ISSN 1472-2739 (on-line) 1472-2747 (printed) **419**

Algebraic & Geometric Topology
Volume 5 (2005) 419–442
Published: 24 May 2005

Monoïde des enlacements et facteurs orthogonaux

Florian Deloup

Abstract

A linking pairing is a symetric bilinear pairing $\lambda\colon\ G\times G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on a finite abelian group. The set of isomorphism classes of linking pairings is a non-cancellative monoid $\mathfrak{E}$ under orthogonal sum, which is infinitely generated and infinitely related. We propose a new presentation of $\mathfrak{E}$ that enables one to detect whether a linking pairing has a given orthogonal summand. The same method extends to the monoid $\mathfrak{Q}$ of quadratic forms on finite abelian groups. We obtain a combinatorial classification of $\mathfrak{Q}$ (that was previously known for groups of period 4).

As applications, we describe explicitly 3-manifolds having a degree one map onto prescribed (or proscribed) lens spaces. Most of the results extend to 3-manifolds endowed with a parallelization or a spin structure. In particular, the Reidemeister–Turaev function detects the existence of a spin preserving degree one map between a rational homology 3-sphere and a lens space.

Résumé

Un enlacement est une forme bilinéaire symétrique $\lambda\colon\ G\times G\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur un groupe abélien fini. L'ensemble des classes d'isomorphismes d'enlacements forme un monoïde $\mathfrak{E}$, pour la somme orthogonale, à un nombre infini de générateurs et de relations, sans simplification. Nous proposons une nouvelle présentation de $\mathfrak{E}$ qui permet de reconnaître si un enlacement possède un facteur orthogonal donné. La même méthode se généralise au monoïde $\mathfrak{Q}$ des formes quadratiques sur les groupes abéliens finis. Nous obtenons ainsi une classification combinatoire de $\mathfrak{Q}$, classification qui n'était précédemment connue que pour les groupes de période 4.

Comme application, nous décrivons explicitement les 3-variétés admettant une application de degré un sur des lenticulaires prescrits (ou proscrits). La plupart des résultats se généralisent aux 3-variétés munies d'une parallélisation ou d'une structure spinorielle. En particulier, la fonction de Reidemeister–Turaev distingue l'existence ou non d'une application de degré un préservant les structures spinorielles entre une 3-sphère d'homologie rationnelle et un lenticulaire.

AMS Classification 11E99, 57M27; 11E81, 57N10

Keywords Linking pairing, quadratic form, othogonal summand, 3-manifold

1 Introduction

Un enlacement (G,b) est une forme bilinéaire symétrique $b\colon\, G\times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sur un groupe abélien fini dont l'homomorphisme adjoint $\widehat{b}\colon\, G \to \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est bijectif. Les enlacements apparurent tout d'abord en topologie comme invariants algébriques mesurant l'enlacement des $(2n-1)$-cycles dans une variété fermée orientée de dimension $(4n-1)$. Une telle variété M possède en effet un enlacement $\lambda_M\colon$ Tors $H_{2n-1}(M) \times$ Tors $H_{2n-1}(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (voir [21]). H. Minkowski avait déjà indiqué comment obtenir un système complet d'invariants de la classe d'isomorphismes de λ_M à l'aide de systèmes d'équations de congruence et de sommes de Gauss. Un système complet d'invariants numériques était connu de H. Seifert, dans le cas de p-groupes avec p impair, et de E. Burger [1] dans le cas général. La classification complète fut ensuite poursuivie par C.T.C. Wall [27] dans le cas des p-groupes avec p impair, puis complétée par A. Kawauchi et S. Kojima [11] dans le cas général.

Deux enlacements (G,b) et (G',b') sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi\colon\, G \to G'$ tel que $b'(\phi(x),\phi(y)) = b(x,y)$ pour tout $x,y\in G$. Étant donnés deux enlacements $(G,b),(G',b')$, leur somme orthogonale $(G,b)\oplus(G',b')$, notée également $b\oplus b'$, est définie par $(b\oplus b')((x,x'),(y,y')) = b(x,y)+b'(x',y')$ pour tous $x,y\in G$ et $x',y'\in G'$. L'ensemble des classes d'isomorphismes d'enlacements forme un monoïde $\mathfrak{E}$ pour la somme orthogonale $\oplus$. Ce monoïde $\mathfrak{E}$ possède une infinité de générateurs et de relations et est sans simplification.

Une présentation par générateurs et relations de $\mathfrak{E}$ est proposée dans [11]. La difficulté majeure réside dans les enlacements sur les 2-groupes qui forment un sous-monoïde $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{E}$. Au-delà du caractère résiduellement fini de $\mathfrak{E}$, il ne semble pas exister de classification des monoïdes dans laquelle $\mathfrak{E}$ s'insèrerait naturellement. Nous proposons une autre approche pour éclaircir la nature de $\mathfrak{E}$.

La motivation pour cette approche est topologique. En effet, le système complet d'invariants proposé dans [11] se déduit de théories topologiques des champs abéliennes [5][4]. Pour que ces théories trouvent une application proprement topologique, on cherche à décrire de façon combinatoire comment reconstruire la classe d'isomorphisme d'un enlacement à partir de ses invariants. Cette idée conduit à décrire l'"image" de ce système d'invariants. Comme conséquences, nous obtenons une nouvelle présentation combinatoire de $\mathfrak{M}$, ainsi qu'un algorithme pour reconnaître un facteur orthogonal d'un enlacement. Nous généralisons également cette approche au cas des formes quadratiques (homogènes). Ceci permet d'obtenir une présentation globale du monoïde des formes quadratiques sur les groupes finis, en particulier sur les 2-groupes. Ceci n'était précédemment connu que pour les 2-groupes de période au plus 4.

Nous appliquons cette méthode pour déterminer explicitement des 3-variétés admettant des applications de degré 1 sur des lenticulaires prescrits ou proscrits. Finalement, la plupart des résultats obtenus se généralise au cadre spinoriel, c'est-à-dire aux 3-variétés munies d'une structure spin ou d'une parallélisation. En particulier, nous montrons que la fonction de Reidemeister–Turaev [25] distingue l'existence ou non d'une application de degré un préservant les structures spinorielles entre une 3-sphère d'homologie rationnelle et un lenticulaire. Certains des résultats algébriques présentés dans cet article ont été annoncés dans la note [3].

Plan de l'article §2 décrit une présentation combinatoire du monoïde $\mathfrak{E}$ des enlacements, le cas le plus délicat étant celui des 2-groupes (Théorème 2): $\mathfrak{M}$ s'identifie alors à un sous-monoïde des fonctions $\mathbb{N} \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{N}$, appelé le monoïde des tableaux admissibles. Cette description est appliquée dans §3 à la reconnaissance de facteurs orthogonaux dans un enlacement (Théorème 4). §4 généralise les résultats des sections précédentes aux formes quadratiques (Théorème 5). §5 présente quelques-unes des applications topologiques des sections précédentes dans les cas non-parallélisé et parallélisé (ou spin). §6 contient les démonstrations des Théorèmes 2 et 8. Enfin, §7 présente quelques questions ouvertes.

Ce travail est en partie financé par un contrat de recherche Marie Curie de l'Union européenne MERG-CT-2004-510590.

2 Une présentation combinatoire du monoïde des enlacements

2.1 Le système d'invariants de Minkowski-Burger

Rappelons que tout enlacement (G, λ) admet une unique décomposition orthogonale

$$(G, \lambda) = \bigoplus_{p \text{ prime}} (G^p, \lambda^p)$$

où (G^p, λ^p) est un enlacement sur un p-groupe (de type fini). Les cas $p > 2$ et $p = 2$ sont distincts. Tout enlacement (G, λ) sur un p-groupe admet à son tour une décomposition orthogonale

$$(G, \lambda) = \bigoplus_{k \geq 1} (G_k, \lambda_k) \tag{1}$$

où (G_k, λ_k) est un enlacement sur un $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$-module libre. Si $p \neq 2$, la décomposition est unique (à isomorphisme près des facteurs (G_k, λ_k)) et un tel enlacement est toujours isomorphe à une somme orthogonale d'enlacements cycliques sur des copies de $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Le rang $\rho_k(\lambda)$ de G_k (en tant que $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$-module) est un invariant de (G, λ); il est additif sur la somme orthogonale. Au moyen de l'injection $1 \mapsto \frac{1}{p^k}$, $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on peut regarder λ_k comme un enlacement à valeurs dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (au lieu de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Ainsi le déterminant $\det \lambda_k \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ est un élément inversible bien défini. On définit un second invariant $\sigma_k(\lambda) \in \{-1, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ comme le résidu quadratique de $\det \lambda_k$ modulo p^k (ou, ce qui revient au même, modulo p). Si $\rho_k(\lambda) = 0$ alors $\lambda_k = 0$ et on convient que $\sigma_k(\lambda) = 1$ (0 est un résidu quadratique modulo p). Regroupons alors les invariants ci-dessus sous la forme d'une seule application $(\rho, \sigma)\colon \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, k \mapsto (\rho_k(\lambda), \sigma_k(\lambda))$. Le résultat principal pour p premier impair est dû à Minkowski et sous la forme ci-dessous, à E. Seifert et à C.T.C. Wall.

Proposition 1 *Soit p un nombre premier impair et (G, λ) un enlacement sur un p-groupe fini. Le système d'invariants $\mathcal{S} = (\rho(\lambda), \sigma(\lambda))$ détermine la classe d'isomorphisme de (G, λ).*

De plus, le système est minimal en ce sens qu'étant donnée toute sous-famille stricte $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ d'invariants, il existe des enlacements non distingués par $\mathcal{F}$ qui sont non isomorphes.

Le cas $p = 2$ est plus compliqué, du fait que la décomposition orthogonale (1) n'est pas unique en général. L'entier $\rho_k(\lambda)$ reste bien sûr un invariant additif de l'enlacement. Un second invariant est défini à partir de sommes de Gauss. Soit $k \geq 1$. Considérons le nombre complexe

$$\Gamma_k(G, \lambda) = \sum_{x \in G} \exp(\sqrt{-1}\ \pi\ 2^k \lambda(x, x)).$$

Il est bien connu que si $\Gamma_k(G, \lambda) \neq 0$ alors $\frac{\Gamma_k(G,\lambda)}{|\Gamma_k(G,\lambda)|}$ est une racine 8-ème de l'unité [20, §2]. On définit alors

$$\sigma_k(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}\ \Gamma_k(G, \lambda) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \text{si } \Gamma_k(G, \lambda) \neq 0 \\ \infty & \text{si } \Gamma_k(G, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Soit $\overline{\mathbb{Z}}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Il s'agit du monoïde obtenu en adjoignant au groupe cyclique à 8 éléments un élément supplémentaire noté ∞, avec la règle $\infty + a = a + \infty = \infty = \infty + \infty$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Comme les sommes de Gauss ci-dessus sont multiplicatives sur les sommes orthogonales, chaque σ_k

définit un homomorphisme de monoïdes $\mathfrak{M} \to \overline{\mathbb{Z}}_8$. Chaque enlacement λ donne ainsi lieu à une application $\sigma(\lambda)\colon \mathbb{N}^\times \to \overline{\mathbb{Z}}_8,\ k \mapsto \sigma_k(\lambda)$. On peut ainsi à nouveau regrouper les invariants ρ_k et σ_k sous la forme d'une seule application $(\rho,\sigma)\colon \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$. Le résultat principal de classification par invariants est dû à E. Burger et sous la forme ci-dessous, à A. Kawauchi et S. Kojima [11, Théorème 4.1].

Proposition 2 *Soit (G,λ) un enlacement sur un 2-groupe fini. Le système d'invariants $\mathcal{S} = (\rho(\lambda), \sigma(\lambda))$ détermine la classe d'isomorphisme de (G,λ).*

Là encore, il est aisé de se rendre compte que le système $\mathcal{S}$ est minimal.

2.2 Le monoïde des enlacements

Soit $\mathcal{M}$ un monoïde additif et I un suite d'entiers consécutifs. Un tableau est une application $I \to \mathcal{M}$, qu'il sera pratique de considérer comme un diagramme de la forme

I	k	$k+1$	$\dots$	l
$\mathcal{M}$	m_k	m_{k+1}	$\dots$	m_l

Afin de simplifier la notation, les notations de l'intervalle ainsi que du monoïde seront omises des tableaux suivants. La longueur d'un tableau T est l'entier $1 + \sup_{(m,n)\in I\times I} |m-n| \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Un tableau T' est un prolongement d'un tableau T si T' prolonge T en tant qu'application. Dans ce cas, T est un tableau extrait de T. Étant donné un tableau $T\colon I \to \mathcal{M}$ quelconque, on peut toujours le prolonger trivialement sur $\mathbb{N}$ entier en définissant $\tilde{T}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N} - I$. En pratique, on confondra un tableau T et son prolongement trivial $\tilde{T}$ à $\mathbb{N}$ ainsi défini. Ainsi on dira qu'un tableau T est *fini* s'il est de longueur finie ou s'il est le prolongement trivial $\tilde{T}'$ d'un tableau T' de longueur finie. (C'est la définition habituelle de support fini.) Comme $\mathcal{M}$ est un monoïde, l'addition de tableaux est bien définie. La somme de deux tableaux T_1 et T_2 est définie sur $\mathbb{N}$ par $T_1 + T_2 = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ où $\tilde{T}_i$, $i = 1, 2$, désigne le prolongement trivial à $\mathbb{N}$. L'ensemble des tableaux $\mathbb{N} \to \mathcal{M}$ forme un monoïde. L'élément neutre 0 est le tableau envoyant $\mathbb{N}$ sur 0. Le délimiteur à gauche (resp. à droite) d'un tableau $T\colon I \to \mathcal{M}$ est l'élément $-1 \le \operatorname{Inf} I - 1 < \infty$ (resp. l'élément $0 \le \operatorname{Sup} I + 1 \le \infty$).

Soit $f\colon \mathbb{N}^\times \to \mathcal{M}$ une application invariante sur les classes d'isomorphismes d'enlacements. Nous dirons qu'un tableau $T\colon I \to \mathcal{M}$ est *admissible* s'il existe un enlacement (G,λ) tel que $f(m) = T(m)$ pour tout $m \in I$.

2.2.1 Cas $p \neq 2$

Nous commençons par le cas, techniquement plus simple, des enlacements sur un p-groupe avec p premier impair. Nous considérons le système d'invariants (ρ, σ); les tableaux correspondants sont donc à valeurs dans le monoïde $\mathcal{M} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \{\pm 1\}$. Nous avons vu (§2.1) que $\rho_k(\lambda) = 0$ implique $\sigma_k(\lambda) = 1$. Une condition nécessaire d'admissibilité d'un tableau $T = (r(m), s(m))_{m \in \mathbb{N}^\times}$ est donc

$$\text{Pour tout } m \in \mathbb{N}^\times, \quad r(m) = 0 \Longrightarrow s(m) = 1. \tag{2}$$

Théorème 1 *Soit p premier distinct de 2. Alors un tableau fini $T = (r, s)$ est admissible pour un enlacement sur un p-groupe si et seulement si la condition (2) est vérifiée.*

Le Théorème 1 est basé sur l' observation suivante: si le rang $\rho_k(\lambda)$ est fixé, alors la classe d'isomorphisme de λ_k dans (1) détermine et est déterminée par $\sigma_k(\lambda_k) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.2.2 Cas $p = 2$

Considérons à présent les enlacement sur les 2-groupes. Les tableaux sont à valeurs dans le monoïde $\mathcal{M} = \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$, que nous noterons $T\colon\ m \mapsto (r(m), s(m))$, avec $r(m) \in \mathbb{N}$ (rang formel) and $s(m) \in \overline{\mathbb{Z}}_8$ (signature formelle). Nous dirons qu'un tableau est *admissible* s'il existe un enlacement (G, λ) sur un 2-groupe tel que $r(m) = \rho_m(\lambda)$ et $s(m) = \sigma_m(\lambda)$ pour tout $m \in I$.

Un entier $m \in I$ sera dit *régulier* pour un tableau T si $r(m) = 0$ ou $s(m) \neq \infty$. On note $I_{\mathrm{reg}} \subseteq I$ l'ensemble des éléments réguliers de T. Présentons quatre types particuliers distincts de tableaux:

- Type T_0. Tout tableau de longueur impaire de la forme $T = (0, s(m))_{m \in I}$.
- Type T_1. Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|}\hline m \\ \hline 1 \\ \hline \infty \\ \hline\end{array}$ pour un entier non nul m.
- Type T_2. Tout tableau de la forme $\begin{array}{|c|}\hline m \\ \hline 2 \\ \hline \infty \\ \hline\end{array}$ pour un entier non nul m.
- Type T_3. Tout tableau de longueur impaire tel que $I = I_{\mathrm{reg}}$.

Le résultat principal est un critère nécessaire et suffisant pour qu'un tableau soit admissible.

Théorème 2 *Un tableau fini* $T\colon \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8,\ m\mapsto (r(m),s(m))$ *est admissible si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(1) $r(I_{\mathrm{reg}}) \subseteq 2\mathbb{N}$.

(2) $s(m) = \sum_{k\geq m+1} r(k) \pmod 2$ *pour tout* $m\in I_{\mathrm{reg}}$.

(3) $s(m)+s(m+1) = 2\sum_{k\geq m+2} r(k) \pmod 4$ *pour tout* $\{m,m+1\}\subseteq I_{\mathrm{reg}}$.

(4) *Pour tout tableau* T_{ext} *extrait de* T *et pour toute paire de délimiteurs* m,n *de* T_{ext} *dans* I_{reg}*, les conditions suivantes sont vérifiées:*

Type de T_{ext}	T_0	T_1	T_2	T_3
$s(m)-s(n)$	0	±1	$0,\pm2$	$0,4$

Compte-tenu du fait que le groupe d'un enlacement est fini, il est aisé d'observer sur le rang et la signature que tout tableau admissible est fini. Ceci garantit en particulier que les sommes intervenant dans les conditions (2) et (3) sont finies. (En particulier, la condition (2) implique que $s(m)\neq\infty$ dès que $r(m)=0$: les entiers réguliers m de T sont exactement les entiers m tels que $s(m)\neq\infty$.) De manière générale, la nécessité des conditions énoncées dans le Théorème 2 est une conséquence de calculs classiques d'enlacements et de sommes de Gauss. La preuve de la suffisance est constructive et sera donnée en §6.

Notons $\mathfrak{T}$ le monoïde constitué des tableaux $T\colon \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8$. On déduit du Théorème 2 que la somme de deux tableaux admissibles est encore un tableau admissible, de sorte que le sous-ensemble des tableaux admissibles constitue un sous-monoïde $\mathfrak{T}^{\mathrm{adm}}$ de $\mathfrak{T}$. Puisque ρ,σ sont des invariants complets du monoïde $\mathfrak{M}$ des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes, l'application $(\rho,\sigma)\colon \mathfrak{M}\to\mathfrak{T}$ est injective. Il en résulte la description combinatoire de $\mathfrak{M}$ ci-dessous.

Corollaire 2.1 *Le monoïde* $\mathfrak{M}$ *des classes d'isomorphismes d'enlacements sur les 2-groupes est isomorphe au sous-monoïde* $\mathfrak{T}^{\mathrm{adm}}$ *des tableaux admissibles.*

Les Théorèmes 1 et 2 ensemble donnent ainsi une présentation combinatoire complète du monoïde $\mathfrak{E}$ des enlacements.

Le Théorème 2 permet de calculer le nombre de classes d'isomorphismes d'enlacement ayant un rang ou une signature donné, tout au moins théoriquement. Je ne connais pas de formule explicite. Les quelques remarques suivantes peuvent être utiles. Tout d'abord, on peut définir deux applications "profil" par

$\mathrm{profil}_\rho(\lambda) = (k, \rho_k(\lambda))_{k\geq 1}$ et $\mathrm{profil}_\sigma(\lambda) = (k, \sigma_k(\lambda))_{k\geq 1}$ et étudier les fibres de ces applications. Y a-t-il en particulier des fibres "génériques" ? L'approche la plus encourageante semble être l'étude des fibres de profil_ρ. Plus globalement, définissons alors l'application Profil par

$$\mathrm{Profil}(\lambda) = \{k \in \mathbb{N} \mid \rho_k(\lambda) \neq 0\}.$$

Est-il possible de classifier $\mathfrak{M}$ à partir des fibres de Profil ? Dans ce contexte, les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 de [11] s'interprètent comme la classification des fibres $\mathrm{Profil}^{-1}(\{k\})$, $k \geq 1$ et la proposition 5.2 de [11] comme le calcul du groupe de Witt $W(\mathrm{Profil}^{-1}(\{k\}))$.

On a déjà observé que la décomposition orthogonale d'un enlacement sur un 2-groupe n'est pas unique, même à isomorphisme près des facteurs (et même pour un 2-groupe homogène, c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de copies d'un groupe cyclique). On peut cependant montrer que tout enlacement sur un 2-groupe homogène admet une forme "normale" qui est unique: voir [11, §3] et [16, §3]. R. Miranda a en fait montré qu'il existe une forme normale pour un enlacement sur un 2-groupe quelconque [16, §4].

3 La reconnaissance d'un facteur orthogonal dans un enlacement

Considérons à présent la question de reconnaître si un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ, c'est-à-dire s'il existe un enlacement λ" tel que

$$\lambda = \lambda' \oplus \lambda\text{''}.$$

Décrivons tout d'abord des conditions nécessaires simples pour qu'une telle décomposition orthogonale existe. Il est clairement nécessaire que

$$\rho_k(\lambda) \geq \rho_k(\lambda') \text{ pour tout } k \geq 1. \tag{3}$$

Une seconde condition nécessaire résulte du comportement de σ sur les sommes orthogonales. Dans le cas $p \neq 2$, au vu du Théorème 1, il existe toujours un enlacement sur un p-groupe de signature formelle prescrite pourvu que le rang formel soit non nul. On en déduit:

Théorème 3 *Soit (G, λ) un enlacement sur un p-groupe fini. L'enlacement λ' est un facteur orthogonal de λ si et seulement si*

$$\text{pour tout } k \geq 1, \quad \begin{cases} \rho_k(\lambda') < \rho_k(\lambda), \text{ ou} \\ \rho_k(\lambda') = \rho_k(\lambda) \text{ and } \sigma_k(\lambda') = \sigma_k(\lambda). \end{cases}$$

Dans le cas $p=2$, l'additivité de σ implique

$$\sigma_k(\lambda') = \infty \implies \sigma_k(\lambda) = \infty, \quad \text{pour tout } k \geq 1. \tag{4}$$

Supposons à présent ces conditions (3) et (4) vérifiées. Soit $E(\lambda')$ l'ensemble des applications de $\{m \in \mathbb{N}^\times \mid \sigma_m(\lambda') = \infty\}$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_8$. Nous allons associer à (λ, λ') un ensemble

$$S_{\lambda,\lambda'} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}_8}$$

de tableaux. Pour $a \in E(\lambda')$, nous définissons le tableau $T_a = (r_a, s_a)\colon \mathbb{N}^\times \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$ par

$$\begin{array}{rcl} r_a(k) & = & \rho_k(\lambda) - \rho_k(\lambda') \\ s_a(k) & = & \left\{ \begin{array}{cl} a(k) & \text{si } \sigma_k(\lambda') = \infty \\ \sigma_k(\lambda) - \sigma_k(\lambda') & \text{si } \sigma_k(\lambda') \neq \infty \end{array} \right. \end{array} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^\times. \tag{5}$$

Le tableau T_a est bien défini grâce à la condition (3) et au fait que ∞ est le seul élément non inversible dans $\overline{\mathbb{Z}}_8$.

Théorème 4 *Un enlacement λ' est un facteur orthogonal d'un enlacement λ si et seulement si les conditions* (3) *et* (4) *ci-dessus sont vérifiées et s'il existe un tableau admissible $T \in S_{\lambda,\lambda'}$.*

Démonstration Si $\lambda = \lambda' \oplus \lambda''$, on vérifie que le tableau

$$T_{\lambda''} = (\rho_k(\lambda''), \sigma_k(\lambda''))_{k \in \mathbb{N}^\times}$$

d'invariants associé à λ'' est dans $S_{\lambda,\lambda'}$. Réciproquement, si T est admissible, d'après le Théorème 2, il existe un enlacement λ'' dont $T = T_{\lambda''} = (\rho_k(\lambda''), \sigma_k(\lambda''))_{k \in \mathbb{N}^\times}$ est le tableau des invariants. On vérifie immédiatement la relation suivante, au niveau des tableaux d'invariants, respectivement de λ, λ' et λ'':

$$T_\lambda = T_{\lambda'} + T_{\lambda''} = T_{\lambda' \oplus \lambda''},$$

où la dernière égalité résulte de l'additivité des invariants ρ et σ sur les sommes orthogonales. L'application qui à (une classe d'isomorphisme d') un enlacement associe ses invariants (ρ, σ) étant injective (Proposition 2), on conclut que $\lambda = \lambda' \oplus \lambda''$. □

4 Le monoïde des formes quadratiques

Considérons brièvement le cas plus général des formes quadratiques sur un groupe abélien fini. Une forme quadratique sur un groupe abélien fini G est une application $q\colon G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que $q(nx) = n^2 q(x)$ pour tout $(n,x) \in \mathbb{Z} \times G$ et telle que l'application $\lambda_q\colon G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par $\lambda_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ soit un enlacement. Les formes quadratiques $G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ayant le même enlacement associé sont en bijection avec $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Il en résulte que sur le facteur orthogonal G_{impair} des éléments d'ordre impair, les formes quadratiques sont déterminées par leur enlacement associé. Considérons alors les formes quadratiques sur les 2-groupes. Il résulte de [27, Th. 5] qu'une telle forme quadratique $q\colon G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est classifiée par les invariants $\rho_k(\lambda_q), \sigma_k(\lambda_q)$ associées à l'enlacement associé λ_q et un seul invariant supplémentaire, la somme de Gauss $\gamma(q) = \sum_{x\in G} \exp(2i\pi q(x)) \in \mathbb{C}$. Aussi la construction combinatoire à l'aide des tableaux est essentiellement la même: on considère maintenant le monoïde $\mathfrak{T}$ constitué des tableaux $(r,s)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$. Le tableau $T_q = (\rho, \sigma)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$ d'invariants associé à q est défini par

$$\rho_k(q) = \rho_k(\lambda_q) \text{ pour } k \geq 1 \quad \text{et} \quad \rho_0(q) = 0$$

et $$\sigma_0(q) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}\,(\gamma(q)) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \text{ et } \ \sigma_k(q) = \sigma_k(\lambda_q) \in \overline{\mathbb{Z}}_8 \text{ pour } k \geq 1.$$

(Noter que comme λ_q est non dégénérée, $\gamma(q) \neq 0$.) Avec cette modification, le Théorème 2, le corollaire 2.1 ainsi que le Théorème 4 s'étendent au cas quadratique. Nous obtenons en particulier le théorème suivant.

Théorème 5 *Le monoïde des formes quadratiques sur les* 2*-groupes finis est isomorphe au sous-monoïde constitué des tableaux*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8, \ m \mapsto (r(m), s(m))$$

vérifiant $r(0) = 0$ *et* $s(0) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *ainsi que les conditions* (1) *à* (4) *du Théorème 2.*

Remarque Ce résultat donne une présentation globale du monoïde des formes quadratiques sur les groupes finis. En particulier, le Théorème 5 généralise les présentations connues du monoïde des formes quadratiques sur les 2-groupes de période 2 ou 4, voir [8, sec. 3.4.3, Th. 3.6.5]. Le monoïde des formes quadratiques sur les 2-groupes de période 2 permet de classifier les surfaces immergées à homotopie régulière près [19, Th. 4].

Si l'on appelle un tableau admissible un tableau vérifiant les conditions du Théorème 5, le Théorème 4 plus haut se généralise mutatis mutandis aux formes quadratiques.

5 Quelques applications

Étant donnée une variété orientée M de dimension $4n-1$, on note λ_M son enlacement sur $\mathrm{Tors}\, H^{2n}(M)$.

5.1 Lenticulaires et facteurs d'enlacements

Proposition 3 *Soit $f\colon M \to X$ une application de degré d entre deux variétés différentiables fermées orientées connexes de dimension $4n-1$. Alors $d \cdot \mathrm{Ker}\,\big(f^*\colon \mathrm{Tors}\, H^{2n}(X) \to \mathrm{Tors}\, H^{2n}(M)\big) = 0$. En particulier, si d est premier avec l'exposant de $\mathrm{Tors}\, H^{2n}(M)$, alors l'enlacement λ_X est un facteur orthogonal de λ_M.*

Démonstration La naturalité en cohomologie fournit la relation $\lambda_M \circ (f^* \times f^*) = d\ \lambda_X$. Ceci implique la première affirmation. Si d est premier avec l'exposant de Tors $H^{2n}(M)$, alors l'application f^* est injective. Donc $f^*(\mathrm{Tors}\, H^{2n}(X))$ est un sous-groupe de Tors $H^{2n}(M)$ sur la restriction duquel λ_M est non-singulier. Le résultat s'ensuit. □

Sur les 3-variétés elliptiques, on peut montrer une réciproque. En particulier, on a le résultat suivant [10].

Théorème 6 *Il existe une application $f\colon M \to L(n,p)$ de degré 1 d'une 3-variété fermée orientée sur un espace lenticulaire si et seulement si λ_M contient l'enlacement de $L(n,p)$ comme facteur orthogonal. En particulier, l'un des facteurs orthogonaux de λ_M est cyclique.*

Nous allons utiliser ce dernier résultat pour décrire certaines 3-variétés admettant (resp. n'admettant pas) des applications de degré 1 sur des lenticulaires prescrits (resp. proscrits).

Le premier résultat est une généralisation de [11, Prop. 6.1], simple conséquence du Théorème 6.

Proposition 4 *S'il existe une application $L(n,m)\#L(n,m') \to X^3$ de degré 1 où X se plonge de façon lisse dans S^4, alors n est impair et $L(n,m)$ et $-L(n,m')$ ont le même type d'homotopie orientée.*

On se propose maintenant de déterminer à quelles conditions une 3-variété M fermée orientée admet une application de degré 1 sur *tout* lenticulaire dont le groupe fondamental π est fixé. Il résulte des considérations précédentes qu'il suffit de considérer le cas où l'ordre de π est une puissance d'un nombre premier p. Si p est impair, il faut et il suffit que $H_1(M)$ ait un facteur orthogonal isomorphe à une somme d'au moins deux copies de π. Dans le cas où $p = 2$ et $\pi = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ avec $k \geq 3$, on peut donner une réponse complète en utilisant le Théorème 4. Étant donné un intervalle fini I de $\mathbb{N}$ et $a \in I$, le symétrique I' de I est défini par $a + k \in I'$ si et seulement si $a - k \in I$. Étant donné un tableau fini $T : I \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$ et $a \in I$, son *symétrique* par rapport à a est le tableau $T' : I' \to \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{Z}}_8$ où I' est le symétrique de T par rapport à a et $T'(a + k) = T(a - k)$ pour tout $k \in \{k \in \mathbb{N} \mid a + k \in I'\}$.

Considérons la liste $\mathfrak{L}$ ci-dessous de tableaux $T\colon\ I \to \mathbb{N}\times\overline{\mathbb{Z}}_8,\ m \mapsto (r(m), s(m))$. Le symbole $\mathbb{N}$ désigne un entier positif ou nul arbitraire et $\overline{\mathbb{Z}}_8$ un élément arbitraire de $\overline{\mathbb{Z}}_8$.

k
$r(k) \geq 4$
∞

,

$k-1$	k	$k+1$
0	3	0
$s(k-1)$	∞	$s(k+1)$

avec $s(k-1) - s(k+1) = \pm 1$,

$k-1$	k
$r(k-1) \geq 1$	3
$\overline{\mathbb{Z}}_8$	∞

,

$k-2$	$k-1$	k
$r(k-2) \geq 1$	0	3
$\overline{\mathbb{Z}}_8$	$\mathbb{Z}_8$	∞

,

$k-1$	k
$r(k-1) \geq 1$	2
∞	∞

,

$k-1$	k	$k+1$
$r(k-1) \geq 2$	1	$r(k+1) \geq 1$
$\overline{\mathbb{Z}}_8$	∞	∞

,

$k-2$	$k-1$	k	$k+1$
$r(k-2) \geq 1$	$\mathbb{N}$	1	$r(k+1) \geq 1$
∞	$\overline{\mathbb{Z}}_8$	∞	∞

.

Théorème 7 *Soit $k \geq 3$. Une 3-variété M fermée orientée admet une application de degré 1 sur* tout *lenticulaire dont le groupe fondamental π est $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ si et seulement si l'un des tableaux de la liste $\mathfrak{L}$, ou son symétrique par rapport à k, est un tableau extrait du tableau $T = (\rho_k(\lambda_M), \sigma_k(\lambda_M))_{k\in\mathbb{N}^*}$.*

Démonstration Vérifier que si T prolonge l'un des tableaux de L alors M admet une application de degré 1 sur tout lenticulaire $L(2^k, a)$ ne pose pas de problème particulier. Pour la réciproque, on utilise le Théorème 4 en distinguant les cas $\rho_k(\lambda_M) \geq 4$, $\rho_k(\lambda_M) = 3$, 2 ou 1. $\square$

Exemple Soit $a, b, c > 0$. Pour un entier $n \geq 1$ et une variété M, on note $n\ M$ la somme connexe $M\# \dots \#M$ (n fois). La 3-variété

$$a\ L(16, \alpha)\#b\ L(32, \beta)\#c\ L(64, \gamma)$$

admet une application de degré 1 sur chaque lenticulaire L tel que $\pi_1(L) = \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- $b \geq 4$;
- $b = 2$ et $a + c \geq 1$;
- $b = 1$ et $a + c \geq 3$ et $ac \geq 2$.

Dans une autre direction, nous avons le résultat suivant.

Théorème 8 (Le lenticulaire proscrit) *Soit s un entier impair. Il existe une infinité de 3-variétés irréductibles (hyperboliques) distinctes admettant une application de degré 1 sur chaque lenticulaire $L(16, r)$ pour $r \not\equiv s \mod 8$ et aucune application de degré 1 sur $L(16, s)$.*

La démonstration de ce dernier résultat fait l'objet de la section §6.3.

5.2 Raffinements spinoriels et facteurs quadratiques

Soit M une 3-variété fermée orientée connexe. Il est connu que le fibré tangent de M est trivial. Une parallélisation de M est le choix d'une trivialisation τ de son fibré tangent T_M (considéré à homotopie près). Le groupe $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ agit librement et transitivement sur l'ensemble des parallélisations de M. Dans la suite de ce paragraphe, les groupes et les actions seront notés multiplicativement. Une structure spin sur M est la donnée d'une trivialisation de T_M sur son 1-squelette qui s'étend au 2-squelette, considérée à homotopie près. Il est clair que par restriction au 1-squelette, une trivialisation t détermine une structure spin. Réciproquement, si une trivialisation s'étend au 2-squelette de M alors elle s'étend en une trivialisation de T_M. À toute structure spin s de M, on sait associer de façon canonique et naturelle une forme quadratique $q_s\colon \operatorname{Tors} H^2(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dont la forme bilinéaire associée est λ_M (voir [13] [17]). Le groupe $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ agit aussi sur les formes quadratiques $\operatorname{Tors} H^2(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ via le Bockstein $\beta\colon H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \operatorname{Tors} H^2(M)$. L'action explicite est donnée par la formule $(h\cdot q)(x) = q(x)+\lambda_M(\beta h, x)$ pour tout $h \in H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $x \in \operatorname{Tors} H^2(M)$. On vérifie qu' elle est transitive. Elle est de plus libre si M est une sphère d'homologie rationnelle. L'application $s \mapsto q_s$ ci-dessus est $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-équivariante en ce sens que

$$q_{h\cdot s} = h \cdot q_s, \quad h \in H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Si M est une 3-sphere d'homologie rationnelle, alors $s \mapsto q_s$ est bijective.

Théorème 9 *Soient M, X deux 3-sphères d'homologie rationnelle orientées munies de structures spin s_M et s_X respectivement. On suppose que X a le type d'homotopie d'un lenticulaire. Alors il existe une application $f\colon M \to X$ de degré un telle que $f^*(s_X) = s_M$ si et seulement si q_{s_X} est un facteur orthogonal de q_{s_M}.*

Démonstration Supposons l'existence de l'application f de degré un comme dans l'énoncé. La naturalité de l'application $s \mapsto q_s$ fournit la relation $q_{f^*s_X} = f^*q_{s_X} = q_{s_X} \circ f^* = q_{s_M}$. On conclut alors par Prop. 3 (avec $d = 1$). Pour la réciproque, par hypothèse, on a une décomposition orthogonale de la forme $q_{s_M} = q_{s_X} \oplus q$. On peut construire un homomorphisme $\phi\colon H^2(M) \to H^2(X)$ tel que $q_{s_X} \circ \phi = q_{s_M}$ et induit par un homomorphisme $\pi_1(M) \to \pi_1(X)$ (par dualité de Poincaré). Puisque $\pi_2(X) = 0$ et dim $X = 3$, l'application naturelle $[M, X] \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \pi_1(X))$ est surjective (voir par exemple [28, démonstration du théorème (4.3)]). Il existe donc une application $f\colon M \to X$ induisant ϕ. Par transitivité de l'action, il existe $h \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tel que

$$f^*(s_X) = h \cdot s_M. \tag{6}$$

En appliquant $s \mapsto q_s$ à l'égalité (6), nous obtenons que

$$q_{f^*s_X} = q_{h \cdot s_M} = h \cdot q_{s_M}. \tag{7}$$

Or

$$q_{f^*s_X} = f^*q_{s_X} = q_{s_X} \circ f^* = q_{s_X} \circ \phi = q_{s_M}. \tag{8}$$

On en conclut que $q_{s_M} = h \cdot q_{s_M}$ d'où $h = 1$. □

Remarque Le résultat du Théorème 9 reste vrai en remplaçant spin par spin^c. La démonstration est essentiellement la même (en utilisant [6]), la différence étant que les fonctions quadratiques peuvent ne pas être homogènes. Voir à ce sujet §7, question 3.

Notons deux conséquences du Théorème 9. La première utilise le résultat principal de [7] relatif à la fonction de torsion de Turaev–Reidemeister [25]. La fonction de Turaev–Reidemeister classifie les structures spin^c des lenticulaires [24, §9.2]. Le résultat suivant montre qu'elle est utile aussi dans l'étude des applications de degré un.

Corollaire 9.1 *La fonction de torsion T de Turaev-Reidemeister distingue l'existence ou non d'une application de degré un préservant les structures spin (ou spin^c) d'une 3-sphère d'homologie rationnelle M sur un lenticulaire L.*

À l'aide du Théorème 9, on montre également que le Théorème 8 admet une version parallélisée. La vérification de ce fait est laissée au lecteur.

6 Démonstrations des Théorèmes 2 et 8

6.1 Résultats préliminaires

Notons $\mathfrak{M}$ le monoïde des (classes d'isomorphismes d') enlacements sur les 2-groupes. Présentons tout d'abord quelques enlacements particuliers. Nous adoptons la notation introduite dans [11]. Soit $k \geq 1$. Pour tout entier impair a, on note $A^k(a)$ l'enlacement sur $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ qui envoie $(1 \bmod 2^k,\ 1 \bmod 2^k)$ sur $\frac{a}{2^k} \bmod 1$. Sur $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$, on définit deux enlacements E_0^k $(k \geq 1)$ et E_1^k $(k \geq 2)$ comme suit:

$$\begin{array}{rcll} E_0^k((x,y),(x',y')) & = & \frac{xy'+x'y}{2^k} & \bmod 1 \\ E_1^k((x,y),(x',y')) & = & \frac{xx'+xy'+x'y+yy'}{2^k} & \bmod 1 \end{array}$$

pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$. Tout enlacement sur un 2-groupe fini est isomorphe à une somme orthogonale d'enlacements de type $A^k(a), E_0^k$, et de E_1^k, voir [27].

Le calcul suivant [11, Corollaire 2.2] est utile.

Lemme 1 *Pour tout $k \geq 1$, $\sigma_k : \mathfrak{M} \to \overline{\mathbb{Z}}_8$ est l'unique homomorphisme vérifiant les propriétés suivantes:*

- $\sigma_k(A^l(m)) = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} & \textit{si } l-k \textit{ is impair et positif} \\ m & \textit{if } l-k \textit{ is pair et positif} \\ \infty & \textit{si } l = k \\ 0 & \textit{si } l < k \end{cases}$
- $\sigma_k(E_0^l) = 0,$
- $\sigma_k(E_0^l) = \begin{cases} 4 & \textit{si } l-k \textit{ is impair et positif} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Nous avons donc, pour tout $k < l$, les égalités suivantes dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcccl} \sigma_k(A^l(m)) & = & 1 \bmod 2 & = & \rho_k(A^l(m)) \\ \sigma_k(E_0^l) & = & 0 \bmod 2 & = & \rho_k(E_0^l) \\ \sigma_k(E_1^l) & = & 0 \bmod 2 & = & \rho_k(E_1^l) \end{array}$$

Comme les invariants σ_k et ρ_k sont additifs sur $\oplus$, on en déduit:

Lemme 2 *Soit λ un enlacement sur un $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Pour tout $k < l$, $\sigma_k(\lambda) = \rho_l(\lambda) \bmod 2$.*

En vue du Théorème 2, nous avons besoin de la formule de congruence modulo 4 suivante.

Lemme 3 *Soit $k, k+1$ deux éléments réguliers pour un enlacement sur un $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Alors*

$$\sigma_k(\lambda) + \sigma_{k+1}(\lambda) = 2\ \rho_k(\lambda) \bmod 4. \tag{9}$$

Démonstration D'après le lemme 1, $\sigma_k(A^l(m)) + \sigma_k(A^l(m)) = m + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \equiv 2 \bmod 4$ (car m est impair) et $\sigma_k(E_0^l) + \sigma_k(E_0^l) \equiv \sigma_k(E_1^l) + \sigma_k(E_1^l) \bmod 4 \equiv 0 \bmod 4$. □

Remarquons une autre conséquence utile du lemme 1. Puisque les facteurs orthogonaux cycliques sont les $A^k(m)$, le lemme 1 permet de détecter la présence d'un tel facteur dans une décomposition orthogonale:

Lemme 4 *Un enlacement λ admet un facteur orthogonal cyclique de type $A^k(m)$ si et seulement si $\sigma_k(\lambda) = \infty$.*

6.2 Démonstration du Théorème 2

Necessité Soit λ un enlacement sur un 2-groupe G fini. On vérifie que son tableau d'invariants est fini: soit N l'exposant de G, par définition, $\rho_k(\lambda) = 0$ dès que $k > N$; et nous avons aussi $\sigma_k(\lambda) = 0$ dès que $k > N$ d'après le lemme 1. Choisissons maintenant une décomposition orthogonale $(G, \lambda) = \oplus_m (G_m, \lambda_m)$. Soit k un élément régulier pour le tableau d'invariants associé à λ. Alors le facteur orthogonal (G_k, λ_k) ne contient pas de facteur orthogonal cyclique (c'est-à-dire un $A^k(m)$): sinon $\sigma_k(\lambda_k) = \infty$ par le lemme 4, contredisant le fait que k est régulier. Ainsi (G_k, λ_k) est une somme orthogonale de copies de E_0^k et de E_1^k. Puisque $\rho_k(E_0^k) = \rho_k(E_1^k) = 2$, la condition (1) en résulte. L'additivité de σ_k sur $\oplus$ et le lemme 1 impliquent $\sigma_k(\lambda) = \sum_{m \geq k+1} \sigma_k(\lambda_m)$. On en déduit, avec le lemme 2, la condition (2). Un argument tout à fait similaire à partir du lemme 3 conduit à la condition (3). Vérifions à présent la condition (4). On observe tout d'abord que tous les tableaux des types donnés ont une longueur impair. Aussi les délimiteurs $m < n$ vérifient $m = n \bmod 2$, de sorte que $\sigma_m(\lambda) - \sigma_n(\lambda) = \sum_{m<k<n} = \sigma_m(\lambda_k)$ d'après le lemme 1. La suite des vérifications pour la condition (4) est directe.

Dans la démonstration de la suffisance ci-dessous, si C est un entier positif ou nul et λ un enlacement, afin d'alléger les notations, on note $C \cdot \lambda$ pour désigner la somme orthogonale de C copies de l'enlacements λ.

Suffisance La démonstration se fait par récurrence sur la longueur du tableau T. Soit T un tableau de longueur 1 vérifiant les conditions (1) à (4). Soit m l'unique élément de I. Si m est régulier, alors la condition (1) impose que $r(m) = 0 \bmod 2$. On peut alors prendre comme enlacement une somme orthogonale de $\frac{r(m)}{2}$ copies de E_0^m. Si m n'est pas régulier et $r(m) = 0$, alors $s(m) = 0 \bmod 2$ d'après la condition (2) et donc on peut prendre comme enlacement l'enlacement trivial. Si $s(m) = \infty$, alors on peut prendre comme enlacement $A^m(1) \oplus (r(m) - 1)\ E_0^k$. Supposons avoir montré qu'un tableau

$$T\colon\ I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq k+1\} \to \mathbb{N} \times \overline{\overline{\mathbb{Z}}}_8$$

satisfaisant les conditions (1) à (4) est admissible pour un enlacement $(G, \lambda) = \oplus_{l \geq k+1}(G_l, \lambda_l)$ où chaque (G_l, λ_l) est un enlacement sur un $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$-module libre. Nous allons montrer que tout tableau $T'\colon\ \{k\} \cup I \to \mathbb{N} \times \overline{\overline{\mathbb{Z}}}_8$ qui prolonge T et qui vérifie les conditions (1) à (4) est admissible.

Si k n'est pas régulier alors on pose $\lambda_k = r(k) \cdot A^k(1)$. On vérifie sans peine que T' est admissible pour l'enlacement $\lambda \oplus \lambda_k$.

On suppose à présent que k est régulier. Par la condition (1), $r(k) = 0 \bmod 2$. Posons $\lambda_k = \frac{r(k)}{2} \cdot E_0^k$. Clairement $\rho_k(\lambda_k) = r(k)$. Posons aussi $\lambda' = \lambda_k \oplus \lambda$. Il y a trois cas à considérer.

Cas 1 $k+1$ régulier, $r(k+1) = 0$. Si $k+2$ est régulier, alors

$$\begin{aligned} s(k) &= s(k+2) && \text{par la condition (4)} \\ &= \sigma_{k+2}(\lambda) && \text{d'après l'hypothèse de récurrence sur } \lambda \\ &= \sigma_k(\lambda) && \\ &= \sigma_k(\lambda') && \text{d'après le Lemme 1.} \end{aligned}$$

et T' est admissible pour l'enlacement λ'. Si $k+2$ n'est pas régulier, on applique la condition (3) au tableau T' et à l'enlacement λ' respectivement[1]:

$$\begin{aligned} s(k) + s(k+1) &\equiv 2 \sum_{l \geq k+2} r(l) \quad \bmod 4 \\ \sigma_k(\lambda') + \sigma_{k+1}(\lambda') &\equiv 2 \sum_{l \geq k+2} \rho_l(\lambda') \quad \bmod 4. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous avons $\sigma_{k+1}(\lambda') = \sigma_{k+1}(\lambda_k) + \sigma_{k+1}(\lambda) = \sigma_{k+1}(\lambda) = s(k+1)$. Similairement, pour tout $l \geq k+1$, $\rho_l(\lambda') = \rho_l(\lambda_k) + \rho_l(\lambda) = \rho_l(\lambda) = r(l)$. Soustrayant l'une des égalités à l'autre dans (10), on déduit que $s(k) = \sigma_k(\lambda') \bmod 4$. Si

[1]On utilise l'implication du Théorème 2 déjà démontrée ci-dessus ("nécessité") pour appliquer la condition (3) à λ'.

$s(k) = \sigma_k(\lambda')$ mod 8, alors par définition, T' est admissible pour λ'. Sinon $s(k) = \sigma_k(\lambda') + 4$ mod 8. Puisque $\sigma_{k+2}(\lambda) = \infty$, par le lemme 4, λ_{k+2} a un facteur orthogonal cyclique qui est $A^{k+2}(m)$ pour un certain entier impair m. Notons λ'_{k+2} le même enlacement que λ_{k+2} mais en remplaçant ce facteur orthogonal cyclique par $A^{k+2}(m+4)$. Il résulte alors du lemme 1 que $\sigma_{k+1}(\lambda'_{k+2}) = \sigma_{k+1}(\lambda_{k+2})$. Par conséquent, T est aussi admissible pour l'enlacement $\lambda_{k+1} \oplus \lambda'_{k+2} \oplus \bigoplus_{l \geq k+3} \lambda_l$. Posons

$$\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda_{k+1} \oplus \lambda'_{k+2} \oplus \bigoplus_{l \geq k+3} \lambda_l.$$

On vérifie alors

$$\begin{aligned}
s(k) &= \sigma_k(\lambda') + 4 \\
&= \sigma_k\Big(\lambda_k \oplus \lambda_{k+1} \oplus \lambda_{k+2} \oplus \bigoplus_{l \geq k+3} \lambda_l\Big) + 4 \\
&= \sigma_k(\lambda_k) + \sigma_k(\lambda_{k+1}) + \sigma_k(\lambda_{k+2}) + 4 + \sigma_k\Big(\bigoplus_{l \geq k+3} \lambda_l\Big) && \text{par additivité de } \sigma_k \\
&= \sigma_k(\lambda_k) + \sigma_k(\lambda_{k+1}) + \sigma_k(\lambda'_{k+2}) + \sigma_k\Big(\bigoplus_{l \geq k+3} \lambda_l\Big) && \text{d'après le Lemme 1} \\
&= \sigma_k(\lambda'') && \text{par additivité de } \sigma_k
\end{aligned}$$

donc le tableau T' est admissible pour λ''.

Cas 2 $k+1$ régulier, $r(k+1) \neq 0$. Le même argument que précédemment donne $s(k) = \sigma_k(\lambda')$ mod 4. Si l'égalité est vraie modulo 8, alors T' est admissible pour λ'. Sinon $s(k) = \sigma_k(\lambda') + 4$ et on procède de la façon suivante. Puisque $\sigma_{k+1}(\lambda) \neq \infty$, par le lemme 4, λ_{k+1} n'a pas de facteur orthogonal cyclique. Donc il existe $s, t \in \mathbb{N}$ tels que $\lambda_{k+1} = s\ E_0^{k+1} \oplus t\ E_1^{k+1}$. Définissons

$$\lambda'_{k+1} = \begin{cases} (s+1) \cdot E_0^{k+1} \oplus (t-1) \cdot E_1^{k+1} & \text{si } t > 0 \\ (s-1) \cdot E_0^{k+1} \oplus E_1^{k+1} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Le Lemme 1 implique que $\sigma_k(\lambda'_{k+1}) = \sigma_k(\lambda_{k+1}) + 4$. De plus, $\sigma_{k+1}(\lambda'_{k+1}) = \sigma_{k+1}(\lambda_{k+1})$, de sorte que T est admissible pour l'enlacement $\lambda'_{k+1} \oplus \bigoplus_{l \geq k+2} \lambda_l$.

Posons

$$\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda'_{k+1} \oplus \bigoplus_{l \geq k+2} \lambda_l.$$

Alors une vérification similaire à celle du cas précédent montre que $s(k) = \sigma_k(\lambda'')$. Ainsi le tableau T' est admissible pour λ''.

Cas 3 $k+1$ n'est pas régulier. Appliquons la condition (2) à T et λ' respectivement:

$$\begin{aligned} s(k) &\equiv \sum_{l\geq k+1} s(l) \mod 2 \\ \sigma_k(\lambda') &\equiv \sum_{l\geq k+1} \rho_l(\lambda') \mod 2 \end{aligned} \tag{11}$$

Nous avons $\sigma_{k+1}(\lambda') = \sigma_{k+1}(\lambda_k) + \sigma_{k+1}(\lambda) = \sigma_{k+1}(\lambda) = s(k+1)$. De même, pour $l \geq k+1$, $\rho_l(\lambda') = \rho_l(\lambda_k) + \rho_l(\lambda) = \rho_l(\lambda) = r(l)$. Soustrayant l'une des égalités (11) à l'autre, on déduit que $s(k) = \sigma_k(\lambda')$ mod 2. Si cette dernière égalité reste vraie modulo 8, alors T' est admissible pour λ'. Si $s(k) = \sigma_k(\lambda') \pm 2$, on procède de la façon suivante. Puisque $\sigma_{k+1}(\lambda) = \infty$, d'après le lemme 4, λ_{k+1} a un facteur orthogonal cyclique $A^{k+1}(m)$, où m est un entier impair. Définissons λ'_{k+1} comme étant le même enlacement que λ_{k+1} mais en remplaçant ce facteur par $A^{k+1}(m+s(k)-\sigma_k(\lambda')) = A^{k+1}(m\pm 2)$. Alors $\sigma_k(\lambda'_{k+1}) = \sigma_k(\lambda_{k+1})$. Posons $\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda'_{k+1} \oplus \bigoplus \lambda_l$. Alors $s(k) = \sigma_k(\lambda'')$ et le tableau T' est admissible pour λ''. Ainsi il ne reste à considérer que le cas où $s(k) = \sigma_k(\lambda') + 4$. Il y a deux possibilités.

Possibilité 1 $s(k+2) = \infty$. Le lemme 4 dit alors que λ_{k+2} a un facteur orthogonal cyclique $A^{k+2}(m)$ pour un certain entier impair m. Remplaçons le par $A^{k+2}(m+4)$ et renommons le nouvel enlacement λ'_{k+2}. Une vérification similaire à celle du Cas 1 montre que T' est admissible pour l'enlacement $\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda_{k+1} \oplus \lambda'_{k+2} \oplus \bigoplus_{l\geq k+3} \lambda_l$.

Possibilité 2 $s(k+2) \neq \infty$. Alors $r(k+1) \geq 2$: en effet, sinon $r(k+1) = 1$ ($k+1$ n'est pas régulier) et nous appliquons la condition (4) à T et λ' respectivement

$$\begin{aligned} s(k) - s(k+2) &= \pm 1 \\ \sigma_k(\lambda') - \sigma_{k+2}(\lambda') &= \pm 1 \end{aligned} \tag{12}$$

et on déduit $s(k) - \sigma_k(\lambda') = 0$ ou ± 2, une contradiction. On traite alors les deux cas séparément.

- Si $r(k+1) \geq 3$, alors on affirme que λ_{k+1} a un facteur orthogonal $S = E_0^{k+1}$ ou E_1^{k+1}. [Preuve: sinon λ_{k+1} a au moins trois facteurs orthogonaux cycliques $A^{k+1}(n_1)$, $A^{k+1}(n_2)$ et $A^{k+1}(n_3)$. Les relations (0.2) et (0.3) de [11] impliquent alors que les n_i sont deux à deux distincts dans $\{\pm 1, \pm 5\} = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il s'ensuit qu'il existe i, j tels que $n_j = n_i + 4$ mod 8. Après renumérotation, on peut supposer $i = 1, j = 2$. Mais alors, d'après [11, rel. (0.1)] $A^{k+1}(n_1) \oplus A^{k+1}(n_3) =$

$A^{k+1}(n_2) \oplus A^{k+1}(n_3+4)$ et donc $A^{k+1}(n_1) \oplus A^{k+1}(n_2) \oplus A^{k+1}(n_3) = 2\ A^{k+1}(n_2) \oplus A^{k+1}(n_3)$ et les deux premiers indices sont égaux à n_2, contradiction.] Nous posons alors

$$S' = \begin{cases} E_1^{k+1} & \text{si } S = E_0^{k+1} \\ E_0^{k+1} & \text{si } S = E_1^{k+1} \end{cases}$$

Désignons par λ'_{k+1} l'enlacement λ_{k+1} où l'on a remplacé S par S'. Alors $\sigma_{k+1}(\lambda_{k+1}) = \sigma_{k+1}(\lambda_{k+1}) + 4$. On conclut, comme dans le Cas 2, que T' est admissible pour l'enlacement $\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda'_{k+1} \oplus \bigoplus_{l \geq k+2} \lambda_l$.

- Si $r(k+1) = 2$, vu que d'après le lemme 4, λ_{k+1} admet déjà un facteur orthogonal cyclique, la seule possibilité est $\lambda_{k+1} = A^{k+1}(m) \oplus A^{k+1}(n)$ pour des éléments inversibles $m, n \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Nous affirmons que $m = n \bmod 4$. [Sinon, le lemme 1 donne $\sigma_k(\lambda') - \sigma_{k+2}(\lambda') = 0$ alors que la condition (4) appliquée à T' implique $s(k) - s(k+2) = 0$ ou ± 2. Soustrayant la première égalité à la seconde, on trouve $s(k) - \sigma_k(\lambda') = 0$ ou ± 2, contradiction.] Remplaçons alors dans λ_{k+1} les facteurs $A^{k+1}(m)$ et $A^{k+1}(n)$ par $A^{k+1}(m+4)$ et $A^{k+1}(n)$ respectivement. Notons λ'_{k+1} le nouvel enlacement qui en résulte. Alors d'après le lemme 1, $\sigma_k(\lambda_{k+1}) - \sigma_k(\lambda'_{k+1}) = 2\left((-1)^{\frac{m-1}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\right) = 4 \bmod 8$. Il s'ensuit que $\sigma_k(\lambda'_{k+1}) - s(k) = 0$. Définissons $\lambda'' = \lambda_k \oplus \lambda'_{k+1} \oplus \bigoplus_{l \geq k+2} \lambda_l$. Alors $s(k) = \sigma_k(\lambda'')$ et T' est admissible pour λ''. □

Remarque La démonstration est constructive. Si l'on suppose construit à l'étape k l'enlacement, alors on peut le construire à l'étape $k+1$. Il est possible de raffiner la construction de sorte que l'enlacement obtenu soit sous la forme normale décrite dans [16, §§3, 4].

6.3 Démonstration du Théorème 8

On note $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1, \pm 3 \bmod 8\}$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est bien connu que la classe d'isomorphisme de l'enlacement d'un lenticulaire $L(q, q')$ ne dépend que du résidu quadratique de q' modulo q. En particulier, si q est une puissance de 2, elle ne dépend que q modulo 8 (voir par exemple [26, p.69]). L'application $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ définie par

$$(r_1, r_2, r_3) \mapsto s = 4 - r_2 + (-1)^{\frac{r_1+1}{2}} + (-1)^{\frac{r_3+1}{2}} \bmod 8$$

est surjective. Considérons la 3-variété $M = L(8,r_1)\#L(16,r_2)\#L(32,r_3)$. Nous affirmons que M n'admet pas d'application de degré 1 sur $L(16,s)$ alors qu'elle admet une application de degré 1 sur chaque lenticulaire $L(16,r)$ pour $r \not\equiv s \bmod 8$. Pour le voir, posons $\lambda = \lambda_M$ et $\lambda' = A^5(r)$ (l'enlacement cyclique sur $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ envoyant $(1,1)$ sur $r/32 \bmod 1$). D'après le Théorème 4, nous avons à voir pour quel $r \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ il existe un tableau admissible dans $S_{\lambda,\lambda'}$. Puisque $\sigma_m(\lambda') = \infty$ si et seulement si $m = 4$, il y a 9 tableaux distincts dans $S_{\lambda,\lambda'}$. Tout tableau $T \in S_{\lambda,\lambda'}$ contient un sous-tableau extrait de la forme

1	2	3	4	5
0	0	1	0	1
$\sigma_1(\lambda) - \sigma_1(\lambda')$	$\sigma_2(\lambda) - \sigma_2(\lambda')$	∞	x	∞

où $x \in \overline{\mathbb{Z}}_8$. (Le tableau T entier s'obtient en prolongeant trivialement le tableau ci-dessus.) D'après les calculs de §§6.1, nous avons

$$\sigma_1(\lambda) - \sigma_1(\lambda') = r_1 + (-1)^{\frac{r_2-1}{2}} + r_3 - (-1)^{\frac{r-1}{2}} \bmod 8$$
$$\text{et}\quad \sigma_2(\lambda) - \sigma_2(\lambda') = (-1)^{\frac{r_1-1}{2}} + r_2 + (-1)^{\frac{r_3-1}{2}} - r \bmod 8.$$

Examinons alors les conditions du Théorème 2: il est aisé de constater qu'elles sont toutes remplies si et seulement si la dernière condition (4) est remplie, c'est-à-dire si et seulement si

$$x \equiv \pm 1 \bmod 8 \quad \text{et} \quad (\sigma_2(\lambda) - \sigma_2(\lambda')) - x \equiv \pm 1 \bmod 8.$$

(Ces deux conditions correspondent aux deux sous-tableaux distingués de type T_1 que l'on peut extraire du tableau T. Il s'agit des sous-tableaux $\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 1\\\hline \infty\\\hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|}\hline 5\\\hline 1\\\hline \infty\\\hline\end{array}$ respectivement.) Par conséquent, T est admissible si et seulement s'il existe $r \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ tel que

$$(-1)^{\frac{r_1-1}{2}} + r_2 + (-1)^{\frac{r_3-1}{2}} - r = \pm 1 \pm 1 \in \{0, \pm 2\} \subset \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Le seul cas où cette condition est mise en défaut (pour $r \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$) est quand $r = s(r_1,r_2,r_3) = 4 - r_2 + (-1)^{\frac{r_1+1}{2}} + (-1)^{\frac{r_3+1}{2}} \bmod 8$ comme défini plus haut. Notre affirmation en résulte. Pour finir, d'après le lemme 5, on peut chirurgiser M de manière à rendre M irréductible (en fait hyperbolique) et à préserver les propriétés ci-dessus. □

Lemme 5 *Soit X une variété connexe fermée orientée de dimension 3. Il existe une infinité de variétés M irréductibles (hyperboliques) ayant la même algèbre de cohomologie et même enlacement que X et admettant une application $M \to X$ de degré 1.*

Démonstration D'après un résultat de Myers [18], X contient un nœud nul-homotope K. Ceci implique que le complément d'un voisinage régulier de K est irréductible (hyperbolique). Le célèbre théorème de Gordon–Luecke [9] dit alors qu'il existe un nombre infini de remplissages (inéquivalents) de Dehn sur K produisant chacun une variété hyperbolique M avec la même algèbre de cohomologie et enlacements isomorphes. Un argument dû à Boileau–Wang [2, preuve de la Prop. 3.2] construit explicitement une application $M \to X$ de degré 1. $\square$

7 Quelques questions

Nous incluons dans cette section quelques questions suggérées par les résultats de cet article.

Question 1 [Structure du monoïde des enlacements] Calculer le nombre de classes d'isomorphismes d'enlacements de rangs donnés. Plus généralement, avec les notations introduites à la fin de §2.2, décrire les fibres de l'application Profil. Plus précisément, existe-t-il une classe $\mathcal{C}$ de parties de $\mathbb{N}$ telles que $\mathfrak{M}$ soit classifié à partir des fibres $\mathrm{Profil}^{-1}(E)$, $E \in \mathcal{C}$? On peut poser les mêmes questions en un sens plus faible en remplaçant les fibres par leur groupe de Witt. Enfin, ces questions peuvent être posées au sujet du monoïde des formes quadratiques.

Question 2 [Réalisabilité des enlacements par les variétés de Seifert] Il est connu [11, Th. 6.1] que tout enlacement peut être réalisé comme l'enlacement d'une variété connexe fermée orientée de dimension 3. On peut modifier l'argument du lemme 5 pour imposer que la 3-variété réalisant l'enlacement soit irréductible. Est-ce que l'on peut imposer que la 3-variété soit de Seifert (une question qui a peut-être motivé Seifert à introduire les variétés de Seifert) ? Peut-être peut-on le démontrer à l'aide des techniques de [2].

Question 3 [Forme normale] L'article [16] contient un algorithme de mise sous forme normale pour tout enlacement et permet de simplifier la preuve originale de [11] de la présentation par générateurs et relations de $\mathfrak{M}$. Peut-on généraliser le résultat principal (Th. 4.4) de [16] aux formes quadratiques sur les 2-groupes ?

Question 4 [Reconnaissance de fonctions quadratiques] D'après la remarque 2 à la fin de §3, le Théorème 5 est une généralisation du Théorème 2 aux *formes* quadratiques. Quoique plus délicat, il serait utile de les généraliser aux *fonctions* quadratiques, c'est-à-dire aux applications $q : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ telle que $b_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ soit bilinéaire en x et y *sans requérir a priori* la condition d'homogénéité $q(n\ x) = n^2\ q(x)$. Une telle question est motivée, par exemple, par le fait qu'une 3-variété équipée d'une structure Spin^c possède canoniquement une telle fonction quadratique. (C'est d'ailleurs ce qui permet de généraliser le Théorème 9 à ce cadre.) Ce fait est vrai plus généralement d'ailleurs, pour toute variété fermée de dimension $4n-1$ équippée d'une structure complexe sur $TM \oplus \mathbb{R}_M$ (fibré tangent stabilisé une fois) [14].

Références

[1] **E. Burger**, *Über Gruppen mit Verschlingungen*, J. Reine Angew. Math. 188 (1950), 193–200.

[2] **M. Boileau, S. Wang**, *Non-zero degree maps and surface bundles over S^1*, J. Diff. Geom., 43 (1996), 789-806.

[3] **F. Deloup**, *Une présentation combinatoire du monoïde des enlacements*, Comptes-Rendus Math. **337** (2003) no. 4, 227–232.

[4] **F. Deloup**, *An explicit construction of an abelian topological quantum field theory*, Topology Appl. 127 (2003), no. 1–2, 199–211.

[5] **F. Deloup, C. Gille**, *Abelian quantum invariants indeed classify linking pairings.* Knots in Hellas '98, Volume 2 (Delphi). J. Knot Theory Ramifications 10 (2001), no. 2, 295–302.

[6] **F. Deloup, G. Massuyeau**, *Quadratic functions and complex spin structures on 3-manifolds*, Topology 44 (2005), no. 3, 509–555.

[7] **F. Deloup, G. Massuyeau**, *Reidemeister–Turaev torsion mod 1 of rational homology 3-spheres*, Geom. Topol. Vol. 7 (2003), 773–787.

[8] **A. Degtyarev, Itenberg, V. Kharlamov**, Real Enriques Surfaces, Lecture Notes in Math. 1746, Springer, 2000.

[9] **C. McA. Gordon, J. Luecke**, *Reducible and Dehn surgery*, Topology 35, no. 2 (1996), 385–409.

[10] **C. Hayat-Legrand, S. Wang, H. Zieschang**, *Degree one maps onto lens spaces*, Pacific J. Math. 176, no. 1 (1996), 19–32.

[11] **A. Kawauchi, S. Kojima**, *Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds*, Math. Ann. 253 (1980), 29–42.

[12] **S. Lang**, Algebraic Number Theory, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1994.

[13] **J. Lannes, F. Latour**, *Forme quadratique d'enlacement et applications*, Astérisque No. 26. Société Mathématique de France, Paris, 1975.

[14] **E. Looijenga, J. Wahl**, *Quadratic functions and smoothing surface singularities*, Topology 25, no. 3 (1986), 261–291.

[15] **J. Milnor, D. Husemoller**, Symmetric Bilinear Forms, Ergebnisse der Math. 73, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[16] **R. Miranda**, *Nondegenerate Symmetric Bilinear Forms on Finite Abelian* 2*-groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 2, 535–542.

[17] **J. Morgan, D. Sullivan**, *The transversality characteristic class and linking cycles in surgery theory*, Ann. of Math. (2) 99 (1974), 463–544.

[18] **R. Myers**, *Simple knots in compact orientable* 3*-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 75–91.

[19] **U. Pinkall**, *Regular homotopy classes of immersed surfaces*, Topology 24 (1985), no. 4, 421–434.

[20] **W. Scharlau**, Quadratic and Hermitian Forms, Grundlehren der Math. Wiss. 270, Springer-Verlag, 1985.

[21] **H. Seifert, W. Threlfall**, Lehrbuch der Topologie, Leipzig, 1934.

[22] **E. R. van Kampen**, *Invariants derived from looping coefficients*, Amer. J. Math. 60 (1938), 595–610.

[23] **J.-P. Serre**, Cours d'Arithmétique, Deuxième Edition, Presses Univ. France, Paris, 1977.

[24] **V.G. Turaev**, *Euler structures, nonsingular vector fields, and torsions of Reidemeister type*, Izvestia Ac. Sci. USSR 53:3 (1989) (traduit en anglais dans Math. USSR Izvestia 34:3 (1990), 627–662).

[25] **V.G. Turaev**, Torsions of 3-dimensional manifolds, Progress in Math. 208, Birkäuser, 2002.

[26] **I.M. Vinogradov**, An introduction to the theory of numbers, Pergamon Press, Londres, 1955.

[27] **C.T.C Wall**, *Quadratic forms on finite groups and related topics*, Topology **2** (1963), 281–298.

[28] **G.W. Whitehead**, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Math. 61, Springer, New York, 1978.

Université Paul Sabatier, Toulouse III, Laboratoire Émile Picard de Mathématiques
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France.

Email: `deloup@picard.ups-tlse.fr`

Received: 4 December 2003