.$$

Доказательство. На основании формул (14)–(16) получаем

$$\gamma(\beta,\phi;t) = 2m\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_1 + \sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_2\right] \\ + 2\left(\beta m\cos\frac{\beta t}{2} - n\sin\frac{\beta t}{2}\right)k + \left(\beta m\sin\frac{\beta t}{2} + n\cos\frac{\beta t}{2}\right)e;$$

$$m'_t = \frac{n}{2}, \quad n'_t = \frac{1-\beta^2}{2}m;$$

$$m'_\beta = \frac{\beta}{1-\beta^2}\left(m - \frac{tn}{2}\right), \quad n'_\beta = -\frac{\beta t}{m}, \quad \beta^2 \neq 1; \quad m'_\beta = n'_\beta = 0, \quad \beta^2 = 1.$$

Используя эти соотношения, нетрудно вычислить, что

$$\gamma'_\phi = 2m\left[-\sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_1 + \cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_2\right],$$

$$\gamma'_t = \frac{\beta}{2}\gamma'_\phi + n\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_1 + \sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_2\right] + m\left(-\sin\frac{\beta t}{2}k + \frac{1}{2}\cos\frac{\beta t}{2}e\right)$$

при всех $\beta \in \mathbb{R}$; если $\beta^2 \neq 1$, то

$$\gamma'_\beta = \frac{t}{2}\gamma'_\phi + \frac{2}{1-\beta^2}\left(m - \frac{tn}{2}\right) \\ \times \left\{\beta\left[\cos\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_1 + \sin\left(\frac{\beta t}{2}+\phi\right)p_2\right] + \cos\frac{\beta t}{2}k + \frac{1}{2}\sin\frac{\beta t}{2}e\right\};$$

если $\beta^2 = 1$, то

$$\gamma'_\beta = \frac{t}{2}\gamma'_\phi + \frac{t^2}{4}\left(-2\sin\frac{\beta t}{2}k + \cos\frac{\beta t}{2}e\right).$$

Исключая значение $t = 0$, получаем критические значения только при $m = 0$ или $2m - tn = 0$, когда $m \neq 0$ и $\beta^2 \neq 1$. Отсюда и из доказательства предложения 9 следуют дизъюнктность объединения, неравенство $|t| > 2\pi/\sqrt{\beta^2-1}$ для точек второго множества объединения и первое утверждение. Теперь второе утверждение вытекает из предложений 9 и 10. $\square$

Теорема 5. *Если $c \in C(e)$ для $(SL(2), \delta)$, то $c \in S_1(e)$ или существуют такие β_i, $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $T > 0$, что*

$$c = \gamma(\beta_1, \phi_1; T) = \gamma(\beta_2, \phi_2; T), \tag{36}$$

где $T = T(\beta_1, \phi_1)$ — наименьшее положительное число, для которого найдутся такие β_2, $\phi_2 \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство (36), *причем геодезические $\gamma_1 = \gamma(\beta_1, \phi_1; t)$ и $\gamma_2 = \gamma(\beta_2, \phi_2; t)$ различны.*

Доказательство. Предположим, что $c = \gamma(\beta_1, \phi_1; T) \in C(e) - S(e)$, $T > 0$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ геодезический отрезок $\gamma(\beta_1, \phi_1; t)$, $0 \leq t \leq T + 1/n$, не является кратчайшей и по теореме об обратном отображении отображение $\gamma : (\beta, \phi, t) \to \gamma(\beta, \phi; t)$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности U точки (β_1, ϕ_1, T). Вследствие теоремы Кон-Фоссена [14] для достаточно больших n существует кратчайшая $\gamma_n(t) := \gamma(\beta_n, \phi_n; t)$, $0 \leq t \leq T_n$, где $T - 1/n \leq T_n < T + 1/n$ и $(\beta_n, \phi_n + 2\pi l, T_n) \notin U$ для всех $l \in \mathbb{Z}$, соединяющая точки e и $\gamma(\beta_1, \phi_1; T + 1/n)$. По той же причине существуют подпоследовательность $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и (β_2, ϕ_2) такие, что кратчайшие $\gamma_{n_j}(t) := \gamma(\beta_{n_j}, \phi_{n_j}; t)$, $0 \leq t \leq T_{n_j}$, сходятся к кратчайшей $\gamma(\beta_2, \phi_2; t)$, $0 \leq t \leq T$, соединяющей точки e и $\gamma(\beta_1, \phi_1; T)$, причем геодезические $\gamma_1 = \gamma(\beta_1, \phi_1; t)$ и $\gamma_2 = \gamma(\beta_2, \phi_2; t)$ различны. Если $c \in S(e)$, то $c \in S_1(e)$ вследствие предложения 11. □

Замечание 3. Теорема 5 и ее доказательство распространяются на произвольные однородные (суб)римановы многообразия (без строго анормальных геодезических) лишь переменой обозначений.

Предложение 12. *Если $c \in C(e)$, то $c \in S_1(e)$ или найдутся ϕ_1, $\phi_2' \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, такие, что*

$$c = \gamma(\beta, \phi_1; T) = \gamma(\beta, \phi_2'; -T), \tag{37}$$

где $\gamma(t)$ задана формулой (17) *и*

$$T = \min\{t > 0 \mid \gamma(\beta, \phi_1; t) = \gamma(\beta, \phi_2'; -t)\}. \tag{38}$$

Доказательство. Предположим, что $c \in C(e) - S_1(e)$. Из теоремы 5, (36) и (35) вытекает, что

$$\frac{2}{T} m(\beta_1, T) = \frac{2}{T} m(\beta_2, T), \tag{39}$$

где $m = m(\beta, t)$ определено формулами (14)–(16). Но

$$\frac{2}{T} m(\beta, T) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta^2 = 1, \\ \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{если } \beta^2 < 1 \text{ и } x = \frac{T\sqrt{1-\beta^2}}{2}, \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{если } \beta^2 > 1 \text{ и } x = \frac{T\sqrt{\beta^2-1}}{2}. \end{cases} \tag{40}$$

Легко видеть, что справедливы следующие леммы.

Лемма 2. *Функция $y = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$, $x > 0$, возрастает, и ее область значений есть интервал $(1, +\infty)$.*

Лемма 3. *Функция $y = \frac{\sin x}{x}$, определенная на интервале $(0, \pi]$, убывает, и ее область значений есть интервал $[0, 1)$.*

Из (40), лемм 2 и 3 следует, что равенство (39) выполнено только в случае $\beta_1^2 = \beta_2^2$.

Пусть $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Тогда на основании (33), (34) равенство (36) выполнено либо в случае $\phi_2 = \phi_1 + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ (т. е. когда соответствующие геодезические совпадают), либо в случае $m = 0$ (т. е. когда $\gamma(\beta, \phi_1; T) \in SO(2) - \{e\} = S(e) \cap C(e)$ вследствие (35) и предложений 4, 11).

Если $\beta_2 = -\beta_1 \neq 0$ (см. предложение 6), то с учетом замечания 2 равенство (36) равносильно равенству (37). $\square$

Предложение 13. *Имеет место включение*

$$C(e) - S_1(e) \subset K(e). \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $c \in C(e) - S_1(e)$. Так как на основании (33) функция $c_{12} - c_{21}$ относительно переменного t нечетная, из предложения 12 следует, что $c_{12} = c_{21}$. Теперь включение (41) вытекает из предложений 7 и 5. $\square$

Все утверждения теоремы 4, кроме последнего, можно получить из предложений 10–13, а последнее — из формул (5), (22), предложения 6 и следствия 5.

5. Непродолжаемые кратчайшие на группе Ли $(SL(2), \delta)$

Основной результат этого раздела составляет

Теорема 6. *Пусть $\beta \neq 0$ и $\gamma = \gamma(\beta, \phi; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая* (17). *Тогда*

1. *Если $|\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$.*

2. *Если $\beta^2 = 1$, то T принадлежит $(2\pi, 3\pi)$ и удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos\frac{T}{2} = \frac{-1}{\sqrt{1 + (T/2)^2}}, \quad \sin\frac{T}{2} = \frac{-T/2}{\sqrt{1 + (T/2)^2}}.$$

3. *Если $\beta^2 < 1$, то T принадлежит $\left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ и удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

где

$$k = \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{T\sqrt{1 - \beta^2}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{1 + k^2}}. \tag{42}$$

4. *Если $|\beta| = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $T = 2\sqrt{2}\pi$.*

5. *Если $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $\frac{3\pi}{|\beta|} < T < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < \frac{4\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где

$$k = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad x = \frac{T\sqrt{\beta^2 - 1}}{2} = \frac{T}{2\sqrt{k^2 - 1}}. \tag{43}$$

6. *Если $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\frac{2\pi}{|\beta|} < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < T < \frac{3\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений*

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k и x определены формулами (43).

Доказательство. Пусть $\beta \neq 0$ и $\gamma = \gamma(\beta, \phi; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая (17). Из определения 1 и теоремы 4 следует, что $c := \gamma(T)$ принадлежит $C(e) = K(e) \cup S_1(e)$.

Предположим сначала, что $c \in S_1(e)$. Тогда $m(c) = 0$ в силу (30) и предложения 4. Поэтому $|\beta| > 1$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$ на основании (14)–(16). При этом $|\beta|$ — максимальное число, для которого правая часть в (31) равна c, а функция

$$\xi(\beta) = \frac{\pi\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad \beta \in \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right),$$

монотонно убывает от 2π до π. Вследствие этого и формул (31), (30) элементу $c = -e$ (множеству $S_1(e)$) соответствуют $\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (множество $\{\beta : |\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\}$). Обратно, если $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}$ и $|\beta| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $c \in S_1(e)$ на основании (31). П. 1 теоремы 6 доказан.

Пусть теперь $c \in K(e)$. Тогда в силу (29) и (31)

$$n \sin\frac{\beta T}{2} - \beta m \cos\frac{\beta T}{2} = 0, \quad n \cos\frac{\beta T}{2} + \beta m \sin\frac{\beta T}{2} < 0. \tag{44}$$

Пусть $|\beta| = 1$. С учетом (14) условия (44) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\frac{T}{2} = \frac{T}{2}, \quad \cos\frac{T}{2} < 0.$$

Тогда $\pi < \frac{T}{2} < \frac{3\pi}{2}$, т. е. $T \in (2\pi, 3\pi)$. Следовательно,

$$\cos\frac{T}{2} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{T}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + (T/2)^2}}, \quad \sin\frac{T}{2} = \operatorname{tg}\frac{T}{2} \cdot \cos\frac{T}{2} = \frac{-T/2}{\sqrt{1 + (T/2)^2}},$$

и п. 2 теоремы 6 доказан.

Пусть $0 < |\beta| < 1$. С учетом (15) условия (44) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\left(\frac{|\beta| T}{2}\right) = \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \beta^2}} \operatorname{th}\left(\frac{T\sqrt{1-\beta^2}}{2}\right), \quad \cos\frac{|\beta| T}{2} < 0. \tag{45}$$

Используем обозначения (42). Тогда $x > 0$, $k > 0$ и условия (45) примут вид

$$f(x) = f(k, x) := \operatorname{tg} kx - k \operatorname{th} x = 0, \quad \cos kx < 0. \tag{46}$$

Зафиксируем $k > 0$. Заметим, что функция $f(x)$ возрастает, так как

$$f'(x) = k\left(\frac{1}{\cos^2 kx} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) > 0. \tag{47}$$

Кроме того,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2k}-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2k}+0} f(x) = -\infty,$$

$$f\left(\frac{\pi}{k}\right) = -k \operatorname{th}\frac{\pi}{k} < 0, \quad \lim_{x\to\frac{3\pi}{2k}-0} f(x) = +\infty.$$

Поэтому $f(x) > 0$ для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2k}\right)$, $f(x) < 0$ для любого $x \in \left(\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k}\right]$ и $f(x)$ имеет единственный нуль на интервале $\left(\frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{2k}\right)$. Отсюда и из (42) следует, что

$$\frac{\pi\sqrt{1-\beta^2}}{|\beta|} < \frac{T\sqrt{1-\beta^2}}{2} < \frac{3\pi\sqrt{1-\beta^2}}{2|\beta|},$$

т. е. $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$. Далее, в силу (46) и $kx \in (\pi, 3\pi/2)$

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{th}^2 x}},$$

$$\sin kx = \operatorname{tg} kx \cdot \cos kx = \frac{-k\operatorname{th} x}{\sqrt{1+k^2\operatorname{th}^2 x}}.$$

П. 3 теоремы 6 доказан. Осталось рассмотреть случай $1 < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Предположим сначала, что $n = 0$. Из (16), (44) и предложения 9 вытекает, что тогда

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2-1}}, \quad \cos\frac{\beta T}{2} = 0. \tag{48}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\beta|T}{2} = \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2-1}} = k = 1+2l, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{49}$$

Если $l = 1$, то $k = 3$, $|\beta| = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $T = 2\sqrt{2}\pi$.

Из (49) вытекает, что если $l > 1$, то $k > 3$, $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $T > \frac{3\pi}{|\beta|}$.

Пусть $n \neq 0$. Тогда с учетом (16) равенство (44) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\left(\frac{|\beta|T}{2}\right) = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2-1}}\operatorname{tg}\left(\frac{T\sqrt{\beta^2-1}}{2}\right). \tag{50}$$

Используем обозначение (43). Из (16) и предложения 9 следует, что

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad k > 2, \tag{51}$$

и равенство (50) примет вид

$$g(x) = g(k,x) := \operatorname{tg} kx - k\operatorname{tg} x = 0. \tag{52}$$

Легко видеть, что с учетом (16), (52) и наших обозначений неравенство в (44) равносильно условию $\cos x\cos kx < 0$.

Зафиксируем $k > 2$ и рассмотрим на объединении интервалов $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ функцию $g(x)$. Заметим, что

$$g'(x) = \frac{k}{\cos^2 kx} - \frac{k}{\cos^2 x} = k(\operatorname{tg}^2 kx - \operatorname{tg}^2 x) = \frac{k\sin[(k-1)x]\sin[(k+1)x]}{\cos^2 x\cos^2 kx}. \tag{53}$$

Пусть $k = 3$, что равносильно условию $|\beta| = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Используя формулу тангенса тройного аргумента, получаем, что

$$g(x) = \operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} x = \frac{8\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Поэтому при $k = 3$ уравнение (52) на множестве $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ не имеет решений. Вместе с рассмотренным ранее случаем $n = 0$ это доказывает п. 4 теоремы 6.

Пусть $2 < k < 3$, т. е. $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Легко видеть, что тогда $x \neq \frac{\pi}{2k}$, $x \neq \frac{3\pi}{2k}$ и уравнение $g'(x) = 0$ на множестве $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ имеет четыре различных решения $x = \frac{\pi}{k+1}$, $x = \frac{2\pi}{k+1}$, $x = \frac{3\pi}{k+1}$ и $x = \frac{\pi}{k-1}$, причем

$$0 < \frac{\pi}{2k} < \frac{\pi}{k+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{k+1} < \frac{3\pi}{2k} < \frac{\pi}{k-1} < \frac{3\pi}{k+1} < \pi.$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2k}-0} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2k}+0} g(x) = -\infty, \tag{54}$$

$$g\left(\frac{\pi}{k+1}\right) = -(k+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{k+1} < 0, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} g(x) = +\infty,$$

$$g\left(\frac{2\pi}{k+1}\right) = -(k+1)\operatorname{tg}\frac{2\pi}{k+1} > 0, \quad \lim_{x\to \frac{3\pi}{2k}-0} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2k}+0} g(x) = -\infty, \quad g\left(\frac{\pi}{k-1}\right) = (1-k)\operatorname{tg}\frac{\pi}{k-1} > 0.$$

Отсюда и из (53) следует, что при $2 < k < 3$ уравнение (52) на множестве $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ разрешимо, причем наименьший корень этого уравнения принадлежит интервалу $\left(\frac{3\pi}{2k}, \frac{\pi}{k-1}\right)$. С учетом (43) это означает, что

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{3\pi}{|\beta|} < T < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < \frac{4\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x < 0$, $\operatorname{tg} x < 0$, $\cos kx > 0$ и на основании (52)

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}},$$

$$\sin kx = \operatorname{tg} kx \cdot \cos kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0.$$

П. 5 теоремы 6 доказан.

Пусть $k > 3$, т. е. $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Легко видеть, что тогда $x \neq \frac{\pi}{2k}$, $x \neq \frac{3\pi}{2k}$ и уравнение $g'(x) = 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет по меньшей мере пять различных решений $x = \frac{\pi}{k+1}$, $x = \frac{\pi}{k-1}$, $x = \frac{2\pi}{k+1}$, $x = \frac{2\pi}{k-1}$, $x = \frac{3\pi}{k+1}$, причем

$$0 < \frac{\pi}{2k} < \frac{\pi}{k+1} < \frac{\pi}{k-1} < \frac{3\pi}{2k} < \frac{2\pi}{k+1} < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что выполняются равенства (54) и

$$g\left(\frac{\pi}{k+1}\right) = -(k+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{k+1} < 0, \quad g\left(\frac{\pi}{k-1}\right) = (1-k)\operatorname{tg}\frac{\pi}{k-1} < 0,$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2k}-0} g(x) = +\infty.$$

Отсюда и из (53) следует, что при $k > 3$ уравнение (52) на множестве $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ разрешимо, причем наименьший корень этого уравнения принадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{k-1}, \frac{3\pi}{2k}\right)$. Так как ранее было доказано, что $T > \frac{3\pi}{|\beta|}$ при $n = 0$, имеем

$$\frac{2\pi}{|\beta|} < 2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1}) < T < \frac{3\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x > 0$, $\cos kx < 0$ и на основании (52)

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{-1}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}},$$
$$\sin kx = \operatorname{tg} kx \cdot \cos kx = \frac{-k\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+k^2\operatorname{tg}^2 x}} < 0.$$

П. 6 теоремы 6 доказан. $\square$

Теорема 7. *Пусть $\gamma = \gamma(\beta,\phi;t)$, $0 \le t \le T$, — непродолжаемая кратчайшая* (17). *Тогда*

1. *Функция $T = T(|\beta|)$ строго убывает на промежутках $\left(0,\frac{3}{2\sqrt{2}}\right]$, $\left[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$ и строго возрастает на отрезке $\left[\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.*

2. *Функция $T = T(|\beta|)$ непрерывна, кусочно вещественно аналитична и $T(0,+\infty) = (0,+\infty)$.*

3. *Функция $T = T(|\beta|)$ имеет локальный минимум $2\sqrt{2}\pi$ при $3/2\sqrt{2}$ и локальный максимум $2\sqrt{3}\pi$ при $2/\sqrt{3}$.*

Доказательство. 1. Вследствие п. 1 теоремы 6 это верно при $|\beta| \ge \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Если $0 < |\beta| < 1$, то соотношения (46) и (42) определяют неявную функцию $T = T(k)$. При этом вследствие (47), (42) и п. 3 теоремы 6

$$f'_T = f'_x \cdot x'_T = \frac{k}{2\sqrt{1+k^2}}\left(\frac{1}{\cos^2 kx} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) > 0,$$
$$f'_k = \frac{x}{\cos^2 kx} - \operatorname{th} x - \frac{kT}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 kx} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\frac{k}{(1+k^2)^{3/2}}$$
$$= x(1+k^2\operatorname{th}^2 x) - \operatorname{th} x - \frac{xk^2}{1+k^2}(1+k^2\operatorname{th}^2 x - (1-\operatorname{th}^2 x)) = x - \operatorname{th} x > 0.$$

Следовательно, по теореме о (производной) неявной функции $\frac{dT}{dk} = -\frac{f'_k}{f'_T} < 0$; так как $k'_\beta = 1/(1-\beta^2)^{3/2} > 0$, то $T = T(|\beta|)$ строго убывает при $\beta^2 < 1$.

Пусть $1 < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $|\beta| \ne \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Тогда соотношения (52) и (43) определяют неявную функцию $T = T(k)$. При этом вследствие (53), (43), пп. 5, 6 теоремы 6

$$g'_T = g'_x \cdot x'_T = \frac{k}{2\sqrt{k^2-1}}\left(\frac{1}{\cos^2 kx} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$
$$= \frac{k}{2\sqrt{k^2-1}}(1+k^2\operatorname{tg}^2 x - (1+\operatorname{tg}^2 x)) = \frac{k\sqrt{k^2-1}\operatorname{tg}^2 x}{2} > 0,$$
$$g'_k = \frac{x}{\cos^2 kx} - \operatorname{tg} x - \frac{kT}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 kx} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\frac{k}{(k^2-1)^{3/2}}$$
$$= x(1+k^2\operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x - x\frac{k^2}{(k^2-1)}(1+k^2\operatorname{tg}^2 x - (1+\operatorname{tg}^2 x)) = x - \operatorname{tg} x.$$

Из доказательства теоремы 6 следует, что $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ при $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ при $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Следовательно, по теореме о (производной) неявной функции $\frac{dT}{dk} = -\frac{g'_k}{g'_T}$ положительно при $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и отрицательно при $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta| < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Так как $k'_\beta = -1/(\beta^2-1)^{3/2} < 0$, то $T = T(|\beta|)$ строго убывает при $1 < |\beta| < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и строго возрастает при $\frac{3}{2\sqrt{2}} < |\beta < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Нужное утверждение нетрудно проверить на основании доказательства п. 1 теоремы 7 и п. 1 теоремы 6.

3. Это утверждение следует из пп. 1, 2 теоремы 7 и пп. 1, 4 теоремы 6. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берестовский В. Н.* Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 959–970.

2. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Carathéodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.

3. *Берестовский В. Н.* (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO_0(2,1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 3–22.

4. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 762–774.

5. *Зельберг А.* Гармонический анализ и дискретные группы в слабо симметрических пространствах; приложения к теории рядов Дирихле // Математика. 1957. Т. 1, № 4. С. 3–28.

6. *Якимова О. С.* Слабо симметрические римановы многообразия, имеющие редуктивную группу изометрий // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 1. С. 143–160.

7. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой. II // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 14–28.

8. *Berestovskii V. N., Gorbatsevich V. V.* Homogeneous spaces with inner metric and with integrable invariant distributions // Anal. Math. Phys. 2014. V. 4, N 4. P. 263–331.

9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.

10. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85. (Итоги науки и техники).

11. *Громол Д, Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.

12. *Berestovskii V. N., Guijarro L.* A metric characterization of Riemannian submersions // Ann. Global Anal. Geom. 2000. V. 18, N 6. P. 577–588.

13. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Субриманово расстояние в группах Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ // Мат. труды. 2015. Т. 18, № 2. С. 3–21.

14. *Кон-Фоссен С. Э.* О существовании кратчайших путей // Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз, 1959. С. 288–303.

Статья поступила 29 марта 2015 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Зубарева Ирина Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
i_gribanova@mail.ru