Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2016. Том 57, № 3

УДК 512.554

ПРОСТЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ЛИЕВЫ ПУЧКИ РАНГА 1

Н. А. Корешков

Аннотация. В терминах сэндвичевых алгебр получена классификация симметрических простых лиевых пучков над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.312

Ключевые слова: лиев пучок, сэндвичева алгебра.

Конструкция лиевых пучков была введена в [1]. Она связана с нахождением первых интегралов некоторых гамильтоновых систем [2, 3]. А именно, если $L = \langle e, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ — алгебра Ли над полем действительных чисел с базисом $e_1, \dots, e_n$, умножение в котором определяется набором констант $\{c_{ij}^k\}$: $e_i e_j = \sum\limits_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$, то на двойственном пространстве L^* определена скобка Пуассона

$$\{F, H\} = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координатные функции из L^*, а F, H — функции на L^*. Тогда система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}, \quad \text{или} \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

в качестве первых интегралов имеет функции, являющиеся центральными относительно скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_C$, $C = \{c_{ij}^k\}$. Пусть на пространстве $L = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}}$ имеются другие лиевы умножения, определенные набором $\{\bar{c}_{ij}^k\}$ и согласованные с первоначальным умножением (определение согласованности см. далее). Тогда на двойственном пространстве возникают согласованные скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_{\overline{C}}$, $\overline{C} = \{\bar{c}_{ij}^k\}$. Центральные функции относительно каждой из этих скобок являются первыми интегралами исходной системы дифференциальных уравнений, если существуют функции $H_{\overline{C}}$ такие, что система (1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \{x . H_{\overline{C}}\}_{\overline{C}}.$$

Перейдем к точным определениям. Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем P. Обозначим через K пространство всех билинейных кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. Векторное пространство L над полем P называется *лиевым пучком*, если существует подпространство S из K такое, что для любого $s \in S$ выполняется соотношение

$$(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0, \quad a, b, c \in L. \tag{2}$$

(Здесь xsy — образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s.)

Иначе говоря, линейная комбинация любых двух лиевых умножений из S снова является лиевым умножением. Это наблюдение позволяет сформулировать определение 1 следующим образом.

Определение 2. Векторное пространство L над полем P называется *лиевым пучком*, если существует подпространство S из K такое, что для любых s и s' из S имеет место соотношение

$$J(a, b, c, s, s') + J(a, b, c, s', s) = 0, \quad a, b, c \in L,$$

где $J(a, b, c, s, s') = (asb)s'c + (bsc)s'a + (csa)s'b$.

Если $\dim_P S = n$, то лиев пучок часто будем называть *n-кратным лиевым пучком* и обозначать через $L(S)$.

Определение 2 с заменой термина «n-кратный лиев пучок» термином «n-кратная алгебра Ли» использовалось в [4, 5]. Для этих алгебр в [5] доказаны аналоги теорем Ли и Энгеля. Заметим, что если в определении операции у n-арной алгебры Ли (см. [6]) $n-2$ аргументов считать фиксированными, то получим пример m-кратного лиева пучка, где $m = (n-2)\dim L$.

Кроме того, конструкция n-кратной алгебры Ли при $n = 2$ под названием бигамильтоновой операды рассматривалась в [7].

Определим некоторые понятия для лиевых пучков, аналогичные соответствующим понятиям для обычных алгебр Ли. Если U и V — два подпространства в $L(S)$, то символ UV будет обозначать пространство $\langle usv,\ u \in U,\ v \in V,\ s \in S\rangle_P$. Будем говорить, что лиев пучок $L = L(S)$ *разрешим*, если существует натуральное k такое, что $L^{(k)} = 0$, где $L^{(i+1)} = L^{(i)}L^{(i)}$, $i \geq 0$, $L^{(0)} = L$. Соответственно лиев пучок $L = L(S)$ *нильпотентен*, если $L^k = 0$ для некоторого натурального k, где $L^{i+1} = L^iL$, $i \geq 1$, $L^1 = L$. В частности, лиев пучок абелев, если $L^2(S) = 0$.

Подпространство I в лиевом пучке $L(S)$ назовем *идеалом*, если $xsy \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$, $s \in S$. Лиев пучок называется *простым*, если он не содержит нетривиальных идеалов и $L^2(S) \neq 0$. Подпространство U в лиевом пучке $L(S)$ назовем *подалгеброй*, если $xsy \in U$ при $x, y \in U$, $s \in S$. Подпространство H в $L(S)$ назовем *картановской подалгеброй лиева пучка* $L(S)$, если H — нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором $N_{L(S)}(H) = \{x \in L \mid hxs \in H\ \forall h \in H,\ \forall s \in S\}$.

В [5] показано, что любой лиев пучок $L(S)$ содержит картановскую подалгебру H, которая является нульпространством L_0 относительно регулярной пары $(x_0, s_0) \in L \times S$, т. е. $L_0 = L_0(x_0, s_0) = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} x_0)^k x = 0,\ k \in \mathbb{N}\}$, где ad_{s_0} — оператор левого умножения, определенный элементом $s_0 \in S$. (Пара $(x_0, s_0) \in L \times S$ называется *регулярной*, если $\dim_P L_0(x_0, s_0)$ минимальна.) Размерность нулькомпоненты $L_0(x_0, s_0)$ регулярной пары (x_0, s_0) назовем *рангом лиева пучка* $L(S)$ и обозначим через $rL(S)$.

Определение 3. Лиев пучок $L(S)$ называется *симметрическим*, если $J(a, b, c, s, s') = 0$ для любых $a, b, c \in L$ и любых $s, s' \in S$.

Описание простых симметрических лиевых пучков получим в терминах сэндвичевых алгебр.

Определение 4. *Сэндвичевой алгеброй* $M_r(L,S)$ называется пара пространств L, S, содержащихся в пространстве матриц M_r (r — порядок соответствующих матриц), удовлетворяющих условию $asb - bsa \in L$, когда $a, b \in L$, $s \in S$. (Здесь asb и bsa — обычные произведения матриц.)

Заметим, что для любого фиксированного $s \in S$ отображение $(a,b) \to asb - bsa$ задает билинейное кососимметрическое отображение из $L \times L$ в L, удовлетворяющее тождеству Якоби. Следовательно, сэндвичева алгебра удовлетворяет определению 1, т. е. является лиевым пучком.

Теорема. *Любой простой симметрический лиев пучок $L(S)$ ранга один над алгебраически замкнутым полем P характеристики нуль совпадает с одним из следующих.*

1. $L(S) = M_3(R,U)$, где R — пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, U — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E\rangle$ (E — единичная матрица). В частности, когда $U = \langle E\rangle$, пучок $L(S)$ — это простая трехмерная алгебра Ли.

2. $L(S) = M_2(I, I^t)$, где I — минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_2(P)$, $I^t = \{A \in M_2(P) \mid A^t \in I\}$ (здесь A^t — матрица, транспонированная к A).

Доказательство. Как показано в [5], множество пар $U = \{(x_0, s_0),\ x_0 \in L,\ s_0 \in S\}$, для которых $\dim L_0(x_0, s_0) = rL(S)$, образует непустое открытое в топологии Зарисского множество в $L \times S$.

С другой стороны, в [8] показано, что в любом простом лиевом пучке $L(S)$ множество пар (x, s), для которых оператор $\operatorname{ad}_s x$ полупрост, образует непустое в топологии Зарисского множество в $L \times S$. Следовательно, существуют картановские подалгебры, содержащие ненулевые полупростые элементы. Если ранг $L(S)$ равен единице, то существует картановская подалгебра H, совпадающая с тором $T(S')$, являющимся абелевой алгеброй, для любого элемента x которой оператор $\operatorname{ad}_s x$, $s \in S'$, полупрост.

Пусть $H = T = \langle h\rangle_P$. Легко видеть, что H будет картановской подалгеброй в алгебре Ли $L(s_0)$, определяемой таким умножением s_0, для которого пара (h, s_0) регулярна, а элемент h будет регулярным элементом для алгебры Ли $L(s_0)$.

Рассмотрим разложение алгебры Ли $L(s_0)$ в прямую сумму корневых пространств относительно $\operatorname{ad}_{s_0} h$, т. е.

$$L(s_0) = H \oplus \sum_{\alpha \neq 0} L_\alpha, \tag{3}$$

где $L_\alpha = L_\alpha(s_0) = \{x \in L \mid (\operatorname{ad}_{s_0} h)x = \alpha(h)x\}$, $H = L_0 = \{x \in L \mid (\operatorname{ad}_{s_0} h)x = 0\}$, $\alpha(h) \in P$.

I. Обозначим через Σ совокупность всех ненулевых корней для оператора $\operatorname{ad}_{s_0} h$. Предположим, что для любого $\alpha \in \Sigma$ функция $-\alpha$ не является корнем. Тогда подпространство $L_1(s_0) = \bigoplus_{\alpha \neq 0} L_\alpha$ — нильпотентная подалгебра в алгебре Ли $L(s_0)$. Действительно, так как $e_\alpha s_0 e_\beta \in L_{\alpha+\beta}$, когда $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$, из условия $\alpha+\beta \neq 0$ вытекает, что $L_1(s_0)$ — подалгебра. Поскольку характеристика поля P равна нулю, все функции $\alpha + t\beta$, $t \in \mathbb{N}$, различны. Следовательно, в силу конечности числа корней для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ существует $t \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha + t\beta \in \Sigma$, но $\alpha + (t+1)\beta \notin \Sigma$, т. е. $(\operatorname{ad}_{s_0} e_\beta)^{t+1} e_\alpha = 0$. Отсюда следует, что для любого $\beta \in \Sigma$ оператор $\operatorname{ad}_{s_0} e_\beta$ нильпотентен. Так как объединение всех корневых пространств L_α, $\alpha \in \Sigma$, образует множество Ли, т. е. замкнуто относительно операции s_0, по теореме Энгеля в форме Джекобсона (см. [9]) алгебра Ли $L_1(s_0)$ нильпотентна.

Обозначим через $M_1 = Z(L_1(s_0))$ центр алгебры $L_1(s_0)$. Пусть $M_2 = \{x \in L_1 \mid x s_0 L_1 \subset M_1\}$. Поскольку M_2 инвариантно относительно $\operatorname{ad}_{s_0} h$, разложение (3) индуцирует соответствующее разложение в

$$M_2 = M_2 \cap L_1 = \bigoplus_{\alpha \neq 0} M_\alpha^2, \quad M_\alpha^2 = \big\langle e_\alpha^2 \in M_2 \mid h s_0 e_\alpha^2 = \alpha(h) e_\alpha^2 \big\rangle_P.$$

Так как $M_1 \subset M_2$, имеем $M_2 = \widetilde{M_2} \oplus M_1$, где $\widetilde{M_2}$ — дополнительное к M_1 подпространство с системой образующих $\tilde{e}_\alpha^2 = e_\alpha^2$, для которых $e_\alpha^2 \notin M_1$. Если уже построено пространство M_k, то $M_{k+1} = \{x \in L_1 \mid x s_0 L_1 \subset M_k\}$, которое, как и выше, можно представить в виде

$$M_{k+1} = \widetilde{M}_{k+1} \oplus M_k, \quad \widetilde{M}_{k+1} = \big\langle e_\alpha^{k+1} \in M_{k+1} \mid h s_0 e_\alpha^{k+1} = \alpha(h) e_\alpha^{k+1},\ e_\alpha^{k+1} \notin M_k \big\rangle_P.$$

Если $L_1 = M_m$, то, переобозначая M_k через L_{m+1-k}, $k = 1, \dots, m$, получим цепочку в L_1: $L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_m \supset 0$, где $L_m = Z(L_1(s_0))$ — центр алгебры $L_1(s_0)$ и $L_{k-1} = \{x \in L_1 \mid x s_0 L_1 \subset L_k\}$, причем

$$L_{k-1} = \widetilde{L}_{k-1} \oplus L_k, \quad \widetilde{L}_{k-1} = \big\langle e_\alpha^{k-1} \in L_{k-1} \mid h s_0 e_\alpha^{k-1} = \alpha(h) e_\alpha^{k-1},\ e_\alpha^{k-1} \notin L_k \big\rangle_P.$$

Если $e_\beta^m \in L_m = Z(L_1(s_0))$, то $e_\alpha^i s_0 e_\beta^m = 0$, когда $i \geq 1$. Пусть s еще какое-либо умножение из S. Из соотношения $J\big(e_\alpha^i, e_\beta^m, h, s_0, s\big) = 0$, которое должно выполняться для любого умножения $s \in S$, следует $(\alpha + \beta)(h) e_\alpha^i s e_\beta^m = 0$. Так как $\alpha + \beta \neq 0$, то e_β^m принадлежит $Z(L_1(s))$, аннулятору пространства $L_1(s)$. Из соотношения $J\big(e_\alpha^i, e_\beta^m, h, s, s_0\big) = 0$ вытекает, что

$$\Big(-\lambda_m^\beta h - \sum_{\gamma \in \Sigma,\ k \geq 1} a_\gamma^k e_\gamma^k\Big) s_0 e_\alpha^i + \Big(\lambda_i^\alpha h + \sum_{\gamma \in \Sigma,\ k \geq 1} b_\gamma^k e_\gamma^k\Big) s_0 e_\beta^m = 0,$$

где

$$h s e_\alpha^i = \lambda_i^\alpha h + \sum_{\gamma, k} b_\gamma^k e_\gamma^k, \quad h s e_\beta^m = \lambda_m^\beta h + \sum_{\gamma, k} a_\gamma^k e_\gamma^k, \quad a_\gamma^k, b_\gamma^k \in P,\ e_\gamma^k \in L_1.$$

Так как $e_\gamma^k s_0 e_\beta^m = 0$ при $k \geq 1$, то

$$\lambda_m^\beta \alpha(h) e_\alpha^i + \sum_{\gamma, k} a_\gamma^k \big(e_\gamma^k s_0 e_\alpha^i\big) - \lambda_i^\alpha \beta(h) e_\beta^m = 0.$$

По определению пространств $\widetilde{L}_k$ имеем $e_\gamma^k s_0 e_\alpha^i \in L_t$, $t > \max(k, i)$. Следовательно, $\lambda_m^\beta = 0$ и $\sum\limits_{\gamma, k} a_\gamma^k \big(e_\gamma^k s_0 e_\alpha^i\big) \equiv 0 \pmod{L_m}$ для любых e_α^i из L_1. Тогда $\sum\limits_{\gamma, k} a_\gamma^k e_\gamma^k \in L_{m-1}$, т. е. $h s e_\beta^m \in L_{m-1}$, согласно определению подпространств L_i.

Пусть уже доказано, что $h s e_\beta^t \in L_{t-1}$ при $t \geq k > m$. Тогда из соотношения $J\big(e_\alpha^1, e_\beta^{k-1}, h, s_0, s\big) = 0$ получим, что $e_\alpha^1 s e_\beta^{k-1} \in L_{k-1}$. Рассмотрим соотношение $J\big(e_\alpha^1, e_\beta^{k-1}, h, s, s_0\big) = 0$. Поскольку

$$\big(e_\beta^{k-1} s h\big) s_0 e_\alpha^1 = \Big(\lambda_{k-1}^\beta h + \sum_{\gamma, q \geq 1} a_\gamma^q e_\gamma^q\Big) s_0 e_\alpha^1 = \lambda_{k-1}^\beta \alpha(h) e_\alpha^1 + \sum_{\gamma, k \geq 1} a_\gamma^q \big(e_\gamma^q s_0 e_\alpha^1\big),$$

$$\big(hse_\alpha^1\big)s_0e_\beta^{k-1}=\Big(\lambda_1^\alpha h+\sum_{\gamma,k\ge1}b_\gamma^q e_\gamma^q\Big)s_0e_\beta^{k-1}\equiv\lambda_1^\alpha\beta(h)e_\beta^{k-1}\pmod{L_k},$$

$$\big(e_\alpha^1 se_\beta^{k-1}\big)s_0h\equiv 0\pmod{L_{k-1}},$$

рассуждая, как и выше, получим $\lambda_{k-1}^\beta=0$ и $a_\gamma^q=0$, когда $q\le k-3$. Таким образом, $hse_\beta^{k-1}\in L_{k-2}$, т. е. для всех k, удовлетворяющих условию $m\ge k\ge 2$, выполняются включения $hse_\beta^k\in L_{k-1}$ и $e_\alpha^1se_\beta^{k-1}\in L_{k-1}$. Последнее означает, что пространство L_1 является алгеброй Ли относительно умножения $s\in S$, а $L_1(S)$ — лиевым пучком.

Обозначим через $P'=P(x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ поле рациональных функций от $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$. Пусть $L'=P'\underset{P}{\otimes}L$. Если $s_0,s_1,\dots,s_{n-1}$ — базис пространства S, то рассмотрим отображение $s'=\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_is_i$ из $L'\times L'$ в L', определенное правилом

$$(f\otimes l)s'(g\otimes\hat l)=\sum_{i=0}^{n-1}fgx_i\otimes(ls_i\hat l),$$

где $f,g\in P'$, $l,\hat l\in L$, $f\otimes l,g\otimes\hat l\in L'$. Легко проверить, что отображение s' задает на L' структуру алгебры Ли. Очевидно, что алгебра Ли L' имеет разложение

$$L'=\bigoplus_{i=0}^m\widetilde L_i',\quad \widetilde L_i=P'\otimes\widetilde L_i,\quad \widetilde L_0'=\langle h'\rangle,\quad h'=1\otimes h,\quad L_i'=\bigoplus_{j\ge i}\widetilde L_j'.$$

Если $L_1S\langle h\rangle\subset L_1$, то $L_1(S)$ — идеал пучка $L(S)$, что противоречит простоте последнего. Следовательно, $\widetilde L_1's'h'\not\subset L_1'$, т. е. $\widetilde L_1'=\langle x_1'\rangle\oplus\widetilde U_1'$, где $U_1'=\{x'\in L_1'\mid x's'h'\in L_1'\}$, и $U_1'=\widetilde U_1'\oplus L_2'$, причем $h's'x_1'\equiv\mu_0h'\pmod{L_1'}$, $\mu_0\ne0$, $\mu_0\in P'$. Пространство U_1' является идеалом в алгебре L_1', а $W_1=\{x'\in\widetilde L_1'\mid h's'x_1'\equiv\mu_0h'\pmod{L_1'},\ \mu_0\ne0\}$ образует открытое в топологии Зарисского множество.

Если $L_2S\langle h\rangle\subset L_2$, то $L_2(S)$ — идеал пучка $L(S)$ и, как выше, имеем $\widetilde L_2's'h'\not\subset L_2'$, откуда $\widetilde L_2'=\langle x_2'\rangle\oplus\widetilde U_2'$, где $U_2'=\{x'\in L_2'\mid x's'h'\in U_1'\}$, $U_2'=\widetilde U_2'\oplus L_3'$, причем $h's'x_2'\equiv\mu_1x_1'\pmod{U_1'}$, $\mu_1\ne0$, $\mu_1\in P'$ и множество таких x_2' образует открытое в топологии Зарисского множество $W_2\subset\widetilde L_2'$. С другой стороны, $\widehat W_2=\{x_2'\in\widetilde L_2'\mid \mathrm{ad}_{s'}h'(x_2')\in W_1\}$ также образует открытое в $\widetilde L_2'$ множество. Следовательно, для элемента $x_2'\in W_2\cap\widehat W_2$ выполнено сравнение $h's'x_2'\equiv\mu_1x_1'\pmod{U_1'}$, $\mu_1\ne0$, причем для элемента x_1' имеет место $h's'x_1'\equiv\mu_0h'\pmod{L_1'}$, $\mu_0\ne0$, и, кроме того, $x_1's'x_2'\equiv\lambda_2x_2'\pmod{U_2'}$. Заметим, что U_2' является идеалом алгебры L_1'.

Через m шагов получим последовательность элементов x_i', $i=1,\dots,m$, и последовательность идеалов U_i', $i=1,\dots,m$, алгебры L_1' таких, что $x_1's'x_i'\equiv\lambda_ix_i'\pmod{U_i'}$, $\lambda_i\in P'$, $h's'x_i'\equiv\mu_{i-1}x_{i-1}'\pmod{U_{i-1}'}$, $\mu_{i-1}\ne0$, $\mu_{i-1}\in P'$, $h's'U_i'\subset U_{i-1}'$, $i\ge2$.

Имеют место соотношения

$$(x_1's'x_i')s'h'\equiv-\lambda_i\mu_{i-1}x_{i-1}'\pmod{U_{i-1}'},$$

$$(x_i's'h')s'x_1'\equiv\lambda_{i-1}\mu_{i-1}x_{i-1}'\pmod{U_{i-1}'},$$

$$(h's'x_1')s'x_i'\equiv\mu_0\mu_{i-1}x_{i-1}'\pmod{U_{i-1}'}.$$

Из соотношения $J(x_1',x_i',h',s',s')=0$ получаем $\lambda_i=\lambda_{i-1}+\mu_0$, $i>2$, $\lambda_2=\mu_0$. Таким образом, $\lambda_i=(i-1)\mu_0$, $i\ge2$. В частности, $\lambda_m=(m-1)\mu_0$. Но

$x'_1 s' x'_m = 0$, так как x'_m принадлежит центру алгебры L'_1, т. е. $m = 1$, поэтому $L_1 = Z(L_1(S))$.

Предположим, что $\dim L_1 > 1$. Пусть y' и y'' — два собственных относительно $\mathrm{ad}_{s_0} h$ линейно независимых элемента из L_1. Тогда имеют место следующие формулы умножения: $hs_0y' = \alpha' y'$, $hs_0y'' = \alpha'' y''$, $\alpha', \alpha'' \neq 0$, $hsy' \equiv \mu' h \pmod{L_1}$, $hsy'' \equiv \mu'' h \pmod{L_1}$ и соотношение $J(y', y'', h, s, s_0) = 0$ дает $\mu' \alpha'' y'' - \mu'' \alpha' y' = 0$, т. е. $\mu' = \mu'' = 0$. Следовательно, $L_1(S)$ является идеалом пучка $L(S)$.

Таким образом, остается случай, когда $\dim L(S) = 2$. Тогда, как показано в [10], лиев пучок $L(S)$ можно отождествить с сэндвичевой алгеброй $M_2(I, I^t)$, где I — минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_2(P)$.

II. Пусть среди ненулевых корней $\alpha \in \Sigma$ имеются такие, что $-\alpha \in \Sigma$, но $e_\alpha s_0 e_{-\alpha} = 0$ для любых $e_\alpha \in L_\alpha$ и $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$. Тогда опять для любого $\beta \in \Sigma$ оператор $\mathrm{ad}_{s_0} e_\beta$ нильпотентен и, следовательно, алгебра Ли $L_1(s_0)$ нильпотентна. Для изучения этого случая рассмотрим ситуацию с операторами $\mathrm{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$.

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в L, а $s_1, \ldots, s_n$ — базис в S. Тогда любой оператор $\mathrm{ad}_s x$ можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{n} x_i \alpha_k \,\mathrm{ad}_{s_k} e_i$, если $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$, $s = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k s_k$, $x_i, \alpha_k \in P$. Пусть

$$(\mathrm{ad}_{s_k} e_i) e_j = \sum_{r=1}^{m} A_{ikrj} e_r,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n, \quad A_{ikrj} \in P.$$

Тогда

$$(\mathrm{ad}_s x) e_j = \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_i \alpha_k A_{ikrj} e_r, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. оператор $\mathrm{ad}_s x$ в базисе $e_1, \ldots, e_m$ задается матрицей $B = (B_{jr})$, где

$$B_{jr} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_k A_{ikrj}, \quad j = 1, \ldots, m,\ r = 1, \ldots, m.$$

Обозначим через W пространство $\langle \mathrm{ad}_s x,\ s \in S,\ x \in L \rangle_P = \langle \mathrm{ad}_{s_k} e_i,\ i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n \rangle_P$. Пространство W ненулевое, так как в противном случае $L(S)$ — абелев пучок, что противоречит его простоте. Пусть $\widetilde{W}$ — совокупность всех ненулевых операторов вида $\mathrm{ad}_s x$, $s \in S$, $x \in L$, в алгебре всех линейных операторов $\mathrm{End}_P(L)$. Так как $L(S)$ — простой лиев пучок, алгебра $\mathrm{Ass}\, W$ (ассоциативная алгебра, порожденная множеством W) действует неприводимо на пространстве L. В силу алгебраической замкнутости поля P алгебра $\mathrm{Ass}\, W$ совпадает с полной матричной алгеброй $M_m(P)$.

Обозначим через $a_r = a_r(x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ коэффициенты характеристического многочлена матрицы B, элементы которой являются линейными функциями от $x_1, \ldots, x_m$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда множество нулей системы уравнений $a_r = (-1)^r \sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $r = 1, \ldots, m$, где $\sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — элементарные симметрические многочлены от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, определяет аффинное многообразие M в пространстве P^{2m+n}. В [8] показано, что множество полупростых (диагонализирумых) операторов из $\widetilde{W}$ определяет непустое открытое в топологии

Зарисского множество N в аффинном многообразии M. Так как один из характеристических корней оператора $\mathrm{ad}_s x$ всегда равен нулю, полагая $\lambda_1 = 0$ и добавляя условия $\lambda_i \neq 0$, $i = 2, \dots, m$, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, $2 \leq i < j \leq m$, определяем новое непустое открытое подмножество $\widetilde{N}$, соответствующее полупростым операторам с добавленными условиями, в аффинном многообразии M.

С другой стороны, условие, что пространство, натянутое на собственные векторы оператора $\mathrm{ad}_s x$ и отвечающее ненулевым собственным значениям, образует нильпотентную подалгебру коразмерности один и задается системой алгебраических уравнений относительно $\{x_i\}$, $\{\alpha_i\}$, $\{\lambda_k\}$. Множество решений этой системы является замкнутым подмножеством $\widetilde{M}$ многообразия M. В силу замечания в начале п. II пересечение $\widetilde{N} \cap \widetilde{M}$ непусто, т. е. существует пара (h, s_0), для которой у оператора $\mathrm{ad}_{s_0} h$ имеется нильпотентная подалгебра L_1 коразмерности один, натянутая на собственные векторы этого оператора, причем все собственные значения λ_i оператора $\mathrm{ad}_{s_0} h|_{L_1}$ и их суммы $\lambda_i + \lambda_j$ ненулевые.

Следовательно, в рассматриваемой ситуации лиев пучок $L(S)$ имеет вид $M_2(I, I^t)$.

III. Далее рассмотрим случай, когда в системе корней Σ существует корень α такой, что $-\alpha \in \Sigma$, причем существуют векторы $e_\alpha \in L_\alpha$ и $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ такие, что $e_\alpha s_0 e_{-\alpha} \neq 0$. Так как $e_\alpha s_0 e_\alpha \in L_0 = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} h)x = 0\} = H = \langle h \rangle$, в этом случае алгебра Ли $L(s_0)$ содержит простую трехмерную алгебру Ли $sl_2(P)$. Согласно теореме Леви любую алгебру Ли над полем нулевой характеристики можно представить в виде прямой суммы ее радикала и полупростой алгебры. Поскольку ранг алгебры $L(s_0)$ равен единице, полупростая компонента алгебры $L(s_0)$ совпадает с простой трехмерной алгеброй Ли $sl_2(P)$. Выберем стандартный базис в $sl_2(P)$ из элементов e, h, f с таблицей умножения $hs_0e = 2e$, $hs_0f = -2f$, $es_0f = h$. Рассматривая алгебру Ли $L(s_0)$ как модуль над $sl_2(P)$ относительно присоединенного действия, в силу его полной приводимости получим, что $L(s_0) = sl_2(P) \oplus L_1(s_0)$, $L_1(s_0) = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$, где каждое слагаемое V_λ — неприводимый $sl_2(P)$-модуль с базисом $v_0, v_1, \dots, v_m$, $m = \lambda(h)$, $m + 1 = \dim V_\lambda$ и следующей таблицей действий:

$$
\begin{gathered}
hs_0v_k = (m - 2k)v_k, \quad k = 0, \dots, m, \\
fs_0v_k = v_{k+1}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad fs_0v_m = 0, \\
es_0v_0 = 0, \quad es_0v_k = (mk - k(k-1))v_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m.
\end{gathered}
$$

Если $m = 2t$ четно, то $hs_0v_t = 0$ и $L_0(h) \supset \langle v_t, h \rangle$, что противоречит условию $L_0(h) = \langle h \rangle$. Таким образом, в сумме $L_1(s_0) = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$ имеются только неприводимые модули четных размерностей. Из условия $V_\lambda s_0 V_\mu \subset V_{\lambda+\mu}$ следует, что $V_\lambda s_0 V_\mu = 0$, так как $\lambda(h) + \mu(h)$ четно для нечетных $\lambda(h)$ и $\mu(h)$. Это означает, что $L_1(s_0)$ — коммутативная алгебра Ли.

Предположим, что в $L_1(s_0)$ имеются по крайней мере два неприводимых $sl_2(P)$-модуля V_λ и V_μ (λ и μ могут совпадать). Обозначим через v_i^λ, $i = 0, \dots, \overline{m}$, $\overline{m} + 1 = \dim V_\lambda$ базисные векторы из V_λ, а через v_j^μ, $j = 0, \dots, m$, $m + 1 = \dim V_\mu$ — базисные векторы из V_μ. Из соотношения $J\big(v_j^\lambda, v_i^\mu, h, s_0, s\big) = 0$ имеем $[(m + \overline{m}) - 2(i + j)]v_\lambda s v_\mu = 0$. Таким образом, для любого вектора v_j^μ существует вектор $v_i^\lambda \in V_\lambda$ такой, что $v_j^\mu s v_i^\lambda = 0$.

Для таких векторов рассмотрим соотношение $J\big(v_i^\lambda, v_j^\mu, v_0, s, s_0\big) = 0$, где v_0

— любой элемент из $V_0 = sl_2(P)$. Если $v_j^\mu s v_0 = \tilde{v}_0 + \sum_\gamma v_\gamma$, $v_i^\lambda s v_0 = \hat{v}_0 + \sum_\gamma \hat{v}_\gamma$, где $\tilde{v}_0, \hat{v}_0 \in V_0$, $v_\gamma, \hat{v}_\gamma \in V_\gamma$, то из приведенного соотношения имеем $\tilde{v}_0 s_0 v_i^\lambda - \hat{v}_0 s_0 v_j^\mu = 0$. Каждое из слагаемых последнего соотношения принадлежит различным модулям, поэтому каждое из них равно нулю. Так как каждый элемент из V_0 ненулевым образом действует на неприводимом $sl_2(P)$-модуле V_μ, то $\hat{v}_0 = 0$, т. е. $V_\mu s V_0 \subset L_1$ для любого слагаемого V_μ из L_1.

Поскольку $v_k s_0 v_r = 0$, из соотношения $J(v_k, v_r, h, s_0, s) = 0$ получим $v_k s v_r = 0$, когда $r + k \neq m$. Пусть $v_i s v_{m-i} \equiv A_i e + B_i h + C_i f \pmod{L_1}$. Тогда из соотношения $J(v_i, v_{m-i}, h, s, s_0) \equiv 0 \pmod{L_1}$ вытекает $A_i = C_i = 0$, а из соотношения $J(v_i, v_{m-i}, e, s, s_0) \equiv 0 \pmod{L_1}$ — $B_i = 0$. Повторяя аналогичные рассуждения с элементами v_j^λ и v_i^μ, имеем $v_j^\lambda s v_i^\mu \in L_1$. Таким образом, L_1 — идеал пучка $L(\langle s_0, s\rangle)$. Так как это справедливо для любого $s \in S$, то L_1 — идеал пучка $L(S)$. Следовательно, $L_1 = V_\lambda = \langle v_0, \dots, v_m\rangle$.

Из приведенных рассуждений следует, что и в этом случае $L_1(s)$ — подалгебра в алгебре Ли $L(s)$, а соотношения $J(v_i, h, e, s, s_0) = 0$, $J(v_i, h, f, s, s_0) = 0$, $J(v_i, e, f, s, s_0) = 0$ позволяют проверить, что $v_i s x \in L_1$ для любого $x \in V_0 = sl_2(P)$. Таким образом, L_1 — идеал пучка $L(\langle s_0, s\rangle)$.

Приведенное рассуждение справедливо для любого $s \in S$, стало быть, $L_1(S)$ — идеал пучка $L(S)$. Следовательно, $\dim L = 3$, а $L(s_0) \cong sl_2(P)$. Из результатов в [10] получаем, что $L(S) = M_3(R, U)$, где R — пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, U — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E\rangle$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кантор И. Л., Персиц Д. Б.* О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона // IX Всесоюз. геометрическая конф. Кишинев: Штиинца, 1988. С. 141.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
3. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Ижевск: Факториал; Проспериус; Удмурт. гос. ун-т, 1995.
4. *Корешков Н. А.* О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 33–38.
5. *Корешков Н. А.* Теоремы Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 601–609.
6. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
7. *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формула характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды // Функцион. анализ и его прил. 2007. Т. 41, № 1. С. 1–22.
8. *Корешков Н. А.* Торы в простых лиевых пучках // Изв вузов. Математика. 2016. № 6. С. 48–54.
9. *Капланский И.* Алгебры Ли и локально компактные группы. М.: Мир, 1974.
10. *Корешков Н. А.* Простые лиевы пучки малых размерностей // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 525–539.

Статья поступила 10 апреля 2015 г.

Корешков Николай Александрович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru