ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed)

Algebraic & Geometric Topology
Volume 2 (2002) 519–536
Published: 28 June 2002

Morphismes injectifs entre groupes d'Artin-Tits

Eddy Godelle

Abstract We construct a family of morphisms between Artin-Tits groups which generalise the ones constructed by J. Crisp in [9]. We show that their restrictions to the positive Artin monoids respect normal forms, and that for Artin-Tits groups of type FC, these morphisms are injective. The proof of the second result uses the Deligne Complex, and the normal cube paths constructed in [14] and [6].

Résumé On construit une classe de morphismes entre groupes d'Artin-Tits qui généralise celle construite par J. Crisp dans [9]. On montre que leurs restrictions aux monoïdes respectent les formes normales, et que pour les groupes d'Artin-Tits de type FC ces morphismes sont injectifs. La démonstration du second résultat utilise le complexe de Deligne et les chemins cubiques normaux construits dans [14] et [6].

AMS Classification 20F36; 20F32,57M07

Keywords Artin-Tits groups, injective morphisms, cubical CAT(0) complex

Introduction

Soit S un ensemble fini et $M = (m_{s,t})_{s,t\in S}$ une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}-\{0\}$ telle que $m_{s,s} = 1$ pour tout s de S et $m_{s,t} \neq 1$ pour $s \neq t$ dans S. On note A_S le groupe engendré par S et les relations, dites "de tresses", $\underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}\ termes} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}\ termes}$ pour tout couple (s,t) d'éléments distincts de S tels que $m_{s,t} \neq \infty$:

$$A_S = \langle S \mid \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}\ termes} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}\ termes}\ ;\ \forall s,t \in S, s \neq t \text{ et } m_{s,t} \neq \infty\rangle.$$

La paire (A_S, S) s'appelle un système d'Artin-Tits et A_S un groupe d'Artin-Tits (relativement à S). On note A_S^+ le sous-monoïde de A_S engendré par S. Ce monoïde A_S^+ possède la même présentation que A_S mais en tant que monoïde ([15]). Puisque les relations de tresses sont homogènes, A_S^+ est naturellement muni d'une fonction longueur ℓ compatible au produit. On appelle graphe de S et M, note Γ_S, le graphe etiquete dont l'ensemble des sommets est S et dont les arêtes sont les paires $\{s,t\}$ d'elements distincts de S telles que $m_{s,t} \neq 2$, que l'on etiquette par $m_{s,t}$.

On appelle sous-groupe parabolique standard tout sous-groupe de A_S engendre par une partie T de S; on note A_T un tel sous-groupe. Van der Lek a prouve dans [17] que pour toute partie T de S, la paire (A_T, T) est un systeme d'Artin-Tits pour la matrice $(m_{s,t})_{s,t \in T}$. Un sous-groupe parabolique de A_S est un sous-groupe de A_S conjugue a un sous-groupe parabolique standard de A_S.

Lorsque ce graphe est connexe, on dit que S est indecomposable. Lorsque l'on ajoute a la presentation de A_S les relations $s^2 = 1$ pour $s \in S$, on obtient un groupe de Coxeter W_S. On dit que A_S (ou S par abus) est de type spherique lorsque son groupe de Coxeter associe est fini.

Si u et v sont dans A_S^+, on notera $u \prec v$ (resp. $v \succ u$) pour dire que u divise v a gauche (resp. a droite); on notera $u \wedge v$ (resp. $v \wedge u$) leur pgcd relativement a $\prec$ (resp. $\succ$) et $u \vee v$ (resp. $v \vee u$) leur ppcm relativement a $\prec$ (resp. $\succ$) s'il existe; s'il n'existe pas, on pose $u \vee v = \infty$ (resp. $v \vee u = \infty$). Pour $m \in \mathbb{N}$, on designera par $\langle u, v\rangle^m$ le produit $\underbrace{uvu\cdots}_{m\ termes}$. Ainsi les relations de tresses s'ecrivent $\langle s, t\rangle^{m_{s,t}} = \langle t, s\rangle^{m_{s,t}}$.

Rappelons le resultat classique suivant demontre par Brieskorn et Saito dans [3] : un groupe d'Artin-Tits A_S est de type spherique si et seulement si le ppcm de S a gauche existe; dans ce cas, le ppcm a droite existe aussi et est egal au ppcm a gauche. On note Δ_S ou simplement Δ cet element.

Definition 0.1 Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits et soit p une application de S dans $\mathcal{P}(S') - \{\emptyset\}$, les parties non vides de S', telle que

(L0) si $s \neq t \in S$ alors $p(s)$ et $p(t)$ sont disjointes;

(L1) pour $s \in S$, $p(s)$ est de type spherique;

(L2) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} \neq \infty$, on a

$$\langle \Delta_{p(s)}, \Delta_{p(t)}\rangle^{m_{s,t}} = \langle \Delta_{p(t)}, \Delta_{p(s)}\rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)} \vee \Delta_{p(t)} \text{ dans } A^+_{S'}$$

(L3) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} = \infty$, alors

$$\forall u \in p(s),\ \{u\} \cup p(t) \text{ n'est pas de type spherique};$$
$$\forall u \in p(t),\ \{u\} \cup p(s) \text{ n'est pas de type spherique.}$$

On peut alors définir homomorphisme φ_p de A_S dans $A_{S'}$ par $\varphi_p(s) = \Delta_{p(s)}$ pour $s \in S$. Un morphisme provenant d'une telle construction sera appele un LCM-homomorphisme.

Par rapport a la définition 2.1 de [9], on a ajoute la condition (L3) qui autorise les liaisons infinies. Notons aussi que la définition 2.1 de [9] est donnee dans le cadre des monoïdes (voir la définition 1.4 ci-dessous) ce qui est equivalent. La proposition suivante generalise la proposition 2.3 de [9]; voir egalement le theoreme 14 de [10] pour le cas “symetrique”.

Proposition 0.2 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p induit un homomorphisme injectif $\varphi_{p;W} : W_S \to W_{S'}$.*

Ce resultat nous permet, comme dans [9], de voir les LCM-homomorphismes comme des applications entre groupes fondamentaux induites par des applications simpliciales injectives (*cf.* proposition 2.13).

Définition 0.3 [8] On dit qu'un groupe d'Artin-Tits A_S est de type FC si et seulement si la condition ci-dessous est verifiee pour toute partie T de S:

$$\forall s,t \in T,\ m_{s,t} \neq \infty \Rightarrow A_T \text{ est de type spherique.}$$

L'un des deux resultats principaux de cette note est le suivant:

Theoreme 0.4 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p est injective.*

Dans [10], Crisp prouve que le sous-groupe des points fixes d'un groupe d'Artin-Tits de type FC sous l'action d'un groupe de symetries de son graphe est aussi un groupe d'Artin-Tits de type FC. Il est assez facile de voir que le morphisme construit par Crisp pour la preuve de son resultat verifie les axiomes de la définition 0.1 et est donc un LCM-homomorphisme. Le theoreme 0.4 peut donc être vu comme une generalisation du resultat de Crisp relatif a l'injectivite.

Lemme 0.5 *Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits, soit W_S son groupe de Coxeter associe et $i : A_S \to W_S$ la surjection canonique. Si w est dans W_S, alors $i^{-1}(w) \cap A_S^+$ possede un unique representant $Sec(w)$ de longueur minimale. On peut ainsi définir une section ensembliste de i, notee Sec dont l'image notee $A_{S,red}$ est dans A_S^+. Ses elements sont caracterises par le fait qu'aucune de leurs ecritures dans A_S^+ ne fait apparaître de carres d'un element de S.*

Cette section ensembliste est construite grâce au lemme d'echange (voir [1] chapitre 4). Lorsque A_S est de type spherique, alors $_S$ est l'image par cette section de l'element de plus grande longueur de W_S. Les elements de $A_{S;red}$ seront dit reduits ou encore minimaux. La derniere assertion du lemme implique en particulier que $A_{S;red}$ est stable par division a gauche et a droite.

Lemme 0.6 [3, 12, 13] *Soit $(A_S; S)$ un systeme d'Artin-Tits. Pour tout element g de A_S^+, l'ensemble $\{h \in A_{S;red} | h \ g\}$ possede un plus grand element (g) pour la division a gauche. De plus pour $g_1; g_2$ dans A_S^+, on a $(g_1 g_2) = (g_1 \ (g_2))$.*

Cette fonction permet de definir une forme normale sur A_S^+: on dira que la suite $(g_1; \ ; g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ si $g = g_1 \ g_n$ ou aucun g_i ne vaut 1 et $g_i = (g_i \ g_n)$ pour tout i; cette decomposition est unique d'apres le lemme ci-dessus.

Si $'_p : A_S \to A_{S'}$ est un LCM-homormorphisme alors l'image par $'$ d'un element de A_S^+ est dans $A_{S'}^+$. Le second resultat que nous allons prouver est le suivant:

Theoreme 0.7 *Soit $'_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme homomorphisme. Alors $'_p$ est compatible avec la forme normale: si $(g_1; \ ; g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ alors $('_p(g_1); \ ; '_p(g_n))$ est la forme normale de $'_p(g)$.*

Nous montrerons en fait ce resultat pour une famille un peu plus large de morphismes .

Dans la premiere partie nous rappelons les resultats utiles sur les groupes d'Artin-Tits et nous introduisons la notion de lcm-homomorphisme; celle-ci generalise celle de LCM-homomorphisme. La seconde partie est consacree aux preuves de la proposition 0.2 et du theoreme 0.7. Enfin dans la derniere partie, nous introduisons le complexe de Deligne et nous prouvons le theoreme 0.4.

1 Generalites

1.1 Monoïdes d'Artin-Tits

Lemme 1.1 [3] *Soit $(A_S; S)$ un systeme d'Artin-Tits.*

(i) *A_S^+ est simplifiable, c'est a dire que si $a; b; e_1; e_2$ sont dans A_S^+ et $ae_1b = ae_2b$ alors, $e_1 = e_2$.*

(ii) *Toute partie finie de A_S^+ possede un* pgcd *a gauche (et a droite).*

(iii) *Une partie finie de A_S^+ possede un* ppcm *a droite (resp. a gauche) si et seulement si elle possede un multiple commun a droite (resp. a gauche).*

1.2 Groupes d'Artin-Tits

Lemme 1.2 ([4] theoreme 2.6 et [5] lemme 4.4) *Soit $(A_S; S)$ un systeme d'Artin-Tits de type spherique. Si $g \in A_S$ alors il existe $a; b$ dans A_S^+ uniques premiers entre eux a gauche (note $a \perp b$) tels que $g = a^{-1}b$. De plus si $c \in A_S^+$ tel que $cg \in A_S^+$ alors $c \succeq a$.*

Nous appellerons la decomposition $g = a^{-1}b$ l'ecriture normale (a gauche) de g. On peut definir de la même facon une ecriture normale a droite.

Lemme 1.3 ([17] theoreme 4.13) *Soit $(A_S; S)$ un systeme d'Artin-Tits associe a la matrice de Coxeter $M = (m_{s;t})_{s;t \in S}$. Soit T une partie de S et A_T le sous-groupe de A_S engendre par T. Alors $(A_T; T)$ est un systeme d'Artin-Tits associe a la matrice $(m_{s;t})_{s;t \in T}$. De plus, si T' est une autre partie de S, on a $A_T \cap A_{T'} = A_{T \cap T'}$.*

1.3 lcm-homomorphismes

Definition 1.4 ([9] definition 1.1) Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits. Si $\varphi : A_S \to A_{S'}$ est un homomorphisme tel que $\varphi(A_S^+) \subseteq A_{S'}^+$, on note φ^+ la restriction de φ a A_S^+ et $A_{S'}^+$. On dit que φ^+ (ou φ) respecte les ppcm si

(1) $\forall s \in S$, $\varphi^+(s) \neq 1$ et,

(2) $\forall s; t \in S$ on a $\varphi^+(s) \vee \varphi^+(t) = \varphi^+(s \vee t)$;

avec la convention $\varphi(\infty) = \infty$.

Sous ces hypotheses, on dira que φ est un "lcm-homomorphisme".

Proposition 1.5 ([9] lemme 1.2 et Theoreme 1.3) *Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un* lcm*-homomorphisme et $U; V$ dans A_S^+; alors $\varphi^+(U) \preceq \varphi^+(V)$ si et seulement si $U \preceq V$. En particulier φ^+ est injective.*

L'injectivite peut aussi être vu comme un cas particulier de la proposition 5.4 de [11] sur les morphismes entre groupes munis de presentations complementees noetheriennes et coherentes.

Question 1 Un lcm-homomorphisme $\varphi : A_S \to A_{S'}$ est-il toujours injectif?

2 LCM-homomorphismes

Dans [9] on definit une sous-famille de lcm-homomorphismes, appeles *LCM*-homomorphismes; ceux-ci possedent une realisation geometrique naturelle. Cette definition suppose que le graphe de S soit sans liaisons infinies. Nous allons etendre cette definition et montrer que le lemme clef 2.2 de [9] est encore vrai. La construction geometrique est identique a la construction de [9].

Commencons par rappeler la definition d'un LCM-homomorphisme.

Definition 2.1 Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits et soit p une application de S dans $P(S') - \{\emptyset\}$, les parties non vides de S', telle que

(L0) si $s \neq t \in S$ alors $p(s)$ et $p(t)$ sont disjointes;

(L1) pour $s \in S$, $p(s)$ est de type spherique;

(L2) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} \neq \infty$, on a

$$\langle \Delta_{p(s)}, \Delta_{p(t)} \rangle^{m_{s,t}} = \langle \Delta_{p(t)}, \Delta_{p(s)} \rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)} \vee \Delta_{p(t)} \text{ dans } A^+_{S'}$$

(L3) si $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t} = \infty$, alors

$$\forall u \in p(s),\ \{u\} \cup p(t) \text{ n'est pas de type spherique};$$
$$\forall u \in p(t),\ \{u\} \cup p(s) \text{ n'est pas de type spherique.}$$

On peut alors definir un lcm-homomorphisme φ_p de A_S dans $A_{S'}$ par $\varphi_p(s) = \Delta_{p(s)}$ pour $s \in S$. Un morphisme provenant d'une telle construction sera appele un LCM-homomorphisme.

A la place de l'axiome (L3), on aurait pu se contenter, pour obtenir un lcm-homomorphisme, de l'axiome plus faible suivant:

(L3$'$) si $s, t \in S$ et $m_{s,t} = \infty$, alors $p(s) \cup p(t)$ n'est pas de type spherique

mais l'axiome (L3) a pour objectif de prouver la proposition 2.6.

Puisqu'un LCM-homomorphisme est un lcm-homomorphisme, on a le resultat suivant:

Lemme 2.2 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme; alors φ_p^+ est injective de A_S^+ dans $A_{S'}^+$.*

Nous suivons dans la suite de cette partie le plan de [9]. Nous commencons par rappeler deux lemmes techniques et par en demontrer un troisieme; ceux-ci vont nous servir etablir la proposition 2.6.

Lemme 2.3 [3, 10] *Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits et $T \subseteq S$. Soit $t \in T$, $w \in A_T^+$ et $x \in A_S^+$. Si $t \not\preceq w$ mais $t \preceq wx$ alors il existe $s \in T$ tel que $s \preceq x$.*

Lemme 2.4 ([3] lemme 3.4) *Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits, soit $x \in A_{S,red}$ et $s \in S$; si $sx \notin A_{S,red}$ alors $s \preceq x$.*

Ce lemme est une version du lemme d'echange.

Lemme 2.5 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme. Soit $s, t \in S$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k \text{ n'est pas reduit } \Rightarrow m_{s,t} \neq \infty \text{ et } k > m_{s,t}.$$

Preuve Montrons cette implication par contraposee.

Si $m_{s,t} \neq \infty$ et $k \leq m_{s,t}$ alors $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ divise $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^{m_{s,t}}$; or $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^{m_{s,t}} = \Delta_{p(s)\cup p(t)}$ par l'axiome (L2) et est ainsi reduit (cf. la remarque qui suit le lemme 0.5), donc $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ est reduit. Supposons maintenant $m_{s,t} = \infty$ et montrons, par recurrence sur k, que $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ et $\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^k$ sont reduit pour tout k. Si $k = 0$ ou $k = 1$ c'est clair; supposons donc $k \geq 2$ et que $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ n'est pas reduit. Par hypothese de recurrence $\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ est reduit; donc il existe $C, D \in A^+_{p(s)}$ et $u \in p(s)$ tels que l'on a $CuD = \varphi_p^+(s)$ avec $D\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ reduit et $uD\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ qui ne l'est pas. D'apres le lemme 2.4, on a alors $u \preceq D\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$; d'autre part, $\varphi_p^+(s)$ est reduit, donc uD l'est aussi et $u \not\preceq D$. Par le lemme 2.3 applique avec $T = p(s)$, $w = D$ et $x = \langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$, il existe $v \in p(s)$ qui divise $\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^{k-1}$ pour $\preceq$. Mais ceci implique que $v \vee \Delta_{p(t)}$ existe et donc que $\{v\} \cup p(t)$ est de type spherique; ce qui contredit l'axiome (L3). Donc $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^k$ est reduit. Par symetrie, on a aussi que $\langle \varphi_p^+(t), \varphi_p^+(s)\rangle^k$ est reduit. □

Proposition 2.6 *Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits et φ_p un LCM-homomorphisme. Alors la restriction de φ_p^+ a $A_{S;red}$ est un morphisme injectif dont l'image est incluse dans $A_{S';red}$.*

Pour parler de cette propriete de φ_p, on dira que φ_p est QF-injective.

Preuve Puisque φ_p est un LCM-homomorphisme, sa restriction φ_p^+ est injective et la restriction a $A_{S;red}$ aussi. Il suffit donc de montrer que l'image par φ_p^+ d'un element reduit est reduit. Soit $U \in A_{S;red}$; on montre par recurrence sur la longueur de U que $\varphi_p^+(U)$ est reduit. Si $\ell(U) = 0$ ou $\ell(U) = 1$, alors le resultat est vrai. Supposons donc $\ell(U) \geq 2$. Dans ce cas, puisque U est reduit, on peut ecrire $U = \langle s,t\rangle^m V$ avec $s,t \in S$ distincts et $V \in A_S^+$ divisible pour $\preceq$ ni par s ni par t; de plus on a alors $2 \leq m \leq m_{s,t}$ et V reduit. On a alors que $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ est reduit d'apres le lemme 2.5. Comme $V \in A_{S;red}$ et $\ell(V) < \ell(U)$, on a par hypothese de recurrence $\varphi_p^+(V)$ reduit. Supposons que $\varphi_p^+(U)$ ne soit pas reduit et procedons comme dans la preuve du lemme 2.5: il existe $C, D \in A^+_{p(s)\cup p(t)}$ et $u \in p(s) \cup p(t)$ tel que $CuD = \langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ et $D\varphi_p^+(V)$ est reduit mais pas $uD\varphi_p^+(V)$; par le lemme 2.4, on a $u \preceq D\varphi_p^+(V)$. D'autre part, comme $\langle \varphi_p^+(s), \varphi_p^+(t)\rangle^m$ est reduit, uD l'est aussi et donc $u \not\preceq D$. Par le lemme 2.3, il existe $v \in p(s) \cup p(t)$ qui divise $\varphi_p^+(V)$ pour $\preceq$. Supposons $v \in p(s)$; puisque $\Delta_{p(s)} \succeq v$, $\varphi_p^+(sV)$ n'est pas reduit. D'autre part, $\ell(sV) < l(U)$, donc par hypothese de recurrence on a que sV n'est pas reduit, ce qui implique par le lemme 2.4 que $s \preceq V$; ceci est impossible par construction de V. Si $v \in p(t)$ on procede de la même facon pour obtenir une nouvelle contradiction. Donc U est reduit. □

Corollaire 2.7 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p induit un homomorphisme injectif $\varphi_{p;W} : W_S \to W_{S'}$.*

Preuve $\varphi_p(s^2) = \Delta^2_{p(s)}$ a pour image 1 dans $W_{S'}$; donc $\varphi_{p;W}$ est bien definie. D'autre part grâce a la proposition 2.6 et la section *Sec*, il est clair que $\varphi_{p;W}$ est injective. □

Definition 2.8 Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme. Pour $s \in S$ on pose $p_{\preceq}(s) = \{t \in S' \mid t \preceq \varphi(s)\}$ et $p_{\succeq}(s) = \{t \in S' \mid \varphi(s) \succeq t\}$. On dira que φ est un *lcm*-homomorphisme symetrique si $\forall s \in S$, on a $p_{\preceq}(s) = p_{\succeq}(s)$. Dans ce cas on notera simplement cet ensemble $p(s)$.

Un LCM-homomorphisme est en particulier un lcm-homomorphisme symetrique.

Lemme 2.9 *Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme QF-injectif. Soit $U \in A_S^+$ reduit et $s \in S$; s'il existe $t \in p(s)$ tel que $t \preceq \varphi^+(U)$ alors $s \preceq U$. Suposons de plus que φ est symetrique. Si U et V sont dans A_S^+ et reduit, alors $\varphi^+(U) \wedge \varphi^+(V) = 1 \iff U \wedge V = 1$.*

Preuve Si U est reduit et $s \in S$ avec $s \not\preceq U$, alors sU est aussi reduit. Donc $\varphi^+(s)\varphi^+(U)$ est reduit et aucun element de $p(s)$ ne peut diviser $\varphi^+(U)$. Supposons maintenant que φ est symetrique et que U et V sont dans A_S^+ reduit et differents de 1. Par contreapposee, il est clair que $\varphi^+(U) \wedge \varphi^+(V) = 1 \Rightarrow U \wedge V = 1$. Montrons l'autre implication par l'absurde. Supposons que $U \wedge V = 1$ mais $\varphi^+(U) \wedge \varphi^+(V) \neq 1$. Soit $t \in S'$ tel que $t \preceq \varphi^+(U) \wedge \varphi^+(V)$ et notons $s \in S$ tel que $t \in p(s)$. En utilisant la premiere partie du lemme, on a $t \preceq \varphi^+(U) \Rightarrow s \preceq U$ et $t \preceq \varphi^+(V) \Rightarrow s \preceq V$. Ce qui donne finalement $s \preceq U \wedge V$ et la contradiction voulue. □

Theoreme 2.10 *Soit $\varphi : A_S \to A_{S'}$ un lcm-homomorphisme symetrique QF-injectif. Alors φ^+ est compatible avec la forme normale: si $(g_1, \ldots, g_n)$ est la forme normale de $g \in A_S^+$ alors $(\varphi^+(g_1), \ldots, \varphi^+(g_n))$ est la forme normale de $\varphi^+(g)$. De plus, si $g_1, g_2 \in A_S^+$ alors*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \varphi^+(g_1) \vee \varphi^+(g_2) = \varphi^+(g_1 \vee g_2) \\ (b) \quad & \varphi^+(g_1) \wedge \varphi^+(g_2) = \varphi^+(g_1 \wedge g_2). \end{aligned}$$

Ce theoreme est en particulier valable pour les LCM-homomorphismes par la proposition 2.6 et dans le cas des lcm-homomorphismes provenant des automorphismes de graphes (*cf.* theoreme 14 de [10]). Le (a) est en fait connu puisque Crisp a montre dans le theoreme 8 de [10] que c'est deja le cas pour un lcm-homomorphisme.

Preuve Puisque φ est QF-injective, la suite $(\varphi^+(g_1), \ldots, \varphi^+(g_n))$ a bien ses termes dans $A_{S';red}$. On montre le resultat par recurrence sur n; rappelons qu'au lemme 0.6, on a defini une fonction α qui, a un element d'un monoïde d'Artin-Tits associe son plus grand diviseur reduit et qui verifie que $\alpha(gh) = \alpha(g\alpha(h))$. Puisque $\alpha(\varphi^+(g_1)\cdots\varphi^+(g_n)) = \alpha(\varphi^+(g_1)\alpha(\varphi^+(g_2)\cdots\varphi^+(g_n)))$, il suffit de montrer le resultat pour $n = 2$. Supposons donc $n = 2$. Puisque $\varphi^+(g_1)$ est reduit, il divise $\alpha(\varphi^+(g))$. Si $\varphi^+(g_1) \neq \alpha(\varphi^+(g))$ alors il existe $t \in p(s) \subseteq S'$ avec $s \in S$ tel que $t \preceq \varphi^+(g_2)$ et $\varphi^+(g_1) \not\preceq t$ mais dans ce cas $g_1 \not\preceq s$ et par le lemme 2.9, on a $s \preceq g_2$; ceci implique que $g_1 s$ est reduit et divise g; ce qui contredit le fait que $g_1 = \alpha(g)$. Donc $\varphi^+(g_1) = \alpha(\varphi^+(g))$.

Soit maintenant $g_1, g_2 \in A_S^+$. Il est clair que $\varphi^+(g_1) \vee \varphi^+(g_2) \preceq \varphi^+(g_1 \vee g_2)$ et que $\varphi^+(g_1 \wedge g_2) \preceq \varphi^+(g_1) \wedge \varphi^+(g_2)$. D'autre part, si on note $g_1 = (g_1 \wedge g_2)h_1$ et $g_2 = (g_1 \wedge g_2)h_2$ alors $h_1 \wedge h_2 = 1$. Il est facile de voir que $h_1 \wedge h_2 = 1 \iff \theta(h_1) \wedge \theta(h_2) = 1$ et que $\varphi^+(h_1) \wedge \varphi^+(h_2) = 1 \iff \theta(\varphi^+(h_1)) \wedge \theta(\varphi^+(h_2)) = 1$ (voir le lemme 0.6). On en deduit alors par le lemme 2.9 et la premiere partie du theoreme que $\varphi^+(h_1) \wedge \varphi^+(h_2) = 1$, ce qui montre le (b).

Le (a) se montre de la même facon : si on ecrit $g_1 \vee g_2 = g_1 h_1 = g_2 h_2$, on a $h_1 \wedge h_2 = 1$ et $\varphi^+(h_1) \wedge \varphi^+(h_2) = 1.$ □

Remarquons que l'on a vraiment eu besoin du fait que le lcm-homomorphisme est symetrique et que l'on ne peut esperer etendre ce resultat a tous les lcm-homomorphismes QF-injectifs comme le montre l'exemple suivant: soit φ le lcm-homomorphisme du groupe libre a un generateur $\langle t \rangle$ dans le groupe libre a deux generateurs $\langle x, y \rangle$ qui envoie t sur xy. Alors $\varphi(t^2) = xyxy$ est reduit donc $\theta(xyxy) = xyxy$ mais $\varphi(\theta(t^2)) = \varphi(t) = xy$.

Corollaire 2.11 *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme entre groupes d'Artin-Tits de type spherique. Alors φ_p^+ conserve l'ecriture normale: si $g_1^{-1} g_2$ est l'ecriture normale de $g \in A_S$ alors $\varphi_p^+(g_1)^{-1} \varphi_p^+(g_2)$ est l'ecriture normale de $\varphi_p(g)$.*

Preuve C'est clair par la seconde partie du theoreme 2.10. □

2.1 Une realisation geometrique

Le realisation geometrique se construit maintenant exactement comme dans [9]; on se contente donc d'introduire les notations utiles et d'enoncer le resultat.

Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits, (W_S, S) son systeme de Coxeter associe et posons $S_{f,S} = \{T \subseteq S \mid W_T \text{ est fini}\}$. On ordonne l'ensemble $W_S \times S_{f,S}$ par la relation:

$$(w_1, T_1) \leq (w_2, T_2) \text{ si } \begin{cases} w_1 W_{T_1} \subseteq w_2 W_{T_2} \\ \ell(\Delta_{T_1}) + \ell(w_1^{-1} w_2) = \ell(\Delta_{T_1} w_1^{-1} w_2) \end{cases}$$

et on note $\widetilde{\Sigma}_S$ la realisation geometrique du complexe derive de cet ensemble ordonne; c'est un complexe simplicial. Le complexe $\widetilde{\Sigma}_S$ s'appelle le complexe de Salvetti et a ete introduit dans [16]. Le groupe W_S agit simplicialement et librement sur $\widetilde{\Sigma}_S$ (par multiplication a gauche sur le premier facteur); on note $Z_S = \widetilde{\Sigma}_S / W_S$ l'espace des orbites pour cette action. Il est connu que $\pi_1(Z_S) = A_S$.

Lemme 2.12 (Proposition 3.2 de [9]) *Soit A_S et $A_{S'}$ deux groupes d'Artin-Tits. Soit φ_p un LCM-homomorphisme. Alors l'application $\widetilde{\varphi} : W_S \times S_{f,S} \to W_{S'} \times S_{f,S'}$ definie par $\widetilde{\varphi}(w,T) = (\varphi_{p,W}(w), p(T))$ pour $(w,T) \in W_S \times S_{f,S}$ preserve strictement l'ordre et induit une application $\widetilde{\psi}$ qui est simpliciale injective et $(W_S, W_{S'})$-equivariante de $\widetilde{Z}_S$ dans $\widetilde{Z}_{S'}$.*

Proposition 2.13 (Theoreme 3.4 de [9]) *Soit $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme; identifions $A_S, A_{S'}$ respectivement a $\pi_1(Z_S)$ et $\pi_1(Z_{S'})$. Alors l'application $\widetilde{\psi}$ du lemme 2.12 induit une application simpliciale injective $\psi : Z_S \to Z_{S'}$ telle que*

$$\varphi_p = \psi_*,$$

ou ψ_* designe l'application induite par ψ entre les groupes fondamentaux.

3 Injectivite des LCM-homomorphismes

Nous commencons par introduire le complexe de Deligne puis la notion de complexe de cubes. C'est grâce a ces objets que nous allons etablir l'injectivite des LCM-homomorphismes pour les groupes d'Artin-Tits de type FC.

3.1 Le complexe de Deligne et les espaces de cubes

Le complexe de Deligne a ete defini pour la premiere fois par Deligne dans [12] pour le cas des groupes d'Artin-Tits de type spherique. Cette construction a ete ensuite generalisee par Charney et Davis dans [7] et a permis de montrer plusieurs resultats sur les groupes d'Artin-Tits (par exemple dans [4, 5, 8, 7, 10]).

Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits. Rappelons que

$$S_{f,S} = \{T \subseteq S;\ A_T \text{ est de type spherique}\}$$

et posons

$$A_S S_{f,S} = \{xA_T;\ x \in A_S \text{ et } T \in S_{f,S}\}.$$

Rappelons que si $(P, <)$ est un ensemble partiellement ordonne, son complexe de drapeaux est le complexe simplicial abstrait qui a pour sommets les elements de P et pour simplexes les suites finies croissantes d'elements de P. Un sous-simplexe d'un simplexe, donc d'une suite, est alors une sous-suite de celle-ci.

On appelle "complexe de Deligne" le complexe de drapeaux D_S obtenu a partir de l'ensemble $A_S S_{f,S}$ munie de l'inclusion comme ordre partiel (notons que

$xA_X \subseteq yA_Y$ ($\Leftrightarrow$ $X \subseteq Y$ et $y^{-1}x \in A_Y$). C'est un complexe simplicial abstrait. On peut associer a ce complexe une realisation geometrique sous forme de complexe simplicial euclidien par morceaux. On identifie souvent le complexe et sa realisation, bien que celle-ci ne soit pas unique. Le groupe A_S agit sur son complexe de Deligne par multiplication a gauche. Si l'on note K_S, le sous-complexe de drapeaux associe a $S_{f;S}$, alors K_S est un domaine fondamental pour l'action de A_S sur D_S. Si l'on munit K_S d'une realisation geometrique, on peut etendre celle-ci a D_S tout entier via l'action de A_S. Dans ce cas, A_S agit naturellement par isometries sur la realisation geometrique de D_S.

Dans [7], on associe au complexe de Deligne une realisation geometrique liee a la metrique dite "de Moussong"; nous ne detaillons pas ici cette construction. Disons simplement que cette realisation est conjecturalement la plus adaptee pour tous les groupes d'Artin-Tits. Lorsque A_S est de type FC (*cf.* definition 0.3), on associe a D_S une realisation geometrique cubique grâce a K_S, comme vu ci-dessus. La structure cubique de K_S est donnee par les sous-complexes associes aux sous-groupes paraboliques standards A_X de type spherique dont les realisations geometriques sont alors des cubes de $\mathbb{R}^n$ pour $n = |X|$.

Un complexe de cubes est un complexe polyedrique ou les faces fermees sont des cubes d'un espace euclidien; celles-ci sont appelees les cubes du complexe. Si $(A_S; S)$ est un systeme d'Artin-Tits de type FC alors la realisation cubique de son complexe de Deligne est naturellement munie d'une structure de complexe de cubes sous-jacente qui consiste a ne garder que les arêtes $\{aA_X; aA_Y\}$ telles que $aA_X \subseteq aA_Y$ avec $a \in A_S$ et $Y = X \cup \{s\}$ dans $S_{f;S}$ avec $s \in S - X$. Si K est un cube de dimension n, alors il possede pour l'inclusion un sommet minimal aA_R et un sommet maximal aA_T, avec $a \in A_S$, et avec $R \subseteq T$ dans $S_{f;S}$ tels que $\#(T - R) = n$. L'ensemble des sommets de K est alors $\{aA_X | R \subseteq X \subseteq T\}$ et il forme un treillis pour l'inclusion. On notera $K = K(aA_R; aA_T)$.

Definition 3.1 Soit D un complexe de cubes.

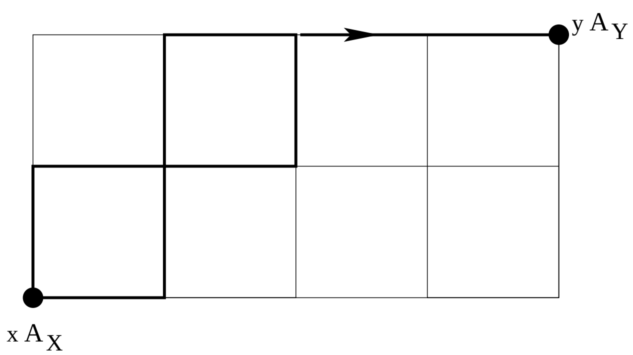
(i) Si $C_1; C_2; \cdots; C_n$ sont des cubes de D, on note $span(C_1; C_2; \cdots; C_n)$ le plus petit cube, s'il existe, qui contient les C_i. On dit que c'est le cube tendu par les C_i.

(ii) Soit C un cube de D. On appelle etoile de C, et on note $Et(C)$, le sous-complexe $Et(C) = \bigcup_{C \subseteq C'} C'$.

(iii) Soit $x; y$ deux sommets de D. On dit que la suite $x_1; \cdots; x_n$ de sommets de D est un chemin cubique normal de x a y si

$$\begin{cases} (a) & x = x_0; y = x_n; \\ (b) & \forall i \in \{1, \dots, n\}, C_i = span(x_{i-1}, x_i) \text{ existe;} \\ (c) & \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, Et(C_i) \cap C_{i+1} = \{x_i\}. \end{cases}$$

Proposition 3.2 ([14], [6] theoreme 4.4) *Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits de type FC; on munit D_S de sa structure de complexe de cubes. Soit xA_X, yA_Y deux sommets de D_S; alors il existe un unique chemin cubique normal de xA_X a yA_Y.*



Chemin cubique normal de xA_X a yA_Y

Cet enonce est lie au fait que la realisation geometrique cubique d'un groupe d'Artin-Tits de type FC est un espace CAT(0) (*cf.* [7]). Nous ne detaillons pas ici cette notion qui ne nous servira pas directement. On pourra se referer a [2] pour plus d'explications sur les espaces metriques a courbure negative.

Le lemme suivant permet de mieux comprendre la structure cubique du complexe de Deligne.

Lemme 3.3 ([6] lemme 4.1) *Soit (A_S, S) un systeme d'Artin-Tits de type FC et D_S son complexe de Deligne munit de sa structure de complexe de cubes. Soit $K_1 = K(aA_{R_1}, aA_{T_1})$ et $K_2 = K(bA_{R_2}, bA_{T_2})$ deux cubes de D_S. Alors,*

$$span(K_1, K_2) \text{ existe} \iff T_1 \cup T_2 \in S_{f,S} \text{ et } aA_{R_1} \cap bA_{R_2} \neq \emptyset.$$

De plus, dans ce cas,

$$span(K_1, K_2) = K(cA_{R_1 \cap R_2}, cA_{T_1 \cup T_2})$$

avec $c \in aA_{R_1} \cap bA_{R_2}$.

3.2 Injectivite des LCM-homomorphismes

Dans cette partie, on se donne (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. On identifie les complexes de Deligne D_S et $D_{S'}$ avec leurs realisations geometriques cubiques. On definit une application simpliciale continue $\psi_p : D_S \to D_{S'}$ en posant $\psi_p(xA_X) = \varphi_p(x)A_{p(X)}$. Cette application est bien definie car si $X \subset Y \subset S$ alors $p(X) \subset p(Y) \subset S'$. L'enonce du lemme suivant est largement inspire du lemme 18 de [10].

Lemme 3.4 *On a:*

(i) *la restriction* $\psi_p|_{K_S}$ *de* ψ_p *a* K_S *est injective et son image est dans* $K_{S'}$.

(ii) *Si* ψ_p *est injective alors* φ_p *est injective.*

(iii) $Im\,\varphi_p = stab(Im\,\psi_p)$ *et* $Im\,\psi_p = Im\,\varphi_p\,\psi_p(K_S)$.

Question 2 Il n'est pas tres complique de voir que la definition de ψ_p et le lemme 3.4 sont independants du fait que les groupes d'Artin-Tits sont de type FC (c'est independant de la realisation geometrique). Une question naturelle est donc de savoir si la reciproque du (ii) est vraie en general.

Preuve (i) La restriction de ψ_p a K_S est injective sur les sommets puisque p envoie des generateurs distincts sur des parties disjointes. Par simplicialite, elle est donc injective sur K_S et par definition $\psi_p(K_S) \subset K_{S'}$. Pour montrer le (ii), il suffit de considerer l'orbite de $A_\emptyset$.

(iii) L'inclusion $Im\,\varphi_p \subset stab(Im\,\psi_p)$ et l'egalite $Im\,\psi_p = Im\,\varphi_p\,\psi_p(K_S)$ sont claires. D'autre part, on a $1A_\emptyset \in Im(\psi_p)$, donc si $w \in stab(Im(\psi_p))$ alors $w(1A_\emptyset) = wA_\emptyset \in Im(\psi_p)$ et $w \in Im\,\varphi_p$. □

Avant d'enoncer la proposition importante 3.7 nous commencons par un lemme utile pour la preuve de celle-ci.

Lemme 3.5 *Soit* A_S *un groupe d'Artin-Tits.*

(i) *Soit* $w \in A_S^+$, $X \subset S$, *et* $s \in S$. *Si* $w \in A_X^+$ *et* s *apparaît dans une ecriture de* w *alors* $s \in X$.

(ii) *Soit* $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ *un LCM-homomorphisme. Soit* $R \subset S$ *et* $Y \subset S'$. *On pose* $Z = \{s \in S \mid p(s) \subset Y\}$. *Soit* $w \in A_S^+$ *alors*

$$\exists \alpha \in A^+_{p(R)}, \exists \beta \in A^+_Y ; \varphi_p(w) = \alpha\beta \Rightarrow \exists u \in A^+_R, \exists v \in A^+_Z ; w = uv.$$

En particulier si $R = \emptyset$ *(donc* $\alpha = 1$ *et* $\varphi_p(w) \in A^+_Y$*) alors* $w \in A^+_Z$.

Au cours de la preuve de ce lemme et de la proposition suivante, nous aurons besoin des notions d'element X-reduit et reduit-X:

De nition 3.6 Soit A_S un groupe d'Artin-Tits; soit X est une partie de S et $w\ 2\ A_S^+$. On dit que w est X-reduit (resp. reduit-X) s'il n'est divisible pour (resp.) par aucun element de X.

Preuve du lemme 3.5 (i) Supposons que $w\ 2\ A_X^+$. Cela signi e qu'il existe un representant de w dans A_S^+ ou n'apparaissent que des elements de X; mais si s appara^t dans une ecriture, alors il appara^t dans toutes car les relations de tresses ne font ni appara^tre ni dispara^tre de generateurs. Donc $s\ 2\ X$.

(ii) Supposons $l(\ ) = 0$ pour commencer et remarquons que si $X; X^0 \quad S$ alors $X \quad X^0 \quad (\ ) \quad p(X) \quad p(X^0)$. Soit X minimal tel que $w\ 2\ A_X^+$: $w = s_1 \quad s_n$ avec $X = fs_1; \quad s_n g$ (les s_i ne sont pas forcement distincts). Alors $'^+_p(w) = \ _{p(s_1)} \quad _{p(s_n)}$. D'ou $p(X) = \ S^n_{i=1} p(s_i) \quad Y$ par le (i) et donc $X \quad Z$ par de nition de Z.

Revenons maintenant au cas general : $'_p(w) = \quad$.

Quitte a modi er et , on peut supposer que est $p(R)$-reduit. On procede par recurrence sur $l(\ )$. Si $l(\ ) = 0$, le resultat est vrai par le debut de la preuve. Supposons donc $l(\ ) \quad 1$. Soit $t\ 2\ p(R)$ tel que t et $s\ 2\ R$ tel que $t\ 2\ p(s)$. Alors, $t \quad '_p(w)$ et comme $'_p$ conserve la forme normale, $s \quad w$. Donc $_{p(s)}$; mais comme $p(s) \quad p(R)$ et est $p(R)$-reduit, on a alors $_{p(s)}$ car tout element de $p(s)$ divise par le lemme 2.3. On peut donc simpli er par s dans w et par $_{p(s)}$ dans pour appliquer l'hypothese de recurrence. □

Proposition 3.7 *Soit xA_X et yA_Y deux sommets de D_S. Alors $_p$ envoie le chemin cubique normal de xA_X a yA_Y sur le chemin cubique normal de $_p(xA_X)$ a $_p(yA_Y)$.*

Preuve Soit xA_X et yA_Y des sommets de D_S. Notons $x_0A_{X_0} = xA_X; x_1A_{X_1}, \quad ; x_nA_{X_n} = yA_Y$ l'unique chemin cubique normal de xA_X a yA_Y dans D_S. Posons $R_i = X_{i-1} \setminus X_i$ et $T_i = X_{i-1}\ [\ X_i$. Soit $a_i\ 2\ x_{i-1}A_{X_{i-1}} \setminus x_iA_{X_i}$; on a

$$K(a_iA_{R_i}; a_iA_{T_i}) = span(x_{i-1}A_{X_{i-1}}; x_iA_{X_i}):$$

L'image par $_p$ du chemin cubique normal de x a y est la suite de sommets de D_{S^0}: $'_p(x_0)A_{p(X_0)} = '_p(x)A_{p(X)}; \ '_p(x_1)A_{p(X_1)}, \quad , \ '_p(x_n)A_{p(X_n)} = '_p(y)A_{p(Y)}$. Posons $C_i = span('_p(x_{i-1})A_{p(X_{i-1})}; \ '_p(x_i)A_{p(X_i)})$. Celle-ci existe et est en fait clairement egale a $C_i = K('_p(a_i)A_{p(R_i)}; \ '_p(a_i)A_{p(T_i)}):$

Nous devons prouver que cette suite de sommets vérifie les axiomes (a),(b), et (c) de la définition 3.1 (iii). Le (a) et le (b) sont triviaux; montrons donc le (c) par l'absurde. Soit i tel que $Et(C_i) \cap C_{i+1} \neq \{\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}\}$ et soit $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ un sommet de $Et(C_i) \cap C_{i+1}$ distinct de $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$. Par le lemme 3.3, on a

$$span(\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}; \varphi_p(a_{i+1})A_Y) = K(\varphi_p(a_{i+1})A_{p(X_i)\cap Y}; \varphi_p(a_{i+1})A_{p(X_i)\cup Y}).$$

D'autre part, $p(X_i) \cup Y \neq p(X_i)$ ou $p(X_i) \cap Y \neq p(X_i)$; quitte à remplacer Y par $p(X_i) \cap Y$ ou $p(X_i) \cup Y$, on peut donc se ramener soit au cas où $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)} \subsetneq \varphi_p(a_{i+1})A_Y$ soit au cas où $\varphi_p(a_{i+1})A_Y \subsetneq \varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$.

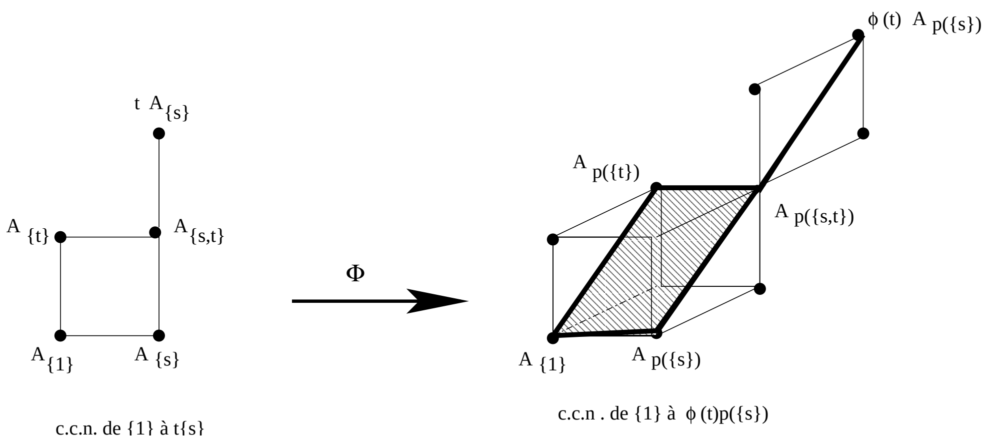
Premier cas: supposons que $\varphi_p(a_{i+1})A_Y \subsetneq \varphi_p(x_i)A_{p(X_i)}$ et posons $Z = \{s \in S; p(s) \in Y\}$. On a donc $Z \subsetneq X_i$.

Puisque $a_iA_{X_i} = a_{i+1}A_{X_i} = x_iA_{X_i}$, on a $a_{i+1}^{-1}a_i \in A_{X_i}$: $a_{i+1}^{-1}a_i = u_1^{-1}u^{-1}vv_1$ avec $u;v;u_1;v_1 \in A^+_{X_i}$ et
$$\begin{cases} uu_1 \text{ et } vv_1 \text{ premiers entre eux pour } \succ; \\ v_1 \in A^+_{R_i} \text{ et } v \text{ réduit-}R_i; \\ u_1 \in A^+_Z \text{ et } u \text{ réduit-}Z. \end{cases}$$

Montrons que $a_iA_{R_i} \cap a_{i+1}A_Z \neq \emptyset$; ceci est équivalent à montrer que $vA_{R_i} \cap uA_Z \neq \emptyset$. Or, par hypothèse $span(\varphi_p(a_i)A_{p(R_i)}; \varphi_p(a_{i+1})A_Y)$ existe et par le lemme 3.3 on en déduit que $\varphi_p(a_i)A_{p(R_i)} \cap \varphi_p(a_{i+1})A_Y \neq \emptyset$; c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in A_{p(R_i)}$ et $\beta \in A_Y$ tel que $\varphi_p(v)\varphi_p(v_1)\alpha = \varphi_p(u)\varphi_p(u_1)\beta$. On peut écrire $\varphi_p(v_1)\alpha = \alpha_1\alpha_2^{-1}$ avec $\alpha_1; \alpha_2 \in A^+_{p(R_i)}$ et $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 1$; de même, on peut écrire $\varphi_p(u_1)\beta = \beta_1\beta_2^{-1}$ avec $\beta_1; \beta_2 \in A^+_Y$ et $\beta_1 \wedge \beta_2 = 1$. Ceci nous donne $\varphi_p(v)\alpha_1\alpha_2^{-1} = \varphi_p(u)\beta_1\beta_2^{-1}$; mais l'écriture $\varphi_p(v)\alpha_1\alpha_2^{-1}$ est normale: $\varphi_p(v)\alpha_1$ et α_2 sont premiers entre eux à droite car α_1 et α_2 le sont, $\varphi_p(v)$ est réduit-$p(R_i)$ car v est réduit-R_i (*cf.* le lemme 2.9), et on utilise l'analogue à droite du lemme 2.3. Donc il existe w, a priori dans $A^+_{p(X_i)}$, tel que $\alpha_2 w = \beta_2$ et $\varphi_p(v)\alpha_1 w = \varphi_p(u)\beta_1$. L'égalité $\alpha_2 w = \beta_2$ impose $w \in A^+_Y$. Maintenant, en simplifiant $\alpha_1 w$ et β_1 par leur pgcd à droite et en prenant pour a le représentant réduit-Y de $\alpha_1 A^+_Y$, on déduit de l'égalité $\varphi_p(v)\alpha_1 w = \varphi_p(u)\beta_1$ qu'il existe $a \in A^+_{p(R_i)}$ et $b;c \in A^+_Y$ tels que que a est réduit-Y et $ac \wedge b = 1$ avec $\varphi_p(v)ac = \varphi_p(u)b$. Cette égalité implique que $b = \varphi_p(u)^{-1}(\varphi_p(u) \vee \varphi_p(v))z = \varphi_p(u^{-1}(u \vee v))z$ et $ac = \varphi_p(v)^{-1}(\varphi_p(u) \vee \varphi_p(v))z = \varphi_p(v^{-1}(u \vee v))z$ avec $z \in A^+_Y$; mais puisque $ac \wedge b = 1$, on a $z = 1$. On peut maintenant appliquer le lemme 3.5(ii) : $u^{-1}(u \vee v) \in A^+_Z$ et il existe $x \in A^+_{R_i}$; $y \in A^+_Z$ tel que $v^{-1}(u \vee v) = xy$. D'où $vA_{R_i} \cap uA_Z \neq \emptyset$. De plus, $Z \cup T_i = T_i \in S_{f;S}$, donc par la proposition 3.3, on a que $span(K(a_iA_{R_i}; a_iA_{T_i}); a_{i+1}A_Z)$ existe; si l'on montre que que l'on a aussi $a_{i+1}A_Z \in K_{i+1}$ on aura alors une contradiction avec le fait que la suite des $x_iA_{X_i}$ est un chemin cubique normal, puisque Z et X_i sont distincts. Montrons ce dernier point. Ceci revient à voir que

$R_{i+1} \subseteq Z \subseteq T_{i+1}$. Mais d'une part on a $Z \subseteq X_i \subseteq T_{i+1}$, et d'autre part on a $p(R_{i+1}) \subseteq Y$ puisque $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ est un sommet de C_{i+1}. Par definition de Z, cela implique $R_{i+1} \subseteq Z$.

Deuxieme cas: supposons que $\varphi_p(x_i)A_{p(X_i)} \subsetneq \varphi_p(a_{i+1})A_Y$ (et distincts) et posons maintenant $Z = \{s \in S; p(s) \cap Y \neq \emptyset\}$. On a alors $R_i \subseteq X_i \subsetneq Z$ et $a_iA_{R_i} \cap a_{i+1}A_Z = a_iA_{R_i} \neq \emptyset$. De plus, puisque $span(\varphi_p(a_i)A_{p(T_i)}, \varphi_p(a_{i+1})A_Y)$ existe, on a que $p(T_i) \cup Y$ est de type spherique (en particulier sans liaison infinie); ceci implique par l'axiome (L3) que $T_i \cup Z$ n'a pas non plus de liaison infinie. Il est donc de type spherique puisque S est de type FC. Comme dans le premier cas, on en deduit par le lemme 3.3, que $span(K(a_iA_{R_i}, a_iA_{T_i}), a_{i+1}A_Z)$ existe. Comme dans le premier cas, il nous reste a voir que $a_{i+1}A_Z \in K_{i+1}$, c'est a dire $R_{i+1} \subseteq Z \subseteq T_{i+1}$, pour obtenir une nouvelle contradiction puisque Z et X_i sont encore une fois distincts. Tout d'abord, on a $R_{i+1} \subseteq X_i \subseteq Z$. Ensuite puisque $\varphi_p(a_{i+1})A_Y$ est un sommet de C_{i+1}, on a $Y \subseteq p(T_{i+1})$; ce qui implique $p(Z) \subseteq p(T_{i+1})$ et finalement $Z \subseteq T_{i+1}$ par l'axiome (L0) de la definition 0.1. □



Un exemple

Corollaire 3.8 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors, Φ_p est injective.*

Preuve Par la proposition precedente, Φ_p est injective sur les sommets et est donc injective. □

Theoreme 3.9 *Soit (A_S, S) et $(A_{S'}, S')$ deux systemes d'Artin-Tits de type FC et $\varphi_p : A_S \to A_{S'}$ un LCM-homomorphisme. Alors φ_p est injective.*

Preuve On applique le corollaire 3.8 et le lemme 3.4(ii). □

References

[1] N. Bourbaki, *Groupes et Algebres de Lie chapitres 4,5,6*, Hermann (1968).

[2] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, A series of comprehensive studies in mathematics, Springer-Verlag (1999).

[3] E. Brieskorn, K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. 17 (1972), 245{271.

[4] R. Charney, *Geodesic automation and growth functions for Artin groups of nite type*, Math. Ann. 301 (1995) 307-324.

[5] R. Charney *Injectivity of the positive monoid for some in nite type Artin groups*, (1999) 103-118. Geometric Group Theory Down Under, J. Cossey and C. Miller and W. Neumann and M. Shapiro eds, Walter de Gruyter.

[6] J.A. Altobelli and R. Charney, *A geometric Rational Form for Artin Groups of FC type*, Geom. Dedicata 79 (2000) 277-289.

[7] R. Charney and M.W. Davis, *The $K(;1)$-problem for hyperplane complements associated to in nite reflection groups*, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995) 597-627.

[8] R. Charney and M.W. Davis, *Finite $K(;1)$s for Artin groups*, Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press 138 (1995) 110-124.

[9] J Crisp, *Injective maps between Artin groups*, Proceedings of the Special Year in Geometric Group Theory,Berlin, (1999), 119 { 138.

[10] J. Crisp, Symmetrical Subgroups of Artin Groups, Adv. in Math. 152 (2000), 159-177.

[11] P. Dehornoy, *On completeness of word reversing*, Discrete Math. 225 (2000), 93{119.

[12] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses generalises*, Invent. Math. 17 (1972), 273{302.

[13] J. Michel, *A note on words in braid monoids*, J. Algebra 215 (1999), 366{377.

[14] G. Niblo and L. Reeves, *The geometry of cube complexes and the complexity of their fundamental groups*, Topology 37(3) (1998) 621-633.

[15] L. Paris, *Artin monoids inject in their groups*, preprint janvier 2001.

[16] M. Salvetti, *Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^n$*, Invent. Math. 88 (1987) 603-618.

[17] H. van der Lek, \The homotopy type of complex hyperplane complements", Ph. D. Thesis, University of Nijmegen, 1983.

LAMFA CNRS 2270, Universite de Picardie-Jules Verne
Faculte de Mathematiques et d'Informatique
33 rue Saint-Leu, 80000 Amiens, France

Email: eddy.godelle@u-picardie.fr

URL: http://www.mathinfo.u-picardie.fr/godelle

Received: 11 October 2001