*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2016. Том 57, № 3*

*УДК 514.764*

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ ВАГНЕРА ДЛЯ СЛУЧАЯ МНОГООБРАЗИЯ С КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

**С. В. Галаев**

**Аннотация.** На многообразии с контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ вводится понятие $N$-продолженной связности (связности в векторном расслоении $(D, \pi, X)$), где $N$ — эндоморфизм распределения $D$. Показывается, что тензор кривизны $N$-продолженной связности при подходящем выборе эндоморфизма $N$ совпадает с тензором кривизны Вагнера.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.310

**Ключевые слова:** Почти контактная метрическая структура, $N$-продолженная связность, продолженная почти контактная метрическая структура, тензор кривизны Вагнера.

## § 1. Введение

К тензору кривизны Вагнера [1, 2] приводят условия интегрируемости тензорных дифференциальных уравнений для неголономного многообразия. В работе показано, что в случае контактного многообразия тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны некоторой связности в векторном расслоении, пространством которого является распределение контактной структуры. В построении связности, называемой ниже *$N$-продолженной связностью*, участвует подходящий для этого эндоморфизм $N : D \to D$ распределения контактной структуры. Выбором эндоморфизма $N : D \to D$ обеспечивается возможность задания связности в векторном расслоении с нужными свойствами. Предлагаемая конструкция $N$-продолженной связности одновременно представляет собой метод наведения на пространстве расслоения $(D, \pi, X)$ (продолженной) структуры почти контактного метрического пространства. Истоки используемых идей можно обнаружить в геометрии касательных расслоений.

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы Сасаки [3], опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику $g$, заданную на гладком многообразии $X$, определяет риманову метрику $G$ на касательном расслоении $TX$ многообразия $X$. Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющем место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви-Чивиты) касательного расслоения $TTX$ многообразия $TX$ в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения $TX$. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение $D$ почти контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Так же, как и расслоение $TTX$, касательное расслоение $TD$ благодаря заданию связности над распределением [4] (а затем и $N$-продолженной связности — связности в векторном расслоении $(X, D)$) расщепляется в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [4, 5], на многообразии $D$ естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, позволяющая, например, придать инвариантный характер аналитическому описанию механики со связями. В [5] на многообразии $D$ определяется геодезическая пульверизация связности над распределением, являющаяся аналогом геодезической пульверизации, которая задана на пространстве касательного расслоения $TX$, и имеющая ясную физическую интерпретацию: проекции интегральных кривых геодезической пульверизации связности над распределением совпадают с допустимыми геодезическими (траекториями движения механической системы со связями).

Предлагаемая работа посвящена развитию двух идей: обобщения конструкции Сасаки на случай нечетной размерности [3], а также продолжения внутренней связности.

Работа устроена следующим образом. В § 2 два пункта. В п. 2.1 содержатся краткие сведения о внутренней геометрии почти контактных метрических пространств. Более подробно соответствующий материал излагается в [6]. В п. 2.2 вводится понятие $N$-продолженной метрической связности. Внутренняя связность задает параллельный перенос допустимых векторов (т. е. векторов, принадлежащих распределению $D$) вдоль допустимых кривых. Всякая соответствующая ей $N$-продолженная связность является связностью в векторном расслоении $(D, \pi, X)$, определяемой внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \to D$. От выбора эндоморфизма $N : D \to D$ зависят свойства продолженной связности, а также свойства (продолженной) почти контактной метрической структуры, возникающей на пространстве $D$ векторного расслоения $(D, \pi, X)$. Центральной в этом пункте является теорема о существовании и единственности $N$-продолженной метрической связности с нулевым кручением.

В § 3 на многообразии с почти контактной метрической структурой определяется $N$-связность. Исследуются простейшие свойства $N$-связности, в частности, указывается на отношение $N$-связности к $N$-продолженной связности.

В § 4 на многообразии $D$ с продолженной метрической связностью определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Приводятся некоторые свойства продолженной почти контактной метрической структуры.

## § 2. Внутренняя и $N$-продолженная связности

**2.1. Основные сведения из внутренней геометрии почти контактных метрических пространств.** Пусть $X$ — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ и $\Gamma TX$ — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на $X$. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса $C^\infty$. *Почти контактной метрической структурой на* $X$ называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на $X$, где $\varphi$ — тензор типа $(1, 1)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, $\vec{\xi}$ и $\eta$ — вектор и ковектор, называемые соответственно *структурным вектором* и *контактной формой*, $g$ — (псевдо)риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi},$$

$$g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0, \quad \vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma TX.$$

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{X},\vec{Y}) = g(\vec{X},\varphi\vec{Y})$ называется *фундаментальной формой структуры.* Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.* В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой.* Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi$ — кручение Нейенхейса, образованное тензором $\varphi$. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой.* Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется *сасакиевым многообразием.* Пусть $D$ — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой $\eta$, и $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении $D$ дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ и называется *вектором Риба.*

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi} = 0. \tag{1}$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти $K$-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Последнее равенство чаще используется в случае, когда форма $\omega$ имеет максимальный ранг, тогда соответствующее пространство называют *$K$-контактным.*

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны, многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В тоже время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств, что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [6].

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n;\ a,b,c,e = 1,\dots,n-1)$ многообразия $X$ будем называть *адаптированной к неголономному многообразию $D$*, если $D^\perp = \mathrm{Span}\big(\frac{\partial}{\partial x^n}\big)$ [6]. Пусть $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение $D$: $D = \mathrm{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии $X$ неголономное поле базисов $(\vec{e}_a,\partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $\big(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a\big)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты $M^n_{ab}$ образуют так называемый тензор неголономности [2]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. *Адаптированным* будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n\Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^\alpha = x^\alpha(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Тензорное поле типа $(p,q)$, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым* (к распределению $D$), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\vec{e}_{a_1}\otimes\dots\otimes\vec{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\dots\otimes dx^{b_q}.$$

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор $\varphi$ является допустимым тензорным полем типа $(1,1)$. Поле аффинора $\varphi$, учитывая его свойства, называем *допустимой почти комплексной структурой.* Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае назвать *допустимой симплектической формой.*

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону: $t^a_b = A^a_{a'}A^{b'}_b t^{a'}_{b'}$, где $A^a_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат. Последнее обстоятельство подкрепляется тем фактом, что $(L_{\vec{\xi}}t)^a_b = \partial_n t^a_b$.

Замечание 2. Допустимую тензорную структуру, для которой выполняется равенство $\partial_n t^a_b = 0$, будем называть *проектируемой* (в литературе можно встретить и другие термины, обращенные к структурам с подобным свойством: «базисные», «полубазисные» и т. д.). Как будет следовать из дальнейшего, допустимые проектируемые структуры естественным образом могут рассматриваться как структуры, заданные на многообразии меньшей размерности.

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля:

$$h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n\varphi^a_b, \quad C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}, \quad C^a_b = g^{da}C_{db}, \quad \psi^b_a = g^{da}\omega_{da}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора $g$: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \widetilde{\Gamma}^b_{an} = \widetilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a,, \quad \widetilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \quad \widetilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$

*где*

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

**2.2. $N$-продолженная метрическая связность.** Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой [6] понимается отображение $\nabla : \Gamma D\times\Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}}$,

2) $\nabla_{\vec{u}} f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v}$,

где $\Gamma D$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности $S$ по определению полагается равным $S(\vec{X},\vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X},\vec{Y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$, $S = 0$ [2]. В адаптированных координатах имеем

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}). \tag{2}$$

Заметим, что $\Gamma^a_{bc} = \widetilde{\Gamma}^a_{bc}$ (см. теорему 1).

Так же, как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение $D$. Говорят, что над распределением $D$ *задана связность*, если $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, $VD$ — вертикальное распределение на тотальном пространстве $D$.

Введем на $D$ структуру гладкого многообразия, сопоставив каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии $X$ сверхкарту $\widetilde{K}(x^\alpha, x^n + a)$ на многообразии $D$, где $x^{n+a}$ — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть *адаптированной.* Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a)x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В [4] введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии $D$, имеющее координатное представление $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b}\partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N : D \to D$ может быть выбран произвольно. Будем называть *кручением продолженной связности* кручение исходной внутренней связности. В дальнейшем продолженную связность будем называть *$N$-продолженной связностью.*

В [2] допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{p[\vec{u},\vec{v}]}\vec{w} - p[q[\vec{u},\vec{v}]\vec{w}],$$

названо Вагнером *первым тензором кривизны Схоутена.* Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение $D$ не содержит интегрируемого распределения размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [2]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения $D$*, а распределение $D$ в случае обращения в нуль тензора Схоутена — *распределением нулевой кривизны.* Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [2].

Замечание 3. Для (почти) $K$-контактных пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае это не так.

Векторные поля $\big(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c}\partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G_n^a \partial_{n+a}, \partial_{n+a}\big)$ определяют на $D$ неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $\big(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n\big)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + x^{n+d}\big(2\omega_{ba}N_d^c + R_{bad}^c\big)\partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}\big(\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c\big)\partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}. \tag{5}$$

Из (3), (4) следует выражение для тензора кривизны продолженной связности:

$$K(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = 2\omega(\vec{u}, \vec{v})N\vec{w} + R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w}, \tag{6}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{u})\vec{v} = P(\vec{u}, \vec{v}) - (\nabla_{\vec{u}}N)\vec{v}, \tag{7}$$

где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

**Теорема 2.** *Существует $N$-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $\vec{Z}g(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\nabla_{\vec{Z}}\vec{X}, \vec{Y}) + g(\vec{X}, \nabla_{\vec{Z}}\vec{Y})$ *(свойство метричности),*
2) $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - p[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ *(отсутствие кручения),*
3) $N$ *— симметрический оператор такой, что*

$$g(N\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{X}, \vec{Y}), \tag{8}$$

*где $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \Gamma D$ — сечения распределения $D$, $P : TX \to D$ — проектор.*

Доказательство. Первые два условия теоремы однозначно определяют внутреннюю метрическую связность [2]. Альтернируя вторую ковариантную производную, получаем $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R_{eab}^d - g_{bd}R_{eac}^d$.

Сравнивая полученный результат с (8), находим явное выражение для эндоморфизма $N$:

$$N_b^f = \frac{1}{4(n-1)}\omega^{ea}\big(R_{eab}^f + g_{bd}g^{cf}R_{eac}^d\big).$$

Если $\partial_n g_{ab} = 0$, то полагаем $N = 0$. Тем самым теорема доказана.

Будем называть $N$-продолженную связность, наделенную свойствами теоремы 2, *$N$-продолженной метрической связностью.*

Будем использовать следующее обозначение для продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$. В частном случае $\nabla^1 = (\nabla, 0)$. Не требуя выполнения условия (8) и сопоставляя равенство $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R_{eab}^d - g_{bd}R_{eac}^d$ с равенством $\nabla_n g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac}$, заключаем, что справедлива

**Теорема 3.** *Тензор кривизны Вагнера совпадает с тензором кривизны $N$-продолженной метрической связности при условии, что $N_b^d = \frac{1}{4(n-1)}\omega^{ca}R_{cab}^d$.*

## § 3. Специальные связности на многообразиях с почти контактной метрической структурой

Э. Картан (см. [7–9]) первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивиты. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено Яно в [10]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. Голабом [11]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и неметрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой. Остановимся здесь лишь на работе Бежанку [12]. В ней определяется связность $\nabla^B$ на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{X}} = \widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{Y} - \eta(\vec{X})\widetilde{\nabla}_{\vec{Y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{Y})\widetilde{\nabla}_{\vec{X}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности $\nabla^B$ являются $\Gamma^{Ba}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической в более общем случае почти контактной метрической структуры, чем структура Сасаки. Действительно, так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна почти $K$-контактности почти контактной метрической структуры. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность $\nabla^N$ с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{X}} = \nabla^B_{\vec{X}}\vec{Y} + \eta(\vec{X})N\vec{Y}$, где $N$ — эндоморфизм из теоремы 2. Назовем введенную связность *$N$-связностью.* Отличными от нуля компонентами $N$-связности самое большее будут

$$\Gamma^{Na}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad \Gamma^{Na}_{nc} = N^a_c.$$

Кручение $N$-связности определяется равенством

$$S^N(\vec{X},\vec{Y}) = 2\omega(\vec{X},\vec{Y})\vec{\xi} + \eta(\vec{X})N\vec{Y} - \eta(\vec{Y})N\vec{X}$$

. Непосредственными вычислениями в адаптированных координатах проверяется справедливость следующего утверждения.

**Теорема 4.** *$N$-связность является метрической связностью.*

## § 4. *N*-продолженная связность как почти контактная метрическая структура

Пусть на многообразии $X$ задана контактная метрическая структура $(D, \varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X)$. Определим на распределении $D$ как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру $(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, полагая

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b), \quad \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0,$$
$$J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}, \quad J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a.$$

Векторные поля $\left(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - G^a_n\partial_{n+a}, \partial_{n+a}\right)$ определяются здесь продолженной связностью. Полученную структуру будем называть *продолженной почти контактной метрической структурой.* Пусть $\widetilde{\omega} = d\lambda$. Непосредственно проверяется, что отличные от нуля компоненты формы $\widetilde{\omega}$ определяются равенствами $\widetilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab}$. Таким образом, $\mathrm{rk}\,\widetilde{\omega} = \frac{n-1}{2}$. Отсюда, в частности, следует, что построенная структура не является контактной и, в частности, структурой Сасаки.

**Теорема 5.** *Продолженная почти контактная метрическая структура является почти $K$-контактной тогда и только тогда, когда исходная структура $K$-контактна.*

Доказательство. Ненулевые компоненты производной Ли $L_{\vec{u}}\tilde{g}$ в адаптированных координатах имеют следующий вид:

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{ab} = \partial_n g_{ab}, \tag{9}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,n+b} = \partial_n g_{ab} - g_{ac}N^c_b - -g_{cb}N^c_a, \tag{10}$$

$$(L_{\vec{u}}\tilde{g})_{n+a,b} = g_{ac}\big(P^c_{bd} - \nabla_b N^c_d\big)x^{n+d}. \tag{11}$$

На самом деле компоненты (10) также равны нулю как компоненты ковариантной производной от метрического тензора. Равенство $\partial_n g_{ab} = 0$ влечет два других: $N^c_d = 0$, $P^c_{bd} = 0$ (см. (9) и (11)), что и доказывает теорему.

Пусть исходная структура $K$-контактна ($N = 0$), тогда имеет место

**Теорема 6.** *Почти контактная метрическая структура $(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение $D$ является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Перепишем равенство (1) в новых обозначениях:

$$N_J + 2(d\tilde{\eta} \circ J) \circ \vec{u} = 0.$$

В [6] доказано, что почти контактная структура почти нормальна тогда и только тогда, когда $\widetilde{P} \circ N_J = 0$, где $\widetilde{P} : TD \to \widetilde{D}$ — проектор. Воспользовавшись равенствами (3)–(5) в случае связности $\nabla^1$, получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса аффинора $J$:

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 2\omega_{ba} + R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c}P^b_{ac}\partial_{n+b}.$$

Таким образом, продолженная почти контактная метрическая структура почти нормальна тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензор кривизны Схоутена.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий: VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937): отчет. Казань: Казан. физ.-мат. о-во, 1940.
2. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в $n$-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Т. 5. С. 173–255.
3. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. N 10. P. 338–354.
4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 17–22.
5. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Математика. 2013. № 4. С. 1–9.
6. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 12, № 1. С. 16–22.

**7.** *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative. I // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1923. V. 40. P. 325–412.
**8.** *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative generalisee. I // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1924. V. 41. P. 1–25.
**9.** *Cartan E.* Sur les varietes à connexion affine et la theorie de la relative generalisee. II // Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 1925. V. 42. P. 17–88.
**10.** *Yano K.* On semi-symmetric metric connections // Revue Roum. Math. Pures Appl. 1970. V. 15. P. 1579–1586.
**11.** *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor New Ser. 1975. V. 29. P. 249–254.
**12.** *Bejancu A.* Kähler contact distributions // J. Geom. Phys. 2010. V. 60. P. 1958–1967.

*Статья поступила 12 апреля 2015 г.*

Галаев Сергей Васильевич
Саратовский гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410012
sgalaev@mail.ru