Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ РАСШИРЕННО c–СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ И ИХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, Е. Н. Мысловец

Аннотация. Группа называется *c-сверхразрешимой*, если ее главные факторы изоморфны простым группам. Вводится понятие расширенно c-сверхразрешимой группы, обобщающее c-сверхразрешимость. Получены свойства и найдены приложения для произведений взаимно перестановочных подгрупп. В частности, доказана расширенно c-сверхразрешимость конечной группы, являющейся произведением своих двух взаимно перестановочных c-сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.308

Ключевые слова: конечная группа, c-сверхразрешимая группа, w-сверхразрешимая группа, расширенно c-сверхразрешимая группа, композиционная формация, произведение взаимно перестановочных подгрупп.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль в теории классов групп играют сверхразрешимые группы и их обобщения. В 1988 г. В. А. Ведерниковым [1] было введено понятие c-сверхразрешимой группы. Напомним, что группа называется *c-сверхразрешимой*, если она обладает главным рядом, все факторы которого изоморфны простым группам. Класс всех c-сверхразрешимых групп, обозначаемый в дальнейшем через $\mathfrak{U}_c$, образует нормально наследственную формацию [1]. А. Ф. Васильев и Т. И. Васильева [2] показали, что формация $\mathfrak{U}_c$ композиционная, но не насыщенная. Робинсон [3] нашел структурные свойства c-сверхразрешимых групп (SC-групп, в терминологии [3]) и их приложения при изучении групп, для которых перестановочность подгрупп является транзитивным свойством.

В последние годы большое внимание уделяется задаче нахождения строения групп, представимых как произведение своих сверхразрешимых (c-сверхразрешимых) подгрупп. Еще в 1953 г. Хупперт [4] привел пример несверхразрешимой группы, являющейся произведением своих двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. В 1957 г. Бэр [5] показал, что группа, представимая в виде произведения своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен. В 1971 г. Фрисен [6] установил сверхразрешимость группы $G = HK$, где H и K — нормальные сверхразрешимые подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G. Также хорошо известно, что произведение нормальных нильпотентной и сверхразрешимой подгрупп сверхразрешимо. Эти результаты стали основой для многих дальнейших исследований в данном направлении. В частности, в [2] отмеченные выше результаты были распространены на произведения нормальных c-сверхразрешимых подгрупп.

Аналогичные задачи рассматривались при изучении произведений не обязательно нормальных сверхразрешимых (c-сверхразрешимых) подгрупп. Наиболее известной является концепция взаимно перестановочных произведений подгрупп, предложенная Асаадом и Шааланом в [7]. Группа $G = HK$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* H и K, если H перестановочна с любой подгруппой из K, а K перестановочна с любой подгруппой из H. Произведения взаимно перестановочных сверхразрешимых (c-сверхразрешимых) подгрупп исследовались в работах многих авторов (см. [8]). В частности, в [7, 9] изучались произведения взаимно перестановочных сверхразрешимых и c-сверхразрешимых подгрупп. Например, в [9] получено: если группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B, A и B c-сверхразрешимы и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G c-сверхразрешима; если группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B, A c-сверхразрешима и B квазинильпотентна, то G c-сверхразрешима. Примеры трипримарных минимальных несверхразрешимых групп показывают, что аналог теоремы Фрисена для произведений взаимно перестановочных сверхразрешимых (c-сверхразрешимых) подгрупп неверен.

В [10] предложено еще одно обобщение сверхразрешимости — понятие расширенно сверхразрешимой группы или, кратко, w-сверхразрешимой группы. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной в* G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, n$. Группа G называется w-*сверхразрешимой*, если любая ее силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Было показано, что класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией, а также установлены структурные свойства w-сверхразрешимых групп. В [11, следствие 4.6.2] получен результат, являющийся некоторым аналогом теоремы Фрисена: если группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B и $(|G : A|, |G : B|) = 1$, то G w-сверхразрешима.

Однако оставалась нерассмотренной следующая

Проблема. *Описать структуру группы $G = HK$, где H и K — взаимно перестановочные c-сверхразрешимые подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G.*

Решению данной проблемы посвящена настоящая работа. Для этого вводится понятие расширенно c-сверхразрешимой группы, обобщающее одновременно понятия c-сверхразрешимой и w-сверхразрешимой групп.

Напомним [12], что для некоторого класса групп $\mathfrak{F}$ главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$.

Определение 1. Будем говорить, что группа G является *расширенно c-сверхразрешимой* (кратко, cw-*сверхразрешимой*) группой, если ее каждый неабелев главный фактор изоморфен простой группе, а каждый абелев главный фактор H/K $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-централен, т. е. $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Обозначим класс всех расширенно c-сверхразрешимых групп через $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Заметим, что для класса всех сверхразрешимых групп $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\mathrm{c}} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_{\mathrm{c}} \cup \mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$.

Теорема A. *Класс $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ является нормально наследственной композиционной формацией и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N)=\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, если N — простая неабелева группа, и $h(N)=\mathfrak{N}_p(G\in\mathfrak{S}\mid S\in\mathfrak{A}(p-1)$ и $S\ \mathbb{P}\text{-}sn\,G$ для любой $S\in\mathrm{Syl}(G))$, если N — группа порядка p, где p — простое число.*

Заметим, что формация $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ не является формацией Фиттинга, поскольку в противном случае группа, являющаяся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, всегда была бы сверхразрешимой, что неверно.

Структурное строение расширенно c-сверхразрешимых групп дает

Теорема B. *Группа G расширенно c-сверхразрешима тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим утверждениям:*

1) $G^{\mathfrak{S}}=G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}$;

2) если $G^{\mathfrak{S}}\neq 1$, то $G^{\mathfrak{S}}/Z(G^{\mathfrak{S}})$ является прямым произведением G-инвариантных простых групп;

3) $Z(G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}})\subseteq Z_\infty^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}(G)$.

Следствие B.1. *Всякая расширенно c-сверхразрешимая группа является расширением квазинильпотентной группы с помощью w-сверхразрешимой группы.*

Согласно [1] группа G называется *ca-сверхразрешимой*, если она c-сверхразрешима и обладает главным рядом, каждый абелев фактор которого централен в G. В [1] установлено, что класс всех ca-сверхразрешимых групп является формацией Фиттинга. Через $\mathscr{K}_G$ обозначим [8] множество всех (с точностью до изоморфизма) композиционных факторов группы G и через $\mathscr{K}_G^a$ — множество всех (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов группы G.

Теорема C. *Пусть группа $G=HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H и K — расширенно c-сверхразрешимые подгруппы группы G, причем $\mathscr{K}_G^a\setminus\mathscr{K}_H^a\cap\mathscr{K}_G^a\setminus\mathscr{K}_K^a=\varnothing$, то G — расширенно c-сверхразрешимая группа;

2) если H — ca-сверхразрешимая подгруппа, а K — расширенно c-сверхразрешимая подгруппа группы G, то G — расширенно c-сверхразрешимая группа.

Следующий результат является аналогом теоремы Фрисена для расширенно c-сверхразрешимых групп.

Следствие C.1. *Если группа $G=HK$ — произведение взаимно перестановочных расширенно c-сверхразрешимых подгрупп H и K, причем $(|G:H|,|G:K|)=1$, то G — расширенно c-сверхразрешимая группа.*

Решение проблемы дает

Следствие C.2. *Если группа $G=HK$ — произведение взаимно перестановочных c-сверхразрешимых подгрупп H и K, причем $(|G:H|,|G:K|)=1$, то G — расширенно c-сверхразрешимая группа.*

Произведения нормальных расширенно c-сверхразрешимых подгрупп описывает

Следствие C.3. *Если $G=HK$ — произведение нормальных расширенно c-сверхразрешимых подгрупп H и K, причем $(|G:H|,|G:K|)=1$, то G — расширенно c-сверхразрешимая группа.*

2. Предварительные результаты

Используется стандартная теоретико-групповая терминология из [13, 14]. Напомним понятия и обозначения, существенные в работе. Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел; 1 — единичная группа; $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G для простого числа p; $\mathrm{Syl}(G)$ — множество всех силовских подгрупп группы G; M_G — ядро подгруппы M в группе G; $H \rtimes K$ — полупрямое произведение групп H и K; $\mathfrak{G}$ — класс всех групп; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{U}_c$ — класс всех c-сверхразрешимых групп; $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — класс всех w-сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп; $\mathfrak{J}$ — класс всех простых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы; *нормально наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее нормальные подгруппы.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{$формации$\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и любого $p \in \pi(H/K))$, обозначается через $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Отображение $f : \mathfrak{J} \to \{$формации$\}$ называется *композиционным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной*, если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(A)$ для любого главного фактора H/K группы G и $A \in \mathscr{K}_{H/K})$, обозначается через $\mathfrak{F} = CLF(f)$.

Внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$ называется такой локальный экран f, что $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p. Экран f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$, если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации $\mathfrak{F}$. Аналогично вводится понятия внутреннего композиционного и максимального внутреннего композиционного экранов.

Любая локальная (композиционная) формация имеет единственный максимальный внутренний экран [13, гл. 1].

В работе будем использовать следующие результаты.

Теорема 2.1 [10]. *Формация* $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ *локальна и имеет локальный экран* f *такой, что* $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ *для любого простого* p.

Лемма 2.2 [8]. *Пусть* $G = HK$ *— произведение взаимно перестановочных подгрупп* H *и* K. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* N *— максимальная нормальная подгруппа группы* G, *то* $\{HN, KN, (H \cap K)N\} \subseteq \{N, G\}$;

2) *если* N *— неабелева минимальная нормальная подгруппа группы* G, *то* $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$ *и* $N = (N \cap H)(N \cap K)$;

3) *если* N *— минимальная нормальная подгруппа группы* G, *то либо* $N \leq H \cap K$, *либо* $[N, H \cap K] = 1$;

4) *если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{H\cap N, K\cap N\}\subseteq\{N,1\}$;*

5) *если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и $K\cap N=1$, то либо $N\leq C_G(H)$, либо $N\leq C_G(K)$. Кроме того, если N нециклическая, то $N\leq C_G(K)$.*

Напомним [13, с. 251], что группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ (p_i — простое число, $i=1,2,\dots,n$) называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1>p_2>\dots>p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i=1,2,\dots,n$.

Теорема 2.3 [11]. *Группа G дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда $G=HK$, где подгруппы H и K дисперсивны по Оре и $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

Лемма 2.4 [2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и N — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N|=p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V)\in\mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Теорема 2.5 [8]. *Пусть $G=HK$ — произведение своих взаимно перестановочных подгрупп H и K. Тогда $\mathscr{K}_G=\mathscr{K}_H\cup\mathscr{K}_K$.*

Предложение 2.6 [10]. *Любая* w*-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.*

Теорема 2.7 [10]. *Класс* $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ *является наследственной насыщенной формацией.*

Лемма 2.8 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и группа $G=HK$ — произведение своих взаимно перестановочных подгрупп H и K. Пусть $(H\cap K)_G=1$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $H\in\mathfrak{F}$ и $K\in\mathfrak{F}$.*

Нам потребуется следующий результат, вытекающий из леммы 4.5 в [11].

Лемма 2.9 [11]. *Пусть $G=AB$, где A — разрешимая подгруппа, а подгруппа B перестановочна с любой подгруппой из A. Тогда B $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Лемма 2.10 [8]. *Пусть $G=AB$ — произведение своих взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если U — подгруппа из G, то $(U\cap A)(U\cap B)$ — подгруппа и $(U\cap A)$ и $(U\cap B)$ — взаимно перестановочные подгруппы.*

Сформулируем лемму 4.1.10 из [8] для взаимно перестановочных подгрупп.

Лемма 2.11 [8]. *Пусть подгруппы A и B группы G взаимно перестановочны и подгруппа N нормальна в G. Тогда AN/N и BN/N взаимно перестановочны.*

3. Доказательства теорем A и B

В данном разделе доказываются теоремы, описывающие структуру расширенно c-сверхразрешимой группы и свойства класса всех расширенно c-сверхразрешимых групп.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация и f — ее внутренний композиционный экран. Пусть N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причем N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Главный фактор N является $\mathfrak{F}$-центральным в группе G тогда и только тогда, когда $G/C_G(N) \in f(p)$.*

Доказательство. Пусть $G/C_G(N) \in f(p)$. Рассмотрим полупрямое произведение $R = N \rtimes G/C_G(N)$. Заметим, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $C_R(N) = N$. Тогда $R/C_R(N) \simeq G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$, т. е. главный фактор N группы G является $\mathfrak{F}$-центральным.

Пусть N — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Тогда $R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N$. Отсюда следует, что $R/C_R(N) \simeq G/C_G(N) \in f(p)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *класс групп $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\,G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$ является формацией;*

2) *локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{X}$ для любого простого p, является максимальным внутренним экраном формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Согласно теореме 2.1 класс групп $\mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)) \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}$ является формацией. Заметим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. Следовательно, $\mathfrak{X}$ также формация. Утверждение 1 доказано.

Установим справедливость утверждения 2. Из теоремы 2.1 и того, что $f(p) = \mathfrak{X} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$, следует, что локальный экран f является внутренним экраном формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Применяя теорему 3.3 в [13], получаем, что локальный экран f является максимальный внутренним экраном формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Класс $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ является нормально наследственной формацией.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и $N \trianglelefteq G$. Докажем, что фактор-группа G/N также является $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$-группой. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через подгруппу N:

$$1 = G_1 < \dots < G_i = N < G_{i+1} < \dots < G_n = G.$$

Тогда любой главный фактор G_{j+1}/G_j является $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-центральным, если он абелев, и изоморфен простой группе, если неабелев. Рассмотрим главный ряд группы G/N:

$$N/N = G_i/N < G_{i+1}/N < \dots < G_n/N = G/N.$$

В силу G-изоморфизма факторов $(G_{j+1}/N)/(G_j/N) \simeq G_{j+1}/G_j$ любой главный фактор $(G_{j+1}/N)/(G_j/N)$ либо $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-централен, либо изоморфен простой группе. Следовательно, G/N — $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$-группа.

Пусть $G/N_1 \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, $N_1 \trianglelefteq G$ и $N_2 \trianglelefteq G$. Из леммы 1.3 в [13] следует, что любой главный фактор группы $G/(N_1 \cap N_2)$ G-изоморфен либо некоторому главному фактору группы G/N_1, либо некоторому главному фактору группы G/N_2. Отсюда следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ является формацией.

Докажем, что если $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через N, и уплотним его до главного ряда группы N. Пусть H/K — главный фактор группы N этого ряда. Тогда $B \leq K < H \leq$

$A \leq N$ для некоторого главного фактора A/B группы G. Если A/B неабелев, то A/B изоморфен простой группе и $A/B = H/K$. Предположим, что A/B абелев. Тогда A/B — w$\mathfrak{U}$-центральный фактор и p-группа для некоторого простого p. Формация w$\mathfrak{U}$ композиционная. По лемме 3.1 $G/C_G(A/B) \in f(p)$. Так как $f(p)$ — наследственная формация, $N/N \cap C_G(A/B) \simeq NC_G(A/B)/C_G(A/B) \in f(p)$. Из $N \cap C_G(A/B) \leq C_N(A/B)$ получаем, что $N/C_N(A/B) \in f(p)$. Из $C_N(A/B) \leq C_N(H/K)$ следует, что $N/C_N(H/K) \in f(p)$. По лемме 3.1 H/K является w$\mathfrak{U}$-центральным фактором. Ввиду теоремы Жордана — Гёльдера $N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Итак, формация $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ нормально наследственная. Лемма доказана.

Доказательство теоремы A. Пусть h — композиционный экран такой, что для любой простой группы N будет $h(N) = \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, если N — неабелева простая группа, и $h(N) = \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\, G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$, если N — группа порядка p, где p — простое число. Положим $\mathfrak{X} = CLF(h)$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$.

Предположим, что множество $\mathfrak{X} \backslash \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ являются формациями, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, которая совпадает с $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$-корадикалом группы G, т. е. $N = G^{\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}}$.

Пусть N — неабелева группа. Если $N = G$, то G — простая группа и $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$; противоречие. Будем считать, что $N \neq G$. Заметим, что $C_G(N) \cap N \trianglelefteq G$. Из неабелевости и минимальности N следует, что $C_G(N) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G/C_G(N) \simeq G \in h(N) = \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие с выбором группы G.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in h(N)$. Применяя лемму 3.2, получаем, что $h(N) = \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\, G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G)) \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. По лемме 3.1 фактор N w$\mathfrak{U}$-централен в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ получаем, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Это противоречит выбору G. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}} \backslash \mathfrak{X}$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и $\mathfrak{X}$ — формации, можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = G^{\mathfrak{X}}$.

Пусть N — неабелева группа. Тогда $C_G(N) = 1$. Из $G/C_G(N) \simeq G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}} = h(N)$, следует, что главный фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие с выбором G.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Из $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ вытекает, что N является w$\mathfrak{U}$-центральным главным фактором группы G. Применяя леммы 3.1 и 3.2, получаем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\, G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G. Итак, $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}} \subseteq \mathfrak{X}$, тем самым равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ установлено. Теорема доказана.

Лемма 3.4. *Пусть G является расширенно c-сверхразрешимой группой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G^{\mathfrak{S}} \leq C_G(G_{\mathfrak{S}})$;

2) $(G^{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S}} \leq Z(G^{\mathfrak{S}})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Очевидно, что все главные факторы группы G, находящиеся ниже подгруппы $G_{\mathfrak{S}}$, w$\mathfrak{U}$-центральны. Следовательно, подгруппа $G_{\mathfrak{S}}$ w$\mathfrak{U}$-гиперцентральна и, таким образом, является подгруппой w-сверхразрешимого гиперцентра $Z_{\infty}^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}(G)$. В силу следствия 9.3.2

в [13] $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} \leq C_G\big(Z_\infty^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}(G)\big)$. Отсюда и из предложения 2.6 заключаем, что $G^{\mathfrak{S}} \leq G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} \leq C_G(G_{\mathfrak{S}})$.

Докажем утверждение 2. Пусть $R = (G^{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S}}$. Из R char $G^{\mathfrak{S}} \trianglelefteq G$ следует, что $R \trianglelefteq G$. Поэтому $R \leq G_{\mathfrak{S}}$. Ввиду утверждения 1 леммы $G^{\mathfrak{S}} \leq C_G(R)$. Откуда следует справедливость утверждения 2. Лемма доказана.

Доказательство теоремы B. Обозначим через K разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ группы G.

Пусть G — расширенно c-сверхразрешимая группа. Если группа G разрешима, то $K = 1$ и G w-сверхразрешима. Поэтому утверждения 1–3 выполняются. Будем считать, что группа G не разрешимая. Тогда $K \neq 1$. Ввиду предложения 2.6 $G/G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{S}$. Следовательно, $K \subseteq G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}$. Так как $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ является формацией, $G/K \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. В силу разрешимости G/K получаем, что $G/K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Значит, $G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}} \subseteq K$ и $K = G^{\mathrm{w}\mathfrak{U}}$. Утверждение 1 выполняется. Заметим, что все главные факторы группы G, лежащие ниже центра $Z(K)$, абелевы, а значит, и $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-центральны. Следовательно, центр $Z(K)$ $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-гиперцентрален, и утверждение 3 выполняется.

Покажем, что $K/Z(K)$ является прямым произведением G-инвариантных простых групп.

Предположим, что $Z(K) = 1$. Пусть N_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе K. Если N_1 абелева, то из $N_1 \leq K_{\mathfrak{S}}$ по утверждению 2 леммы 3.4 получаем, что $N_1 \leq Z(K) = 1$. Значит, N_1 — неабелева группа. Так как $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, N_1 является простой группой. Заметим, что $G/C_G(N_1)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N_1)$, а $N_1C_G(N_1)/C_G(N_1)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(N_1)$. Следовательно, фактор-группа

$$G/N_1C_G(N_1) \simeq (G/C_G(N_1))/(N_1C_G(N_1)/C_G(N_1)$$

изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(N_1)/\mathrm{Inn}(N_1)$. Исходя из справедливости гипотезы Шрайера, заключаем, что $G/N_1C_G(N_1)$ разрешима. Тогда $K \leq N_1C_G(N_1)$, следовательно, $K = N_1C_G(N_1) = N_1C_K(N_1)$, причем $N_1 \cap C_K(N_1) = 1$. Если $K = N_1$, то утверждение 2) выполняется. Предположим, что K не является простой. Поэтому $C_K(N_1) \neq 1$. В случае, когда $C_K(N_1)$ — простая группа, утверждение 2 выполняется. Предположим, что $C_K(N_1)$ не является простой, пусть N_2 — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $C_K(N_1)$. Так как $Z(K) = 1$, ввиду утверждения 2 леммы 3.4 N_2 — простая неабелева группа. По доказанному выше $K = N_2C_K(N_2)$. По тождеству Дедекинда $C_K(N_1) = C_K(N_1) \cap N_2C_K(N_2) = N_2(C_K(N_1) \cap C_K(N_2)) = N_2C_L(N_2)$, где $L = C_K(N_1) \cap C_K(N_2)$. Тогда $K = N_1N_2C_L(N_2)$. Применяя доказанное выше к $C_K(N_2)$ и т. д., можем заключить, что $K = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ является прямым произведением простых минимальных нормальных подгрупп группы G. Таким образом, верно и утверждение 2.

Пусть $Z(K) \neq 1$. Так как $G/Z(K)$ — расширенно c-сверхразрешимая группа и $(G/Z(K))^{\mathfrak{S}} = K/Z(K)$, для $G/Z(K)$ утверждения 1 и 3 выполняются. Обозначим $T/Z(K) = Z(K/Z(K))$. Тогда T — нормальная разрешимая подгруппа группы K. По лемме 3.4 T содержится в центре $Z(K)$. Поэтому $Z(K/Z(K)) = 1$. По доказанному выше для $G/Z(K)$ утверждение 2 выполняется.

Обратно, предположим, что для группы G справедливы утверждения 1–3. Проведем главный ряд группы G через подгруппу K. Заметим, что все главные факторы, лежащие выше K, абелевы и $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-центральны. По утверждению 2 фактор-группа $K/Z(K)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/Z(K)$, которые будут простыми. Ниже $Z(K)$ все главные факторы группы G w$\mathfrak{U}$-центральны по утверждению 3. В силу теоремы Жордана — Гёльдера для групп с операторами и определения 1 группа G расширенно c-сверхразрешима. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы C

В данном разделе рассмотрим свойства произведений взаимно перестановочных c-сверхразрешимых групп.

Лемма 4.1. *Пусть группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы для всех $i = 1, \dots, t$. Если $N \leq H$, где H — расширенно c-сверхразрешимая подгруппа группы G, то $N_i \trianglelefteq H$ для всех $i = 1, \dots, t$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Рассмотрим нормальное замыкание $N_i^H = \langle N_i^x \mid x \in H \rangle$ подгруппы N_i в H. Заметим, что N_i — субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, N_i — субнормальная подгруппа группы H. Согласно теореме 2.46 из [15] N_i^H является минимальной нормальной подгруппой группы H. Так как подгруппа N_i^H неабелева и изоморфна главному фактору расширенно c-сверхразрешимой группы H, то N_i^H — простая группа. Тогда в силу субнормальности N_i в N_i^H имеем $N_i^H = N_i$. Следовательно, $N_i \trianglelefteq H$ для любого $i = 1, \dots, t$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\, G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$. Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H — p-группа и $K \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Так как H и K разрешимы, по лемме 2.9 H и K являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами в G. По предложению 2.6 подгруппа K дисперсивна по Оре. По теореме 2.3 группа G дисперсивна по Оре. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 2.11 фактор-группа $G/N = HN/NKN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N. Из того, что $HN/N \simeq H/H \cap N$ — p-группа и $KN/N \simeq K/K \cap N \in \mathfrak{X}$, по выбору G заключаем, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Если R — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $N \neq R$, то $G/R \in \mathfrak{X}$. Отсюда ввиду леммы 3.2 $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с выбором G. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N — абелева q-группа, где q — наибольший простой делитель $|G|$, причем $q \neq p$.

По п. 4 леммы 2.2 имеем $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.

Случай $H \cap N = N$ невозможен, так как H — p-группа, N — q-группа и $q \neq p$.

Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Тогда $N \subseteq Q$. Так как H — p-группа, заключаем, что $Q^x \subseteq K$ для некоторого $x \in G$. Значит, $N = N^x \subseteq Q^x \subseteq K$, что противоречит $K \cap N = 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$.

Предположим, что $C_G(N) \neq G$. По п. 5 леммы 2.2 либо $N \leq C_G(H)$, либо $N \leq C_G(K)$. Поэтому либо $H \leq C_G(N)$, либо $K \leq C_G(N)$. Отсюда по тождеству Дедекинда либо $C_G(N) = C_G(N) \cap HK = H(C_G(N) \cap K)$, либо $C_G(N) = (C_G(N) \cap H)K$. Ввиду леммы 2.10 $C_G(N)$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп. По выбору G будет $C_G(N) \in \mathfrak{X}$. Из $O_p(C_G(N)) = 1$

следует, что $C_G(N) \in (G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\,G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$. Тогда $N \in \mathfrak{A}(p-1)$. Получили противоречие с тем, что $q > p$.

Предположим, что $C_G(N) = G$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ следует, что $O_p(G/N) = N/N$. Поэтому $G/N \in (G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1)$ и S $\mathbb{P}$-$sn\,G$ для любой $S \in \mathrm{Syl}(G))$. Тогда p не делит $|G/N|$. Значит, $H = 1$ и $G = K \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с выбором G. Лемма доказана.

Предложение 4.3. *Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H — нильпотентная подгруппа, а K — w-сверхразрешимая подгруппа, то G — w-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой условия предложения не выполняются. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из леммы 2.11 $HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{N}$ и $KN/N \simeq K/K \cap N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, по выбору G заключаем, что $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$ и $N = C_G(N)$. Подгруппы H и K разрешимы и дисперсивны по Оре. Ввиду леммы 2.9 и теоремы 2.3 группа G дисперсивна по Оре. Тогда N — абелева p-группа, где p — наибольший простой делитель $|G|$. Силовская p-подгруппа группы G нормальна в G. Применяя лемму 3.9 из [13], получаем, что $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

В соответствии с леммой 2.2 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Из нильпотентности H и $N = C_G(N) \leq H$ следует, что $H = N$. Рассмотрим произвольный K-главный фактор U/V группы N. Так как $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то $K/C_K(U/V) \in f(p)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. Тогда по лемме 2.4 имеем $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Таким образом, $G/C_G(N) = KC_G(N)/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили противоречие с выбором G.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Это противоречит тому, что $G = HK$ и $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Пусть N — циклическая группа. Тогда G/N — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Значит, $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G. Пусть теперь N — нециклическая группа. По п. 5 леммы 2.2 $N \leq C_G(K)$. Тогда K — p-группа. Получили противоречие с тем, что $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $K \cap N = 1$.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Ввиду п. 5 леммы 2.2 либо $N \leq C_G(H)$, либо $N \leq C_G(K)$. Если $N \leq C_G(H)$, то $H \leq C_G(N) = N \leq K$. Тогда $G = HK = K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G. Пусть $N \leq C_G(K)$. Отсюда и из $N \leq K$ заключаем, что $N = K$. Из п. 5 леммы 2.2 заключаем, что N — циклическая группа. Теперь, как в рассмотренном выше случае 3 предложения, $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили противоречие. Предложение доказано.

Доказательство теоремы C. Докажем утверждение 1. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой условия утверждения 1 теоремы выполняются, но $G \notin \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Если $N = G$, то G — простая группа, следовательно, $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 2.11 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N. Заметим, что $HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и $KN/N \simeq K/K \cap N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Согласно теореме 2.5 $\mathscr{K}^a_{G/N} \backslash \mathscr{K}^a_{HN/N} \cap \mathscr{K}^a_{G/N} \backslash \mathscr{K}^a_{KN/N} = \varnothing$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Из леммы 3.3 следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть N — неабелева подгруппа. Тогда $N = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, \dots, t$. Согласно лемме 2.2 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Так как H и K — расширенно c-сверхразрешимые подгруппы и $N = N_1 \times \dots \times N_t$, по лемме 4.1 $N_i \trianglelefteq H$ и $N_i \trianglelefteq K$. Отсюда и из $G = HK$, следует, что $N_i \trianglelefteq G$ для всех $i = 1, \dots, t$. В силу того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, получаем, что $t = 1$ и N — простая группа. Из $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда по п. 2 леммы 2.2 получаем, что $N = (H \cap N)(K \cap N) = 1$; противоречие с выбором N.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $N \subseteq H$ и по п. 5 леммы 2.2 $N \le C_G(H)$ или $N \le C_G(K)$. Так как $N \le H$ и N неабелева, случай $N \le C_G(H)$ невозможен. Значит, $N \le C_G(K)$. Поскольку $N = N_1 \times \dots \times N_t$, то $N_i \le C_G(K)$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Из $N_i \le H$ по лемме 4.1 получаем, что $N_i \trianglelefteq H$ для каждого $i = 1, \dots, t$. В силу $G = HK$ имеем $N_i \trianglelefteq G$. Так как N — минимальная нормальная подгруппа группы G, заключаем, что $N = N_i$ и N — простая группа. В силу $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ имеем, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие с выбором G.

4. Случай $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на H и K.

Пусть N — абелева группа. Тогда N — p-группа для некоторого простого числа p. Обозначим $C = C_G(N)$. Согласно лемме 2.2 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Согласно теореме A

$$h(p) = \mathfrak{N}_p(G \in \mathfrak{S} \mid S \in \mathfrak{A}(p-1) \text{ и } S\,\mathbb{P}\text{-}sn\,G \text{ для любой } S \in \mathrm{Syl}(G)).$$

По лемме 3.2 $h(p) \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Пусть U/V — любой H-главный фактор группы N. Так как $H \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. Из леммы 2.4 получаем, что $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Аналогично показывается, что $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Рассмотрим фактор-группу $G/C = HC/C \cdot KC/C$. Возьмем в G/C любую силовскую подгруппу P/C. В силу того, что $\mathscr{K}^a_{G/C} \backslash \mathscr{K}^a_{HC/C} \cap \mathscr{K}^a_{G/C} \backslash \mathscr{K}^a_{KC/C} = \varnothing$, и предложения 2.6, получаем, что либо $P/C \le HC/C$, либо $P/C \le KC/C$. Пусть $P/C \le HC/C$. Тогда из $HC/C \simeq H/C_H(N) \in h(p)$ следует, что $P/C \in \mathfrak{A}(p-1)$. Если $P/C \le KC/C$, то аналогично получаем, что $P/C \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как HC/C и KC/C разрешимы, по лемме 2.9 HC/C и KC/C являются $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами в G/C. Отсюда и из $HC/C \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $KC/C \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ следует, что P/C $\mathbb{P}$-sn G/C. Значит, $G/C \in h(p)$. Ввиду лемм 3.1 и 3.2 фактор N $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-централен в группе G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ получаем, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Это противоречит выбору G.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда $N \notin H \cap K$ и $(H \cap K)_G = 1$. Если $H^{\mathfrak{S}} = 1$ и $K^{\mathfrak{S}} = 1$, то H и K разрешимы. Поэтому $H \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Применяя теорему 2.7 и лемму 2.8, получаем, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Это противоречит выбору G. Значит, без потери общности можно считать, что $H^{\mathfrak{S}} \ne 1$. По следствию 4.3.6 в [8] $H^{\mathfrak{S}} \trianglelefteq G$. Тогда $N \le H^{\mathfrak{S}}$. Отсюда $N \le H \cap N = 1$; противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Пусть N — нециклическая подгруппа. По п. 5 леммы 2.2 $N \leq C_G(K)$. Тогда $K \leq C$ и $G/C = HC/C \cdot KC/C = HC/C \simeq H/(C \cap H) = H/C_H(N)$. Так как $N \leq H$ и $H \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, по лемме 2.4 $H/C_H(N) \in h(p)$, где h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Поскольку N абелева, то $h(p) = f(p)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. По лемме 3.1 фактор N $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-централен в G. Значит, $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие. Пусть N — циклическая группа. Тогда N — группа простого порядка и G/C — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Значит, в G/C любая силовская подгруппа принадлежит $\mathfrak{A}(p-1)$ и является $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой. Поэтому $G/C \in h(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Это противоречит выбору G.

4. Случай $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на H K. Утверждение 1 доказано.

Установим справедливость утверждения 2. Предположим, что G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2 не выполняется. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = G^{\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}}$.

Пусть N — абелева группа. Значит, N — p-группа для некоторого простого числа p.

Согласно лемме 2.2 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Так как $K \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, для максимального внутреннего композиционного экрана h формации $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ и любого K-главного фактора U/V группы N имеем $K/C_K(U/V) \in h(p)$. Тогда по лемме 2.4 $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Поскольку H является ca-сверхразрешимой группой, для любого H-главного фактора U/V группы N получаем $C_H(U/V) = H$. Стало быть, $H/C_H(N)$ является p-группой по лемме 2.4. Таким образом, $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_K(N)/C_K(N)$, где $HC_G(N)/C_G(N)$ — p-группа и $KC_K(N)/C_K(N)$ — $h(p)$-группа. Применяя лемму 4.2, получаем, что $G/C_G(N) \in h(p)$. Это означает, что главный фактор $N = G^{\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}}$ является $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-центральным в G. Тем самым пришли к противоречию с $G \notin \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда $N \notin H \cap K$ и $(H \cap K)_G = 1$. Если $H^{\mathfrak{S}} = 1$ и $K^{\mathfrak{S}} = 1$, то H нильпотентна, а $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Применяя предложение 4.3, получаем, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Это противоречит выбору G. Значит, без потери общности можно считать, что $H^{\mathfrak{S}} \neq 1$. По следствию 4.3.6 из [8] $H^{\mathfrak{S}} \trianglelefteq G$. Получили противоречие с тем, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа и $N \cap H = 1$.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Пусть N — нециклическая подгруппа. По п. 5 леммы 2.2 $N \leq C_G(K)$. Тогда

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N).$$

Так как $N \leq H$ и H — ca-сверхразрешимая группа, по лемме 2.4 $H/C_H(N)$ является p-группой. Следовательно, $G/C_G(N) \in h(p)$, где h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Поскольку N абелева, из лемм 3.1 и 3.2 следует, что N — $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-центральный главный фактор группы G. Тогда $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие. Если N — циклическая группа, то $|N| = p$ и $G/C_G(N)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Тогда $G/C_G(N) \in h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие с выбором G.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Пусть N — нециклическая подгруппа.

По п. 5 леммы 2.2 $N \le C_G(H)$. Тогда $H \le C_G(N)$ и

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N).$$

Так как $N \le K$ и $K \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, по лемме 2.4 $K/C_K(N) \in h(p)$, где h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Из абелевости N следует, что $h(p) = f(p)$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$. По лемме 3.1 фактор N $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-централен в G. Случай, когда N — циклическая группа, доказывается аналогично случаю 3.

Допустим, что N — неабелева группа. По п. 2 леммы 2.2 $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$ и $N = (N \cap H)(N \cap K)$. Отсюда следует, что случай $H \cap N = K \cap N = 1$ невозможен. Заметим, что $N = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i — изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, \dots, t$.

Пусть $H \cap N = N$. Так как H — *ca*-сверхразрешимая, а следовательно, расширенно *c*-сверхразрешимая подгруппа, по лемме 4.1 подгруппа N_i нормальна в H. Если $K \cap N = N$, то по лемме 4.1 подгруппа N_i нормальна в K. Значит, N_i нормальна в G для любого $i = 1, \dots, t$. Если $K \cap N = 1$, то ввиду неабелевости N и $N \le H$ получаем по п. 5 леммы 2.2, что $N \le C_G(K)$. Тогда $K \le C_G(N_i)$ и N_i нормальна в G для любого $i = 1, \dots, t$. Поскольку N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $N = N_i$ — простая группа. Отсюда ввиду $G/N \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$. Получили противоречие с выбором G.

Если $K \cap N = N$ и $H \cap N = 1$, то, как выше, показываем, что $N = N_i$ — простая группа и $G \in \mathfrak{U}_{\mathrm{cw}}$, что противоречит выбору G. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательное чтение рукописи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ведерников В. А.* О некоторых классах конечных групп // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 10. С. 872–875.
2. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 11. С. 10–14.
3. *Robinson D.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation // J. Austral. Math. Soc. 2001. N 70. P. 143–159.
4. *Huppert B.* Monomiale Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. V. 6. P. 93–94.
5. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1, N 2. P. 115–187.
6. *Friesen D. K.* Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, N 1. P. 46–48.
7. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolvability of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.
8. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin: Walter de Gruyter, 2010.
9. *Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M. C.* On mutually permutable products of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 294, N 1. P. 127–135.
10. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
11. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
12. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
13. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

15. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Вышэйшая школа, 2006.

Статья поступила 18 мая 2015 г.

Васильев Александр Федорович, Мысловец Евгений Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
formation56@mail.ru, myslovets@gmail.com

Васильева Татьяна Ивановна
Белорусский гос. университет транспорта, кафедра высшей математики,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru